

STRUTTURE AEROSPAZIALI. DISPENSE.

1. LA TRAVE

La trave è l'elemento strutturale più antico e più importante. Da diversi millenni gli uomini utilizzano tronchi d'albero come travi, cioè come elementi allungati soggetti principalmente a flessione. È solo da poco (qualche secolo) che si sono realizzate travi con materiali diversi dal legno, ottenendo anche prestazioni superiori.

La trave ha avuto ed ha ampio impiego sopra tutto per la sua intrinseca efficienza, ma anche per un'altra fortunata circostanza: il suo sviluppo prevalente in una direzione permette di calcolare gli sforzi in ogni sezione, a partire dalle sole azioni interne agenti in quella sezione. Questo semplifica enormemente non solo l'analisi, ma sopra tutto il progetto, il quale può considerare il dimensionamento e l'ottimizzazione di una sezione alla volta, e non di tutto il componente nel suo insieme.

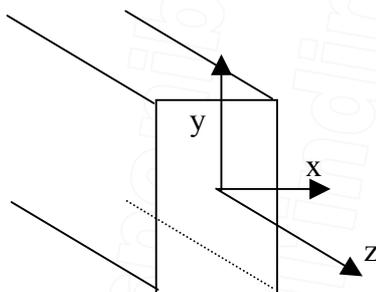
1.1. Definizioni

Con il termine *trave* si intende un elemento strutturale allungato, la cui forma è generata da una figura piana che trasla lungo un asse rettilineo normale al piano della figura stessa. Le posizioni occupate dalla figura piana individuano le *sezioni* della trave. Si assume come *asse* della trave una retta parallela alla traslazione, passante per un punto di riferimento, arbitrario, della sezione. Una *sezione* può perciò essere definita come il luogo dei punti della trave che stanno su un piano perpendicolare all'asse.

Quindi una trave ha asse rettilineo e sezione costante lungo l'asse. Anche le proprietà meccaniche del materiale o dei materiali di cui è composta la trave sono assunte come costanti lungo l'asse, anche se, come si vedrà più avanti () possono variare sulla sezione.

Inoltre la trave è caricata solo agli estremi. In senso stretto ciò significa che lungo l'asse della trave l'azione assiale, le componenti del taglio ed il momento torcente possono solo essere costanti, mentre i momenti flettenti possono solo avere andamento lineare.

Per la trave si assume un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, avente l'asse z coincidente con l'asse della trave (figura 1).



Limiti di validità e approssimazioni

Si è detto che gli sforzi nei punti di una sezione dipendono solo dalle azioni interne agenti sulla sezione stessa e che i carichi agiscono solo agli estremi della trave. Dato che i carichi sono applicati in zone di limitata estensione, se la trave è snella, in sezioni sufficientemente distanti dalle zone di applicazione, lo stato di sforzo non risente della distribuzione locale, ma solo dei risultanti e dei momenti risultanti dei carichi applicati. Cioè due distribuzioni dei carichi applicati diverse ma equivalenti producono in una sezione lontana gli stessi effetti.

In altri termini, gli sforzi applicati hanno due effetti diversi: *effetti vicini*, che agiscono nelle zone di applicazione e nelle immediate vicinanze, risentono della reale distribuzione, la quale potrebbe eventualmente causare concentrazioni locali di sforzo più o meno accentuate, e *effetti lontani* che agiscono dovunque e dipendono solo delle azioni risultanti.

Quindi nelle zone di estremità si sovrappongono gli sforzi dovuti agli effetti vicini e quelli dovuti agli effetti lontani; poiché questi ultimi sono equivalenti da soli alle azioni interne, gli altri sono sistemi autoequilibrati, cioè sistemi a risultante e momento risultante nulli, e si smorzano rapidamente allontanandosi dagli estremi.

Questo fatto, peraltro non contrario all'intuizione, noto come il Principio di De Saint Vénant, fu enunciato da Barré De Saint Vénant intorno alla metà del secolo XIX; in epoca più recente fu dimostrato (), tanto che oggi dovrebbe più correttamente essere chiamato il Teorema di De Saint Vénant.

Nel seguito diremo sistemi di sforzo centrali o *soluzioni centrali* e sistemi di sforzo di estremità o *soluzioni di estremità*, rispettivamente gli stati di sforzo che agiscono nella zona centrale della trave (cioè ad una certa distanza dagli estremi) e gli stati di sforzo autoequilibrati che a questi si sovrappongono nelle zone di estremità.

Lo stato di sforzo fondamentale della trave è costituito dalle soluzioni centrali, le quali valgono esattamente solo ad una certa distanza dagli estremi. Inoltre valgono esattamente solo quando le ipotesi alla base della nozione di trave sono rispettate esattamente.

In realtà le soluzioni della trave sono utilizzabili come *approssimazioni* anche quando le ipotesi di base sono rispettate solo approssimativamente. In particolare:

- quando l'asse della trave non è rettilineo, purché il raggio di curvatura sia grande rispetto alle dimensioni trasversali della sezione;
- quando il moto della sezione che descrive la trave non è una semplice traslazione lungo l'asse, ma un moto elicoidale, con una modesta rotazione intorno all'asse stesso, che viene detta *svergolamento*, purché il passo dell'elica sia abbastanza grande rispetto alle dimensioni trasversali della sezione;
- quando la trave è *rastremata*, cioè quando la sezione non è costante, purché le derivate delle dimensioni trasversali della sezione rispetto alla coordinata z siano abbastanza piccole rispetto all'unità;
- quando vi siano anche carichi lungo la trave, purché tali da produrre effetti vicini trascurabili rispetto agli effetti lontani, in modo che gli sforzi dipendano dai carichi applicati lungo la trave solo attraverso le azioni interne;
- inoltre, specialmente per le travi a sezione massiccia, spesso si assumono le soluzioni centrali come approssimazioni dello sforzo, anche in prossimità degli estremi, trascurando gli effetti locali di estremità.

Ovviamente l'approssimazione, e quindi l'errore, che in questo modo si introduce nella valutazione dello stato di sforzo, dipende in modo diretto dalla entità della approssimazione rispetto alle ipotesi di base.

1.2. La trave inflessa

Con le definizioni e le ipotesi introdotte cerchiamo ora lo stato di sforzo centrale, in una trave composta da un materiale elastico, omogeneo ed isotropo, che subisce spostamenti infinitesimi.

Poiché abbiamo supposto nulli i carichi agenti lungo la trave, sono da ritenere identicamente nulle le forze distribuite nel volume e quelle sulla superficie laterale della trave. Quindi le equazioni indefinite di equilibrio, in forma esplicita, si scrivono:

$$\begin{cases} \sigma_{x/x} + \tau_{xy/y} + \tau_{xz/z} = 0 \\ \tau_{yx/x} + \sigma_{y/y} + \tau_{yz/z} = 0 \\ \tau_{zx/x} + \tau_{zy/y} + \sigma_{z/z} = 0 \end{cases} \quad \text{nel volume.} \quad (1)$$

Il problema che ci poniamo è quello di determinare gli sforzi nei punti di una sezione conoscendo le 6 componenti delle azioni interne:

$$\begin{aligned} T_x &= \int_A \tau_{zx} dA & ; & \quad M_x = \int_A y \sigma_z dA \\ T_y &= \int_A \tau_{zy} dA & ; & \quad M_y = \int_A -x \sigma_z dA \\ T_z &= \int_A \sigma_z dA & ; & \quad M_z = \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA \end{aligned} \quad , \quad (2)$$

ove A è l'area della sezione.

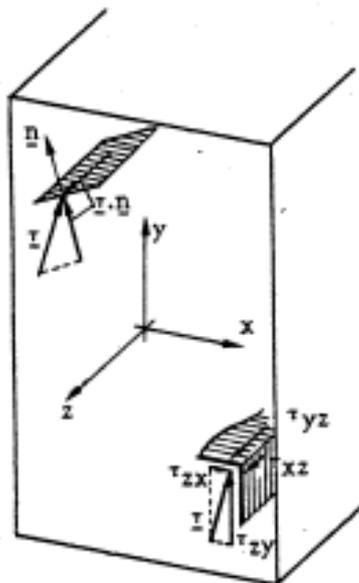
Si osservi che l'azione assiale T_z e i momenti flettenti M_x ed M_y sono rispettivamente il risultante ed i momenti risultanti dello sforzo normale σ_z , mentre i tagli T_x e T_y ed il momento torcente M_z sono i risultanti ed il momento risultante degli sforzi tangenziali τ_{zx} e τ_{zy} .

In un materiale isotropo gli sforzi normali e tangenziali non sono accoppiati dalla legge costitutiva; inoltre, in un corpo omogeneo non nascono sforzi secondari dovuti a incompatibilità delle contrazioni trasversali. Quindi è logico ritenere che, in una trave costituita da materiale isotropo ed omogeneo, le componenti di sforzo diverse da zero siano solo quelle agenti sul piano della sezione, e cioè σ_z , τ_{zx} e τ_{zy} , e che inoltre σ_z dipenda solo da T_z , M_x ed M_y , mentre τ_{zx} e τ_{zy} dipendano solo da T_x , T_y ed M_z .

Sarà quindi: $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Le uniche componenti dello sforzo che possono essere diverse da zero sono:

- tutte le componenti dello sforzo che agisce sulla faccia che ha la normale esterna diretta come l'asse z , cioè che agisce sul piano della sezione;
- per la simmetria del tensore degli sforzi ($\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$) la componente secondo z dello sforzo che agisce sulle facce parallele all'asse della trave (v. figura 2).



Dato che solo tre componenti del tensore degli sforzi sono diverse da zero, possiamo porre:

$$\sigma_z = \sigma \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau_x \quad ; \quad \tau_{zy} = \tau_y \quad ,$$

e consideriamo τ_{zx} e τ_{zy} come le componenti di un vettore $\boldsymbol{\tau}$ ¹ del piano della sezione. Tenendo conto di queste posizioni, le equazioni indefinite (1) si scrivono:

$$\begin{cases} \tau_{/z} = 0 \\ \text{div } \boldsymbol{\tau} + \sigma_{/z} = 0 \end{cases} \quad , \quad (3)$$

ove $\text{div } \vec{\tau} = \tau_{x/x} + \tau_{y/y}$ è la divergenza del vettore $\boldsymbol{\tau}$ valutata nel dominio bidimensionale costituito dal piano xy .

La prima delle equazioni di equilibrio (3) dice che il vettore $\boldsymbol{\tau}$ è costante lungo z e può quindi variare solo con x e y . Quindi, per la seconda delle (3), anche $\sigma_{/z}$ deve essere costante rispetto a z , e quindi σ è funzione lineare di z . Queste condizioni sono soddisfatte dallo stato di sforzo che abbiamo fin qui ipotizzato, nel quale le τ sono funzioni dei tagli e del momento torcente, a loro volta costanti in z , e la σ è funzione dell'azione assiale, costante in z , e dei momenti flettenti, funzioni lineari di z .

Sforzi normali

¹ Il vettore $\boldsymbol{\tau}$ è il componente nel piano della sezione dello sforzo che agisce sulla sezione stessa.

Rimangono perciò da verificare solo le equazioni di congruenza che, trattandosi di un corpo elastico in regime di spostamenti infinitesimi, possono essere ricavate dal teorema di Menabrea.

Secondo il teorema di Menabrea esse sono le condizioni di minimo dell'energia di deformazione, con i vincoli derivanti dalle equazioni di equilibrio. Dato che si vogliono ottenere le equazioni di congruenza per il solo sforzo normale σ , il quale peraltro risulta disaccoppiato dallo sforzo tangenziale τ , si può cercare il minimo solo della parte di energia di deformazione dipendente da σ , cioè:

$$\tilde{V}_d = \frac{1}{2} \int_a^b \int_A \frac{\sigma^2}{E} dA dz \quad , \text{ ove } a \text{ e } b \text{ sono le ascisse degli estremi dell'asse della trave.}$$

Poiché si è visto che le equazioni indefinite di equilibrio sono identicamente soddisfatte, i vincoli che rimangono sono solo le equazioni di equivalenza con la azioni interne, cioè la terza, la quarta e la quinta delle (2), che possiamo scrivere nella forma omogenea seguente:

$$T_z - \int_A \sigma dA = 0 \quad ; \quad M_x - \int_A y \sigma dA = 0 \quad ; \quad M_y + \int_A x \sigma dA = 0 \quad . \quad (4)$$

Applicando quindi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il teorema di Menabrea porta alla ricerca del minimo libero del funzionale:

$$I = \int_a^b \int_A F(\sigma) dA dz \quad (5)$$

$$\text{ove} \quad F(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} + \lambda_z \left(\frac{T_z}{A} - \sigma \right) + \lambda_x \left(\frac{M_x}{A} - y \sigma \right) + \lambda_y \left(\frac{M_y}{A} + x \sigma \right) \quad (6)$$

e λ_x , λ_y e λ_z sono tre moltiplicatori arbitrari, funzioni della sola z .

Dato che il la funzione integranda F dipende dalla sola σ , il minimo del funzionale I si ottiene dalla equazione di Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \text{ che, tenendo conto della (6), si scrive: } \quad \frac{\sigma}{E} = \lambda_z + \lambda_x y - \lambda_y x \quad . \quad (7)$$

La (7) esprime il risultato ben noto che l'allungamento $\varepsilon = \sigma/E$ che soddisfa le condizioni di congruenza è, nella zona centrale della trave, funzione lineare non omogenea delle coordinate x ed y .

Ricavando la σ dalla (7) e sostituendola nelle 3 equazioni (4), si ha:

$$\begin{aligned} T_z &= E \lambda_z \int_A dA + E \lambda_x \int_A y dA - E \lambda_y \int_A x dA = E \lambda_z A + E \lambda_x S_x - E \lambda_y S_y \\ M_x &= E \lambda_z \int_A y dA + E \lambda_x \int_A y^2 dA - E \lambda_y \int_A x y dA = E \lambda_z S_x + E \lambda_x J_x - E \lambda_y J_{xy} \quad , \quad (8) \\ M_y &= -E \lambda_z \int_A x dA - E \lambda_x \int_A x y dA + E \lambda_y \int_A x^2 dA = -E \lambda_z S_y - E \lambda_x J_{xy} + E \lambda_y J_y \end{aligned}$$

da cui si possono ricavare i valori delle tre costanti λ_x , λ_y e λ_z . S_x ed S_y sono i momenti statici dell'area di tutta la sezione rispetto agli assi x ed y , mentre J_x , J_y e J_{xy} sono i momenti di inerzia ed il momento centrifugo rispetto agli stessi assi.

Ne caso in cui gli assi x ed y siano baricentrici, e perciò i momenti statici S_x ed S_y siano nulli, e inoltre siano assi principali di inerzia, e quindi sia nullo anche il momento centrifugo J_{xy} , dalle (8) si ottiene direttamente:

$$E\lambda_z = \frac{T_z}{A} \quad ; \quad E\lambda_x = \frac{M_x}{J_x} \quad ; \quad E\lambda_y = \frac{M_y}{J_y} \quad ,$$

ove J_x e J_y sono i momenti principali di inerzia; sostituendo nella (7), si ottiene la notissima relazione che esprime lo sforzo normale σ nella zona centrale di una trave omogenea isotropa, in funzione dell'azione assiale e dei momenti flettenti:

$$\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x \quad . \quad (9)$$

Energia di deformazione

L'energia di deformazione della trave, relativa alla soluzione centrale, con le notazioni introdotte risulta:

$$V_d = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\int_A \frac{\sigma^2}{E} dA + \int_A \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{G} dA \right) dz \quad . \quad (10)$$

Il primo addendo, che compete agli sforzi normali, sostituendo la (9), con sviluppi evidenti assume la forma:

$$V_d = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{T_z^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} \right) dz \quad . \quad (11)$$

Il secondo addendo, che compete agli sforzi tangenziali, per una trave snella con sezione massiccia, è trascurabile rispetto al primo. Infatti, supponendo che siano presenti solo il momento flettente M_x ed il taglio T_y , senza per questo ledere la generalità, le due energie per unità di lunghezza da confrontare risultano

$$\frac{M_x^2}{EJ_x} \quad \text{e} \quad \int_A \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{G} dA \quad . \quad (12)$$

Per una sezione relativamente massiccia, indicando col simbolo \approx l'uguaglianza degli ordini di grandezza:

$\tau_y \approx \frac{T_y}{A}$, e quindi $\int_A \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{G} dA \approx \frac{\tau_y^2}{G} A \approx \frac{T_y^2}{GA}$; per una trave inoltre (cfr.) $T_y \approx \frac{M_x}{l}$, da cui $\int_A \frac{\tau_x^2 + \tau_y^2}{G} dA \approx \frac{M_x^2}{GAl^2}$; ne segue che, essendo G ed E dello stesso ordine di grandezza, il rapporto

fra il secondo ed il primo termine della (9) è dell'ordine di $\frac{J_x}{Al^2} = \left(\frac{\rho_x}{l}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Quindi, nel caso considerato, l'energia di deformazione dovuta al taglio è trascurabile rispetto a quella dovuta alla flessione, come l'inverso del quadrato della snellezza λ , uguale al rapporto fra il raggio di inerzia ρ e la lunghezza l , è trascurabile rispetto all'unità.

In pratica, quando si considerano travi con snellezze dell'ordine di alcune decine o più, con sezioni relativamente massicce, si può assumere per l'energia di deformazione l'espressione (11), trascurando il contributo del taglio, senza commettere errori apprezzabili. Per la trave a parete sottile, della quale si dirà nel seguito, i rapporti possono essere diversi.

Lavoro virtuale e lavoro complementare

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte al paragrafo precedente, si può concludere che, per una trave snella e con sezione massiccia, il lavoro virtuale ed il lavoro complementare di deformazione significativi sono solo quelli che derivano dalla σ . Per questi si può quindi assumere l'espressione generale seguente:

$$L_d = \int_a^b \left(\frac{T_z \hat{T}_z}{EA} + \frac{M_x \hat{M}_x}{EJ_x} + \frac{M_y \hat{M}_y}{EJ_y} \right) dz, \quad (13)$$

ove T_z , M_x ed M_y si interpretano come forze reali e $\frac{\hat{T}_z}{EA}$, $\frac{\hat{M}_x}{EJ_x}$ e $\frac{\hat{M}_y}{EJ_y}$ come deformazioni virtuali nel caso del lavoro virtuale, $\frac{T_z}{EA}$, $\frac{M_x}{EJ_x}$ e $\frac{M_y}{EJ_y}$ come deformazioni reali e \hat{T}_z , \hat{M}_x ed \hat{M}_y come forze virtuali nel caso del lavoro virtuale complementare.

Deformazione

La componente del tensore di deformazione associata all'unico sforzo assiale presente all'interno del modello di trave può essere ricavata nella seguente maniera.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{T_z}{EA} + \frac{M_x}{EJ_x} y - \frac{M_y}{EJ_y} x$$

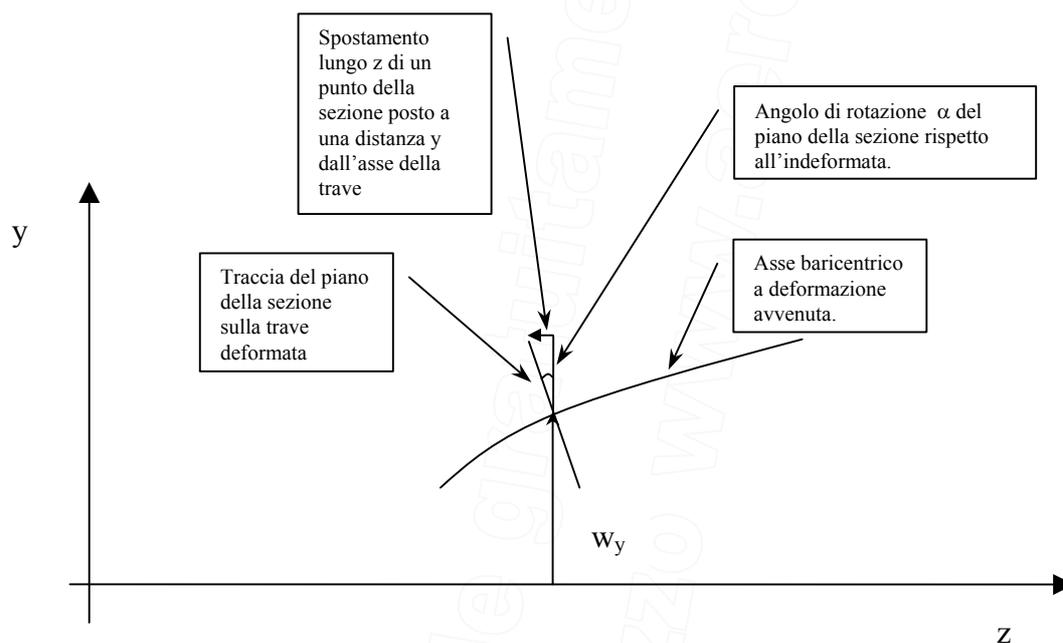
essendo poi costanti sulla sezione le seguenti parti:

$$\frac{T_z}{EA} \quad \frac{M_x}{J_x} \quad \frac{M_y}{J_y}$$

la deformazione può essere scritta nella seguente forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \varepsilon_0 + k_y y - k_x x$$

che rappresenta cioè la deformazione come somma di una componente costante e due componenti variabili linearmente sulla sezione. Per trovare un significato fisico ai termini k_y e k_x consideriamo una trave nel piano yz (z asse della trave). Definiamo w_y la componente lungo y dello spostamento della fibra baricentrica e supponiamo che le sezioni della trave si mantengano perpendicolari alla fibra baricentrica anche a deformazioni avvenute.



Lo spostamento lungo z di un punto del piano della sezione risulta quindi:

$$s_z = -\alpha y = -\frac{\partial w_y}{\partial z} y = -w'_y y$$

mediante tale spostamento è possibile calcolare dalla definizione di tensore delle deformazioni per piccoli spostamenti la componente di allungamento lungo z :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2}(s_{z/z} + s_{z/z}) = s_{z/z} = -w''_y y$$

da questa relazione si deduce che il termine k_y che cercavamo coincide con la curvatura dell'asse della trave:

$$k_y = -w_y''$$

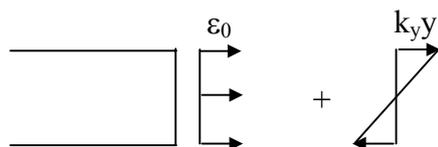
l'espressione finale della deformazione diventa quindi:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - w_y''y + w_x''x$$

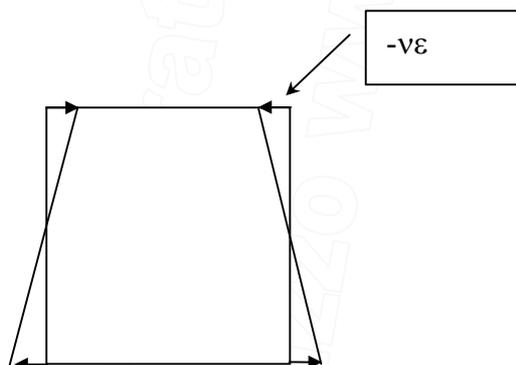
con tale espressione è possibile esprimere il lavoro di deformazione in funzione delle sole deformazioni in maniera analoga a quanto già fatto in funzione dei soli sforzi. Si utilizza il simbolo δ per rappresentare il sistema virtuale:

$$\delta L_d = \int_0^l (\varepsilon_0 \delta \varepsilon_0 EA + w_y'' \delta w_y'' EJ_x + w_x'' \delta w_x'' EJ_y) dz$$

Dall'espressione dell'allungamento della trave si vede come la deformazione della sezione lungo z è somma di una parte costante più una parte lineare:



Osservando invece la sezione nel piano xy si nota che a causa delle deformazioni flessionali (si suppone positive per le y positive) nascono delle deformazioni trasversali ($-\nu\varepsilon$) che distorcono la forma della sezione. Nel disegno seguente si riportano solo le deformazioni in direzione y per un momento flettente in direzione x :

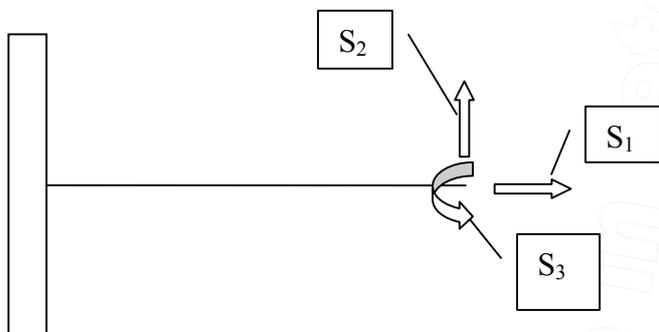


Nel modello di trave di De Saint Venant il movimento della sezione mantiene quindi le sezioni normali all'asse della trave ma distorce la forma della sezione.

Matrice di rigidezza

Con l'espressione del lavoro virtuale complementare si può ora calcolare la matrice di rigidezza dell'estremo libero di una trave incastrata ad un estremo.

Consideriamo una trave di lunghezza l incastrata ad un estremo e libera all'altro, in particolare evidenziamo le componenti di spostamento che caratterizzano il moto dell'estremo libero:



Ciò che vogliamo cercare è il legame tra tali spostamenti e le forze dirette nelle stesse direzioni e applicate nello stesso punto. Definendo un vettore di forze F applicate e di spostamenti S vogliamo cioè cercare la relazione:

$$\{F\} = [K]\{S\}$$

tale legame esprime che forze nascono a causa dell'imposizione di spostamenti assegnati. In realtà, per motivi di comodità, viene calcolata la matrice inversa della K , tale matrice, detta di flessibilità, rappresenta gli spostamenti associati a forze note applicate. Si ha quindi:

$$\{S\} = [K]^{-1}\{F\} = [D]\{F\}$$

la matrice D ha dimensione 3×3 , l'elemento ij rappresenta lo spostamento diretto in direzione i causato da una forza applicata in direzione j . La matrice è simmetrica e definita positiva i suoi elementi indipendenti sono 6. Per determinarli dobbiamo applicare 6 volte il Principio dei lavori complementari, utilizzando di volta in volta dei sistemi di forze fittizi e reali diversi. Si noti che la scrittura del PLC impone la congruenza della nostra soluzione.

D_{11} è lo spostamento in direzione 1 provocato da una forza F_1 .

Il sistema fittizio e reale coincidono e sono:

Sistema fittizio:



Sistema reale



Entrambi i sistemi provocano esclusivamente un'azione assiale costante nella trave e l'espressione dello spostamento si ricava eguagliando i lavori virtuali complementari interno ed esterno:

$$1S_1 = \int_0^l \frac{F_1}{EA} dz = F_1 \frac{1}{EA}$$

il termine 11 è quindi $\frac{1}{EA}$

D_{12} è lo spostamento in direzione 1 causato da una forza in direzione 2.

Una forza in direzione 2 provoca un taglio costante e un momento flettente lineare, entrambe queste azioni interne non lavorano per l'azione assiale del sistema fittizio (identico a quello del termine D_{11}). Per tale ragione $D_{12}=D_{21}=0$

Per la stessa ragione anche i termini D_{13} e D_{31} sono nulli.

Il termine 22 è lo spostamento in direzione 2 provocato da una forza nella stessa direzione.

I sistemi fittizi e reali sono quindi:

Sistema fittizio:



Sistema reale



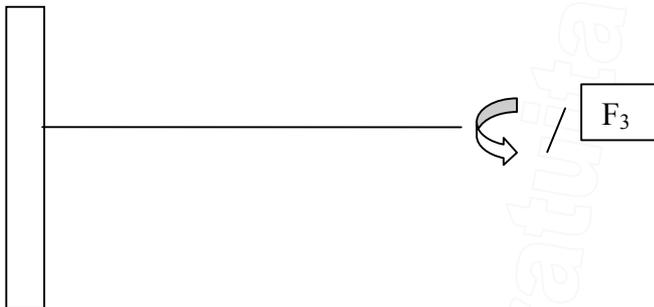
Tali sistemi provocano un taglio costante e un momento flettente lineare. Lo spostamento può essere ricavato così:

$$1S_2 = \int_0^l \left(\frac{F_2}{GA} + \frac{F_2 z \cdot 1z}{EJ} \right) dz = (\text{a meno dellavoro dl taglio}) \frac{F_2 l^3}{3EJ}$$

il termine D_{22} è quindi $\frac{l^3}{3EJ}$ (avendo trascurato il taglio)

Il termine D_{23} è lo spostamento in direzione 2 provocato da una forza F_3 (un momento). Il sistema fittizio è lo stesso del precedente, il sistema reale è:

Sistema reale



Tale sistema provoca un momento flettente costante. Lo spostamento è così valutabile:

$$1S_2 = \int_0^l \frac{F_3 \cdot 1z}{EJ} dz = \frac{F_3 l^2}{2EJ}$$

il termine D_{23} è quindi $\frac{l^2}{2EJ} = D_{32}$

Resta da valutare D_{33} che ha come sistema reale il sistema reale del termine 23 e come sistema fittizio lo stesso con il momento unitario. Si ha:

$$1S_3 = \int_0^l \frac{F_3 \cdot 1}{EJ} dz = \frac{F_3 l}{EJ}$$

per cui D_{23} è quindi $\frac{1}{EJ}$

La matrice D è quindi:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l}{EJ} \end{bmatrix}$$

La matrice K si ottiene invertendo la D:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}$$

Se si considera ora la trave libera nello spazio e si applicano i sistemi di forze e spostamenti ai due estremi organizzati in due vettori di 6 elementi ciascuno in cui il primo indice descrive quale estremo della trave si sta considerando e il secondo quale componente, con le convenzioni viste sopra si ottiene per la matrice totale:

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

Tale matrice di per sé è di scarsa utilità in quanto labile. Acquista notevole interesse quando utilizzata nei sistemi di travi.

Strutture composte da travi

La trave inflessa, come abbiamo visto, è un modello adeguato per corpi allungati, aventi caratteristiche costanti lungo l'asse, sezione relativamente massiccia, soggetti ad azione assiale, taglio e flessione. Viene quindi impiegato con successo anche per le travi che fanno parte di strutture più o meno complesse.

Le strutture fatte di travi si chiamano *strutture a telaio* quando si considera che i *nodi*, cioè i giunti fra le travi, sono in grado di trasmettere forze e momenti, costituendo incastro fra le travi. Si chiamano *strutture a traliccio* quando si considera che i nodi siano in grado di trasmettere solo forze. In quest'ultimo caso ogni trave componente può esercitare sui nodi solo una forza diretta secondo la congiungente i suoi estremi, quindi solo azione assiale, se l'asse della trave è rettilineo. Dato che non sono soggette a significativa flessione, le travi delle strutture a traliccio vengono dette *aste* o *bielle*.

Come si vedrà, in una struttura a telaio realizzata con aste molto snelle, il contributo flessionale delle travi è trascurabile rispetto a quello assiale, e perciò la struttura può essere considerata un traliccio. Possono essere considerate strutture di questo tipo le centine a traliccio, come quelle dello Space Shuttle, le strutture a traliccio delle fusoliere dei velivoli e degli elicotteri, le grandi travature previste per la Stazione Spaziale e le strutture di alcuni satelliti.

Quando si applica il metodo delle forze, se la struttura che si considera è iperstatica, le equazioni di equilibrio non sono in numero sufficiente, e la soluzione richiede anche l'impiego di equazioni di congruenza. Queste si ottengono in genere da formulazioni energetiche, quali il principio dei lavori virtuali complementari od il teorema di Menabrea, i quali consentono la ricerca della soluzione congruente fra le soluzioni equilibrate.

Ciò richiede o la formulazione di problemi variazionali vincolati, o espressioni delle soluzioni equilibrate che dipendono da parametri che non alterano l'equilibrio. Questi parametri sono le *incognite iperstatiche* che possono essere impiegate per soddisfare le condizioni di congruenza in problemi variazionali liberi.

Il metodo più usato per individuare le incognite iperstatiche è il metodo di Navier, la struttura viene resa isostatica tagliando le connessioni sovrabbondanti: le incognite iperstatiche sono quindi forze interne applicate in corrispondenza dei tagli effettuati.

Tuttavia, per le strutture complesse, oggi viene utilizzato quasi esclusivamente il metodo degli spostamenti, dato che consente formulazioni più agevolmente programmabili, e quindi un più facile impiego dei calcolatori. Vediamo di seguito l'utilizzo di tale metodo.

Scrittura dell'equilibrio di un sistema di travi con il metodo degli spostamenti.

Tale metodo presenta il notevole vantaggio di poter essere facilmente automatizzabile e di non risentire del grado di iperstaticità della struttura in quanto la congruenza degli spostamenti è già contenuta all'interno della scrittura delle matrici di rigidezza delle singole travi. Descriviamo qui di seguito il metodo utilizzato per i sistemi piani di travi. L'ampliamento a sistemi spaziali non comporta variazioni di principio, ma solo la riscrittura delle matrici di rigidezza e del vettore coordinate libere inserendo i termini qui trascurati.

Supponiamo di iniziare avendo già a disposizione la matrice di rigidezza delle travi che costituiscono il nostro sistema, matrice che conterrà tutti i termini necessari a descrivere il corretto comportamento della trave. Per ogni trave possiamo scrivere:

$$\{F\}_i = [K]_i \{u\}_i \quad \text{dove } i=1 \dots n = \text{nr di travi, la barra superiore indica che siamo nel sistema di riferimento locale.}$$

La matrice K ha dimensioni 6x6 e quindi i vettori F ed u sono 6x1. Il vettore u rappresenta gli spostamenti degli estremi della trave organizzati nella seguente maniera:

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1x} \\ \bar{u}_{1y} \\ \bar{u}_{1\theta} \\ \bar{u}_{2x} \\ \bar{u}_{2y} \\ \bar{u}_{2\theta} \end{Bmatrix} \quad u_{1y} \text{ è lo spostamento dell'estremo 1 in direzione y.}$$

La prima operazione da eseguire è la rotazione del sistema per mettersi nel sistema di riferimento globale. Tale operazione viene effettuata tramite la relazione (ricavabile in maniera semplice):

$$\{\bar{u}\}_i = [T]_i \{u\}_i \text{ dove:}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e α è l'angolo formato tra l'asse x del sistema di riferimento globale e l'asse x locale della trave (che consideriamo coincidente con l'asse baricentrico).

Si ha quindi (ricordando l'invarianza del lavoro di deformazione):

$$\delta L_d = \{\delta \bar{u}\}^T \{F\} = \{\delta \bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} = \{\delta u\}^T [T]^T [K] [T] \{u\}$$

$$\text{da cui: } [K] = [T]^T [K] [T]$$

la K così ricavata è la matrice di rigidezza della trave i portata nel sistema di riferimento globale. L'ottenimento dell'equilibrio del sistema completo si ha "assemblando" i contributi delle singole travi. Il filo conduttore può essere trovato attraverso il principio dei lavori virtuali. Avendo già schematizzato le travi attraverso le singole matrici di rigidezza abbiamo già soddisfatto alla congruenza interna della struttura (per ricavare i termini sono stati utilizzati dei PLC). Il sistema è perciò adesso schematizzabile attraverso dei 'nodi' su cui convergono le singole travi e di cui dobbiamo scrivere l'equilibrio. Il concetto di continuo è quindi già sparito (nel senso che tutte le integrazioni sono già contenute nella K). Possiamo quindi scrivere l'equilibrio eguagliando il lavoro di deformazione al lavoro delle forze esterne (PLV):
il lavoro di deformazione di una singola trave è:

$$\delta L_{d_i} = \{\delta u\}_i^T \{F\}_i = \{\delta u\}_i^T [K]_i \{u\}_i$$

Il lavoro di deformazione totale è la somma dei lavori delle singole travi e la matrice di rigidezza totale si scrive considerando il lavoro di deformazione di tutta la struttura. Si deve però prima riscrivere i vettori u_i e K_i ampliandoli alle dimensioni dei gradi di libertà del sistema per poter avere vettori e matrici tutti con le stesse dimensioni:

$$\delta L_{d=} = \{\delta u\}^T [K] \{u\} = \sum_i \{\delta u\}_i^T [K]_i \{u\}_i$$

da cui :

$$[K] = \sum_i [K]_i$$

Tale lavoro deve essere eguagliato a quello delle forze esterne applicate ai nodi (notare che nell'assemblaggio le forze scambiate dalle travi, a due a due uguali, si elidono):

$$\delta L_e = \{\delta u\}^T \{F\}$$

dall'eguaglianza del lavoro interno ed esterno si ottiene la nota $F=Ku$

Tornando alla descrizione del metodo, per ricavare la matrice di rigidezza del sistema completo si devono assemblare le matrici di rigidezza dei singoli elementi. Si deve definire cioè una matrice Ω_i che permette di trovare la posizione degli spostamenti locali u_i nel vettore degli spostamenti globali u . Tale matrice in realtà contiene tantissimi zeri e pochi 1.

La matrice Ω_i ha dimensioni $6 \times (6n)$

$$\{u\}_i = [\Omega]_i \{u\}$$

la matrice Ω_i definisce anche la posizione delle forze della trave i rispetto al vettore di tutte le forze applicate. La matrice di rigidezza nel sistema globale assemblata dalle matrici delle singole aste si ricava così:

$$\delta L_d = \sum_i \{\delta u\}_i^T [K]_i \{u\}_i = \sum_i \{\delta u\}^T [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i \{u\} = \{\delta u\}^T \left(\sum_i [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i \right) \{u\}$$

$$[K] = \sum_i [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i$$

è possibile ora scrivere l'equazione che governa l'equilibrio del sistema (come già visto):

$$\{F\} = [K] \{u\}$$

dove F sono a questo punto le forze esterne applicate ai nodi delle travi e u è il vettore contenente tutti gli spostamenti dei nodi. La risoluzione non può però essere ancora effettuata in quanto la matrice K così definita è labile in quanto non sono ancora stati inseriti i vincoli esterni.

Tali vincoli si concretizzano nel dire che alcuni spostamenti (vincoli bilateri) sono impediti. Questo equivale a eliminare dalla matrice K e dai vettori F ed u le righe e le colonne corrispondenti a tali spostamenti. Il sistema può essere così risolto essendo ora la matrice K invertibile.

In realtà possono anche essere interessanti le reazioni vincolari. Per tale motivo si procede nel seguente modo:

si divide il vettore degli spostamenti u in una parte u_L incognita e una parte u_v nota che rappresenta gli spostamenti dei vincoli:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_v \\ u_L \end{Bmatrix}$$

allo stesso modo si divide il vettore F in forze applicate dall'esterno F_e (che sono note) e reazioni vincolari F_v (incognite):

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_v \\ F_e \end{Bmatrix}$$

così facendo il legame forze-spostamenti viene riscritto:

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vL} \\ K_{vL} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_L \end{Bmatrix}$$

dalla seconda riga si ha:

$$\{F_e\} = [K_{vL}]\{u_v\} + [K_{LL}]\{u_L\}$$

in cui la K_{LL} è ora invertibile e gli u_v sono noti. Per cui:

$$\{u_L\} = [K_{LL}]^{-1}(\{F_e\} - [K_{vL}]\{u_v\})$$

che ci dà gli spostamenti incogniti della struttura con cui calcoliamo le reazioni vincolari:

$$\{F_v\} = [K_{vv}]\{u_v\} + [K_{vL}]\{u_L\}$$

Ovviamente il sistema di schematizzazione diventa potente nel momento in cui si ha a che fare con sistemi di travi in cui si vogliono ripetere i calcoli variando, ad esempio, le geometrie del sistema. All'interno della matrice di rigidezza della singola trave sono contenuti tutti i contributi considerati interessanti per lo sviluppo del calcolo (deformazioni flessionali, torsionali, a taglio ed assiali). L'introduzione di tali contributi non modifica quindi il procedimento di assemblaggio ma solamente il calcolo della singola matrice K . Nel caso si utilizzino ad esempio delle bielle o delle travi nello spazio, il metodo rimane inalterato a patto di valutare caso per caso l'espressione della K del singolo elemento e della matrice di rotazione T .

Sforzi tangenziali

Con le notazioni del par. 1.2. le equazioni indefinite di equilibrio per lo sforzo tangenziale τ sono le (3), alle quali si deve aggiungere l'equazione di equilibrio al contorno della sezione, che esprime il fatto che le forze esterne applicate alla superficie laterale della trave sono nulle.

Se si considera il vettore τ costante lungo z , la prima delle (3) è identicamente soddisfatta, e le equazioni di equilibrio rimangono le seguenti:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tau &= -\sigma_{/z} && \text{su tutta la sezione} \\ \tau \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sul contorno C della sezione} \end{aligned} \quad (16)$$

ove \mathbf{n} è il versore che giace nel piano xy , normale al contorno C, diretto verso l'esterno.

L'equazione al contorno, seconda delle (16), tiene conto del fatto che $\tau \cdot \mathbf{n} = \tau_x n_x + \tau_y n_y = \tau_i n^i$, componente normale al contorno C (quindi normale alla superficie laterale della trave) dello sforzo tangenziale τ agente sulla sezione, per la simmetria del tensore degli sforzi, è uguale alla componente secondo l'asse z dello sforzo tangenziale agente sulla superficie laterale esterna, che è nullo.

Il termine $\sigma_{/z}$ a secondo membro della prima delle (16), nella zona centrale della trave, può essere calcolato per mezzo della (9) e quindi ritenuto noto ai fini della determinazione dello sforzo tangenziale, il quale ultimo rimane quindi l'unica incognita.

Per quanto osservato in precedenza, lo sforzo tangenziale deve anche soddisfare le condizioni di equivalenza con le azioni interne, prime due ed ultima delle (2). Si dimostra che, se lo sforzo normale σ che compare nella (16) soddisfa le condizioni di equilibrio della flessione, le prime due equazioni (2) sono identicamente soddisfatte. Infatti, moltiplichiamo ambo i membri della prima delle (16) una volta per x ed una volta per y , ed integriamo su tutta la sezione:

$$\begin{aligned} \int_A x \operatorname{div} \tau \, dA &= - \int_A x \sigma_{/z} \, dA \\ \int_A y \operatorname{div} \tau \, dA &= - \int_A y \sigma_{/z} \, dA \end{aligned} \quad ; \quad (17)$$

dato che

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x\tau) &= (x\tau_x)_{/x} + (x\tau_y)_{/y} = \tau_x + x\tau_{x/x} + x\tau_{y/y} = \tau_x + x \operatorname{div} \tau, \text{ e analogamente} \\ \operatorname{div}(y\tau) &= \tau_y + y \operatorname{div} \tau \quad ; \end{aligned}$$

dai primi membri delle (17) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_A x \operatorname{div} \tau \, dA &= \int_A \operatorname{div}(x\tau) \, dA - \int_A \tau_x \, dA = \int_C x\tau \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_A \tau_x \, dA = - \int_A \tau_x \, dA \\ \int_A y \operatorname{div} \tau \, dA &= \int_A \operatorname{div}(y\tau) \, dA - \int_A \tau_y \, dA = \int_C y\tau \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_A \tau_y \, dA = - \int_A \tau_y \, dA \end{aligned} \quad , \quad (17a)$$

avendo osservato che il passaggio ad integrali di linea estesi al contorno C della sezione deriva dal teorema della divergenza, e che questi integrali di linea sono identicamente nulli, perché è identicamente nulla la funzione integranda per la seconda delle (16).

Dai secondi membri, invece, poiché l'integrazione sulla sezione e la derivazione rispetto a z sono evidentemente indipendenti, si ottiene infine:

$$\begin{aligned} -\int_A x \sigma_{/z} dA &= -\frac{d}{dz} \int_A x \sigma dA = \frac{dM_y}{dz} = -T_x \\ -\int_A y \sigma_{/z} dA &= -\frac{d}{dz} \int_A y \sigma dA = -\frac{dM_x}{dz} = -T_y \end{aligned} \quad ; \quad (17b)$$

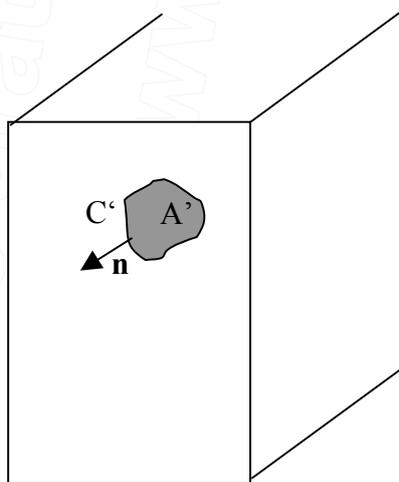
tenendo conto delle (17a) e (17b) nella (17) si dimostra l'assunto.

Al contrario, l'ultima delle (2), e cioè l'equivalenza del momento torcente, non è identicamente soddisfatta e, come si vedrà nel seguito, dovrà essere aggiunta alle equazioni di equilibrio (16). La soluzione del problema della determinazione degli sforzi tangenziali col metodo delle forze richiede, oltre alle equazioni di equilibrio, anche le equazioni di congruenza. Come si vedrà al successivo, questo problema può essere risolto più agevolmente col metodo degli spostamenti.

Equazioni dei flussi sorgenti

Si osservi che la seconda delle (3) o l'equivalente prima delle (16) è la terza equazione indefinita di equilibrio, che esprime l'equilibrio di un elemento di volume infinitesimo nella direzione dell'asse z , sotto la sola ipotesi che sia nulla la componente F_z della forza di volume.

Si consideri una linea chiusa C' sulla sezione e si integrino ambo i membri della prima delle (16) sull'area A' racchiusa dal contorno C' (figura 6). Si ha:



$$\int_{A'} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\int_{A'} \sigma_{/z} dA \quad \text{da cui, per il teorema della divergenza e perché}$$

la derivazione parziale rispetto a z e l'integrazione sul piano della sezione sono indipendenti,

$$\int_{C'} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dC = -\frac{d}{dz} \int_{A'} \sigma dA \quad . \quad (18)$$

Diciamo

$$\varphi = \int_{C'} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dC \quad (19)$$

il flusso del vettore $\boldsymbol{\tau}$ uscente dalla linea C' , e

$$N = \int_{A'} \sigma \, dA \quad (20)$$

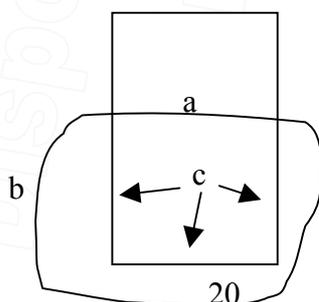
la risultante degli sforzi normali agenti sulla superficie A' , l'equazione (19) si pone nella forma

$$\varphi = -\frac{dN}{dz} \quad (21)$$

Si riconosce facilmente che la (21) è l'equazione di equilibrio, alla traslazione in direzione z , di una fettina di trave di spessore evanescente dz delimitata da due facce A' (figura 7), che richiede che la somma delle forze agenti in direzione z sulle due facce e sul contorno laterale della fettina sia nulla. La componente in direzione z dello sforzo che agisce sulla faccia posteriore, di ascissa z , vale evidentemente $-\int_{A'} \sigma \, dA = -N$, mentre quella sulla faccia anteriore, di ascissa $z + dz$, vale $N + dN$; per la simmetria del tensore degli sforzi, la componente secondo z dello sforzo tangenziale che agisce sulla superficie laterale della fettina è $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$, che integrata sulla superficie di contorno dà: $\int_{C'} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, dC \, dz = \varphi \, dz$. Uguagliando a zero la somma di queste tre forze e dividendo per dz si ottiene la (21), come si voleva dimostrare.

È qui opportuno osservare che se si sceglie come linea C' il contorno C della sezione la (21) si riduce ad una identità. Infatti il flusso φ a primo membro è identicamente nullo perché, per la seconda delle (16), lungo C è ovunque nulla la funzione integranda nel secondo membro della (19); il secondo membro invece è identicamente nullo, perché in questo caso $N = T_z$ e l'azione assiale T_z è costante lungo z .

Si considerino inoltre le linee chiuse indicate con ac e con ab nella figura 8, dove a è un tratto interno alla sezione, b è un tratto esterno e c è un tratto di contorno (indicato dalle frecce). Il flusso φ uscente da ac e quello uscente da ab sono evidentemente uguali dato che il flusso uscente dal tratto c è nullo per la seconda delle (16), come è nullo il flusso uscente da b , perché b non contorna punti materiali. Analogamente la forza N risultante delle σ agenti sulla superficie racchiusa dalla linea ab è uguale a quella relativa alla superficie racchiusa dalla linea ac , dato che la differenza fra le due superfici non contiene punti materiali. Ne segue che la relazione (21) e la conseguente (22) sono ugualmente valide se la linea chiusa C' è in parte esterna alla sezione, come per esempio le linee f e g della figura 8.



Il primo membro dell'equazione (21) rappresenta il flusso del vettore τ uscente dalla linea C' . Nell'*analogia idraulica*, della quale si dirà nel paragrafo seguente, tale flusso si immagina essere prodotto da sorgenti situate entro l'area A' : per questo chiameremo l'equazione (21) *prima forma della equazione dei flussi sorgenti*.

Nelle zone della trave lontane dagli estremi, dove per lo sforzo normale σ vale la soluzione centrale, sostituendo l'espressione (9) nella (21), tenendo conto della terza e della quarta delle (2) e delle () del capitolo 3, si ottiene la seguente *seconda forma* della equazione dei flussi sorgenti:

$$\varphi = -T_y \frac{S'_x}{J_x} - T_x \frac{S'_y}{J_y} \quad , \quad (22)$$

ove S'_x ed S'_y sono i momenti statici dell'area A' rispettivamente rispetto agli assi x ed y . Si ricordi che la seconda forma (22) vale solo nella zona centrale della trave, mentre la prima forma (21) vale anche nelle zone di estremità.

Analogia idraulica

Nel caso di sola torsione, nella parte centrale della trave l'equazione (22) si riduce a $\varphi = 0$, che insieme all'equazione al contorno, permette di stabilire la seguente *analogia idraulica della torsione*. In base ad essa il campo del vettore τ è in analogia con il campo bidimensionale della velocità di uno strato, di altezza uniforme, di un liquido incomprimibile che circola entro una vasca che ha per fondo il piano della sezione. In questo caso l'equazione dei flussi sorgenti dice solo che il flusso uscente da qualsiasi linea chiusa è nullo: l'entità della circolazione del fluido è determinata dall'equivalenza con il momento torcente.

Nelle zone di estremità la prima forma (21) dell'equazione dei flussi sorgenti è sempre valida, ma non è vero che nel caso di sola torsione sia ovunque $\varphi = 0$.

Nel caso che sia presente anche taglio, l'analogia può essere estesa, pensando che il flusso uscente φ sia prodotto da sorgenti se positivo, o inghiottito da pozzi se negativo; i pozzi e le sorgenti sono distribuite sul fondo della vasca.

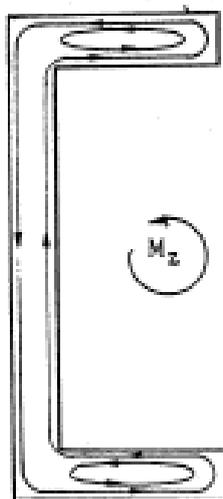
Sostituendo la (9) nella prima delle (16) si ottiene la relazione

$$\operatorname{div} \tau = -T_y \frac{y}{J_x} - T_x \frac{x}{J_y} \quad ; \quad (23)$$

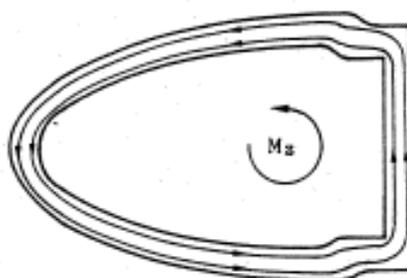
Il secondo membro della (23) può essere interpretato come l'intensità, cioè la portata per unità di superficie, dei pozzi distribuiti sulla sezione.

L'analogia idraulica, anche senza essere ulteriormente approfondita, ci permette di fare alcune considerazioni qualitative sulle linee di flusso del vettore τ , che possono portare a qualche conclusione interessante.

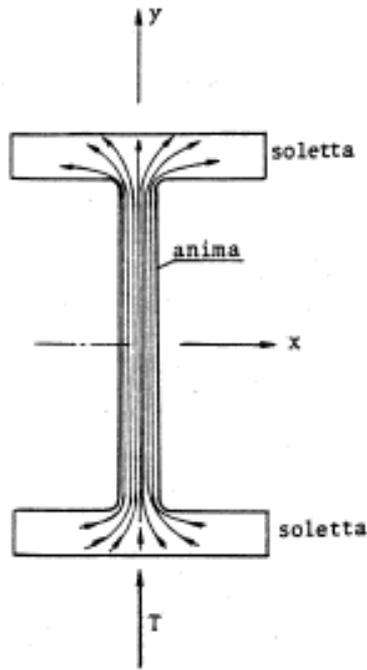
Per esempio, in una trave a parete sottile soggetta a torsione, se la sezione è aperta (figura 9),
 entro l'esiguo spessore della parete si deve verificare una circolazione a doppio senso. Perciò gli sforzi tangenziali costituiscono coppie con bracci molto piccoli, e quindi elevati valori di sforzo producono momenti molto piccoli: la sezione è molto poco efficiente e la rigidezza torsionale molto bassa.



Al contrario, in una sezione a parete sottile chiusa (figura 10), gli sforzi tangenziali possono circolare percorrendo la parete in un solo senso; i bracci delle coppie sono dell'ordine del diametro della sezione, l'efficienza e la rigidezza torsionale sono molto superiori. La rigidezza torsionale di una trave a sezione aperta è tanto piccola, rispetto a quella di una sezione chiusa di pari dimensione, da poter essere considerata nulla.



Nel caso di una sollecitazione di taglio, per esempio nella sezione a I della figura 11, le linee di flusso di τ nascono principalmente dalle sorgenti nella soletta inferiore e finiscono nei pozzi della soletta superiore. I pozzi e le sorgenti dell'anima hanno portata molto piccola rispetto a quelli delle solette, sia per l'esiguo spessore che per le modeste distanze dall'asse x , che riducono molto l'entità dei momenti statici. Il flusso attraversa l'anima con linee sostanzialmente parallele al contorno e con portata sostanzialmente costante. Risulta anche evidente che il contributo dello sforzo tangenziale delle solette al risultante T_y è trascurabile rispetto a quello dell'anima.



Disponibile gratuitamente all'indirizzo www.aero.polimi.it

CALCOLO STATICO DI UNA STRUTTURA AERONAUTICA

Il calcolo statico ha sostanzialmente lo scopo di accertare o verificare il comportamento di una struttura aeronautica soggetta ad una assegnata distribuzione di forze che si ritengono applicate staticamente.

Tali forze sono principalmente:

- a) forze aerodinamiche, distribuite sulla superficie esterna del velivolo;
- b) forze di massa, cioè forze dovute alla massa delle varie parti del velivolo e di tutto ciò che il velivolo trasporta: tali sono i pesi e le forze d'inerzia;
- c) spinte degli apparati propulsori;
- d) differenze di pressione fra l'interno e l'esterno di una cabina o di un altro compartimento pressurizzato;
- e) reazioni del terreno sugli organi di atterraggio, evidentemente solo nelle fasi in cui il velivolo è in contatto col terreno;
- f) altre forze di natura particolare, come la trazione applicata al gancio di traino di un aliante o altre.

E' quindi evidente che ogni calcolo statico deve essere preceduto dalla determinazione delle forze agenti e che l'accuratezza con la quale si valutano i carichi influenza in modo determinante (sia in senso positivo che negativo) l'accuratezza del risultato finale della verifica statica.

Il corso di Strutture Aeronautiche non si occupa della determinazione dei carichi, i quali quindi vengono assunti come noti, nel senso che sono già stati determinati con calcoli precedenti.

In alcuni casi le deformazioni dovute ai carichi sono tali da fare variare in modo apprezzabile la distribuzione delle forze aerodinamiche. Si pensi per esempio all'effetto della deformazione torsionale dell'ala: essa provoca variazioni di incidenza aerodinamica le quali, specie se la velocità di volo è elevata, possono alterare sensibilmente la distribuzione della portanza e del momento.

Questi fenomeni, nei quali si ha una profonda interazione fra il comportamento aerodinamico e quello strutturale, possono avere notevole importanza, ed in alcuni casi essere particolarmente pericolosi, specialmente alle più alte velocità di volo. Vengono normalmente denominati fenomeni aeroelastici, ed aeroelasticità il loro studio.

Nel calcolo statico propriamente detto, le forze sono considerate note. Inoltre dovremo ritenere che sia nota anche la struttura in tutti i suoi dettagli.

In effetti nelle prime fasi del progetto di un velivolo la struttura non può essere nota in tutti i suoi dettagli infatti il progetto della struttura consiste proprio nel determinare, e nel dettagliare attraverso successivi affinamenti, la struttura ottimale, cioè la struttura che costituisce il miglior compromesso fra le esigenze di basso peso, costo limitato, durata, affidabilità, ecc., che soddisfa i requisiti².

Per questo nelle prime fasi del progetto è opportuno impiegare schemi di calcolo il più possibile semplici e isostatici; semplici perché consentano di eseguire rapidamente i numerosi calcoli che possono essere necessari alla ricerca della struttura migliore, senza d'altronde richiedere la precisazione di troppi dettagli; se è possibile anche isostatici perché consentano di determinare le sollecitazioni in una parte della struttura, o addirittura in un elemento di questa, indipendentemente dalla definizione e dalla scelta della struttura circostante, e quindi di dimensionare o verificare, entro certi limiti, indipendentemente, le varie parti della struttura.

Nelle fasi più avanzate del progetto si dovranno e si potranno invece impiegare schemi di calcolo via via più raffinati e più dettagliati, che tengano conto in modo più realistico delle interazioni iperstatiche fra le varie parti della struttura.

² I requisiti sono principalmente requisiti di resistenza e di rigidità, questi ultimi determinati soprattutto da motivi aeroelastici.

Osserviamo infine che anche i carichi agenti sulla struttura, in generale, potranno essere determinati con accuratezza via via crescente all'avanzare del progetto. Inoltre le condizioni di carico per le quali si deve eseguire il calcolo sono più di una, corrispondenti a situazioni diverse; quindi quando si parla di calcolo strutturale conviene fin da ora intendere il calcolo della stessa struttura con diverse condizioni di carico.

Schema semplice a travi

Lo schema più semplice con il quale si può rappresentare la struttura di un velivolo è quello nel quale le sue parti principali, e cioè l'ala, la fusoliera e gli impennaggi vengono considerati travi

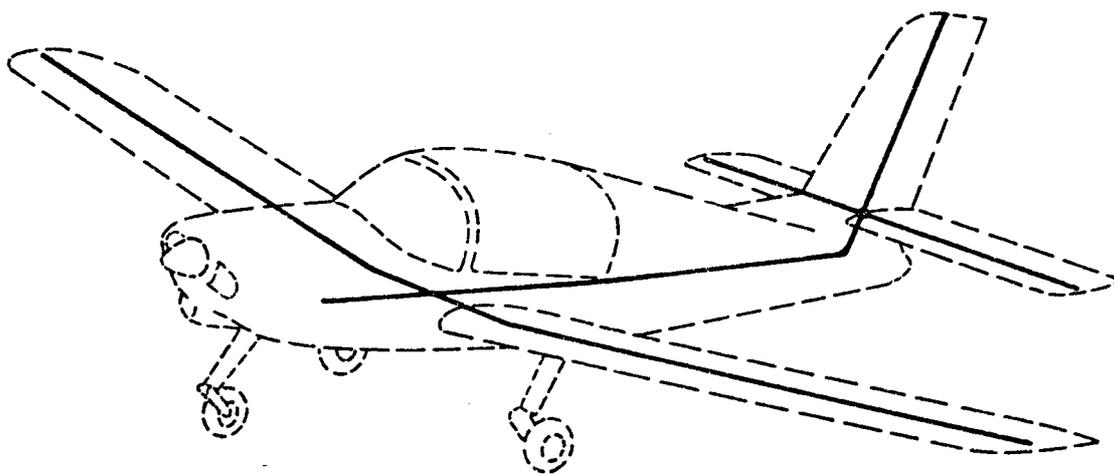


Fig. 1

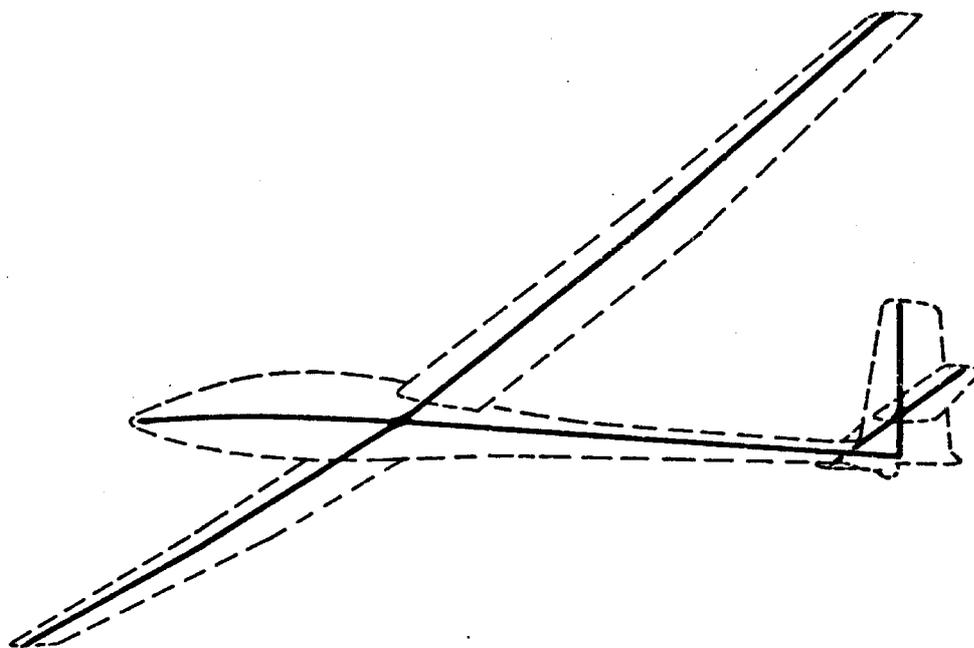
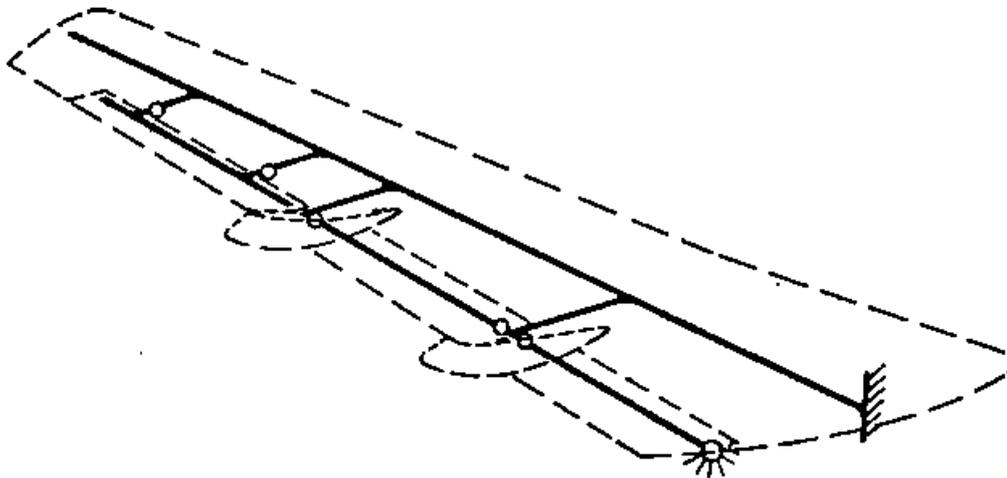


Fig. 2

Anche le superfici mobili e cioè gli alettoni, gli ipersostentatori, l'equilibratore ed il timone possono essere visti come travi, collegate alle corrispondenti superfici fisse attraverso le cerniere (o le guide) e gli organi di comando (figura 2).



Questo procedimento ha i vantaggi ed i limiti del modello che abbiamo chiamato “trave”, che sono principalmente:

-Si possono calcolare gli sforzi in una sezione della trave conoscendo le azioni interne in quella sezione, ed ignorando completamente la situazione delle sezioni vicine.

Con schemi isostatici del tipo di quelli indicati nelle figure 1 e 2 le azioni interne possono essere valutate direttamente conoscendo i carichi, prima di sapere come sono fatte le travi. Ciò richiede che si possano individuare degli assi, più o meno convenzionali delle travi stesse, e quindi delle sezioni normali all'asse.

-Il modello di trave non permette, in generale, di calcolare gli sforzi con sufficiente attendibilità in prossimità delle zone di vincolo, di brusca variazione di sezione, di brusca variazione dell'orientazione dell'asse, o di applicazione di forti carichi concentrati. Esempi di tali zone, particolarmente importanti perchè soggette a forti sollecitazioni, sono le zone di attacco fra l'ala e la fusoliera (zona di vincolo), e le parti che contengono grandi aperture (brusche variazioni di sezione), quali il vano carrello e le porte di un velivolo da trasporto.

Una situazione ancora più difficile è quella della zona di in castro di un'ala a freccia, nella quale oltre al vincolo si ha una brusca variazione dell'orientazione dell'asse.

-Il modello di trave non può essere impiegato, neppure in prima approssimazione, per quelle parti che per il loro basso allungamento non possono in alcun modo essere viste come travi, e che tuttavia spesso sono parti fondamentali della struttura, come ad esempio le ali dei velivoli molto veloci.

Nonostante i suoi limiti lo schema a travi viene quasi sempre impiegato (quando è applicabile), almeno nelle prime fasi del progetto; quando gli allungamenti sono sufficienti esso fornisce una approssimazione adeguata dello stato di sforzo, escludendo naturalmente quelle zone in cui non è applicabile.

Cenni alla tipologia delle travi aerodinamiche

Quando le velocità di volo erano molto inferiori a quelle attuali la struttura tipica dell'ala era costituita da una o più travi longitudinali delle longheroni. I longheroni sostenevano degli elementi

trasversali detti centine che avevano principalmente lo scopo di tenere il rivestimento (di solito in tela) mantenendo la forma del profilo, e trasferendo i carichi longitudinali dal rivestimento ai longheroni.

Nonostante i suoi limiti lo schema a travi viene quasi sempre impiegato (quando è applicabile), almeno nelle prime fasi del progetto; quando gli allungamenti sono sufficienti esso fornisce una approssimazione adeguata dello stato di sforzo, escludendo naturalmente quelle zone in cui non è applicabile.

I longheroni, spesso realizzati in legno (successivamente in metallo) erano costituiti da solette collegate da una o più anime (talvolta, per i longheroni di maggiori dimensioni, le anime erano sostituite da tralicci).

Una struttura di questo tipo non presenta una grande rigidità torsionale, la quale deriva soltanto dalla flessione differenziale dei longheroni.

La rigidità flessionale (e anche quella torsionale) veniva aumentata considerevolmente mediante la controventatura esterna, che poteva essere particolarmente efficace nelle cellule biplane o multiplane. Spesso si aggiungeva anche una controventatura interna per aumentare la rigidità flessionale nel piano alare.

Il progressivo aumento delle velocità di volo da una parte ha richiesto l'eliminazione della controventatura esterna per ridurre le resistenze parassite, e dall'altra ha posto l'esigenza di rigidità torsionali sempre più elevate (per motivi aeroelastici). Inoltre l'ottenimento di velocità maggiori richiedeva anche un rivestimento sempre più rigido localmente, dovendosi sempre più limitare le alterazioni dei profili dovute alle deformazioni locali del rivestimento soggetto a pressioni sempre più elevate (poiché il carico alare è cresciuto insieme alla velocità di volo).

E' naturale quindi che il rivestimento sia stato gradualmente integrato nella struttura, impiegando rivestimenti rigidi, dapprima solo nella parte anteriore dell'ala e con funzione eminentemente torsionale, e poi su tutta l'ala. In questo modo il rivestimento ha finito per costituire la parte preponderante del peso dell'ala, ed è diventato necessario farlo collaborare anche alla resistenza ed alla rigidità torsionale, distribuendo in un maggior numero di solette o correnti le aree resistenti a sforzo normale, allo scopo di irrigidire i pannelli ed aumentarne la stabilità (cioè il carico critico). Con lo stesso scopo si ricorre anche all'impiego di pannelli integrali ottenuti per la fresatura e a pannelli a "sandwich", costituiti da due fogli relativamente sottili di lamiera fra i quali è interposto uno strato relativamente spesso di materiale a bassa densità (resina espansa o nido d'ape).

Le travi longitudinali costituite dalle anime interne e dalle corrispondenti solette continuano a chiamarsi longheroni, anche se non hanno esattamente la funzione dei longheroni delle ali con il rivestimento non collaborante. Anche i diaframmi (centine), nelle strutture attuali, hanno una funzione che non è più solo quella di mantenere la forma del profilo, e della quale ci occuperemo nel capitolo che segue.

Le strutture degli impennaggi e delle superfici mobili hanno avuto una evoluzione simile a quelle dell'ala.

Per quanto riguarda le fusoliere si è passati dalle strutture a traliccio, che ancora oggi sono impiegate per alcuni velivoli dell'Aviazione Generale, a strutture con rivestimento collaborante, delle quali cioè gli elementi fondamentali sono il rivestimento, i correnti longitudinali ed i diaframmi che, nel caso della fusoliera, si dicono ordinate.

La forma circolare della sezione delle fusoliere dei velivoli da trasporto deriva dalla esigenza di sopportare le sollecitazioni derivanti dalla pressurizzazione, le quali in genere raggiungono livelli abbastanza elevati.

Quindi la "trave" tipica delle strutture aeronautiche attuali (ala, fusoliera, impennaggio o superficie mobile) è la trave a guscio, la quale è sostanzialmente costituita dal rivestimento, irrigidito da correnti o solette longitudinali che hanno la funzione di sopportare una parte considerevole dello sforzo normale, e da diaframmi i quali, come vedremo, hanno principalmente la funzione di introdurre i carichi nella trave, oltre naturalmente quella di mantenere la forma della sezione.

Anche le strutture di basso allungamento, come ad esempio le ali a delta, le quali non possono

essere considerate travi, sono costituite da un rivestimento con correnti che lavorano essenzialmente a sforzo normale e da diaframmi. Continuiamo a chiamare longheroni i diaframmi disposti nella direzione della apertura e centine quelli nella direzione della corda, anche se le funzioni ed il modo di lavorare di questi non è così nettamente individuabile come nel caso della ‘trave’.

LA TRAVE IN PARETE MOLTO SOTTILE DIAFRAMMATA

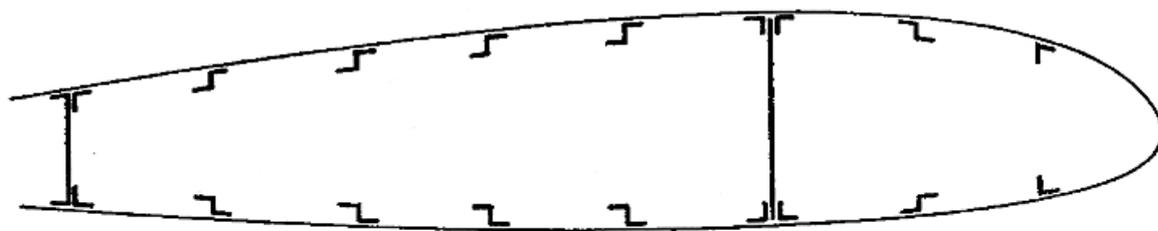
Come si è visto al precedente capitolo, le parti principali delle strutture aerospaziali sono spesso sufficientemente allungate e poco rastremate, tanto da poter essere considerate *travi*. Tali sono certamente l’ala e la fusoliera degli aeroplani da trasporto, i piani di coda, la maggior parte delle superfici di controllo, la fusoliera di molti aeroplani da combattimento, la trave di coda di molti elicotteri, il corpo principale dei lanciatori spaziali, ed altre. L’ala degli aeroplani supersonici, invece, non ha in genere allungamento sufficiente per essere considerata una trave, e perciò viene trattata fin dall’inizio con schemi tridimensionali, fra i quali principalmente gli schemi ad Elementi Finiti, dei quali si dirà.

Quando è applicabile, il modello trave offre evidenti vantaggi. Nelle prime fasi del progetto consente dimensionamenti *locali*, cioè dimensionamenti sulla sezione che tengono conto solo delle azioni interne in quella stessa sezione. Nelle fasi successive permette comunque analisi abbastanza dettagliate e precise. Analisi di maggiore dettaglio e precisione vengono eseguite solo nelle verifiche finali, mediante metodi ad Elementi Finiti. Va tuttavia osservato che le analisi ad Elementi Finiti, per essere più accurate in termini di sforzo di quelle ottenibili con gli schemi di trave, *a guscio* o *a semiguscio*, devono impiegare schemi di grande dettaglio, e perciò sono scarsamente impiegabili nella prima parte dell’attività di progetto, quando molti dettagli sono ancora in via di definizione.

Dal punto di vista didattico l’impiego del modello trave, a guscio e a semiguscio, ha un grandissimo valore, perché permette una comprensione semplice e fisicamente corretta della funzione dei vari elementi strutturali e degli stati di sforzo tipici delle condizioni e delle zone più significative.

La morfologia dei componenti strutturali aerospaziali assimilabili a travi è diversa da quella delle *travi a parete sottile* dell’ingegneria civile, e ciò in gran parte per il più elevato rapporto diametro/spessore, che è generalmente superiore a 1000, e spesso raggiunge anche valori maggiori.

Per questo parliamo di travi a parete molto sottile.



Sezione tipica

Ipotesi e componenti

Come è stato illustrato nel capitolo 3, la struttura di un componente allungato, ala, fusoliera o assimilabile, è costituita essenzialmente dal fasciame, cioè da un involucro o rivestimento, irrigidito da una ossatura di rinforzo, costituita per lo più da elementi longitudinali e da elementi trasversali. I *pannelli* sono le parti del rivestimento delimitate dagli irrigidimenti.

Il rivestimento sopporta tutta la torsione ed il taglio, ed una parte significativa della flessione. I *correnti*, elementi di irrigidimento longitudinali, contribuiscono direttamente alla flessione e non danno contributo apprezzabile né alla torsione né al taglio; la loro funzione di irrigidimento consiste nell'aumentare la rigidità flessionale locale in modo che l'insieme pannello-corrente sia in grado di sopportare efficacemente sforzi di compressione.

I *diaframmi*, centine e ordinate, sono gli elementi trasversali. Senza diaframmi la struttura sarebbe di fatto labile, nel senso che non sarebbe in grado di mantenere la forma della sezione, data la notevole esilità dei correnti ed il piccolo spessore dei pannelli.

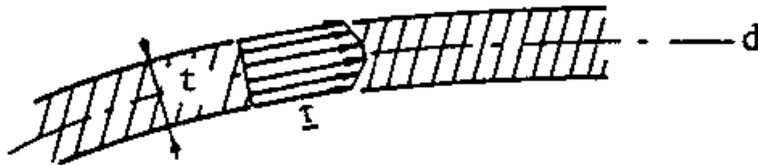
In realtà, poiché la struttura ha anche funzioni aerodinamiche, la forma della sezione deve essere mantenuta entro tolleranze spesso relativamente strette.

Ai tre componenti fondamentali delle strutture aerospaziali assimilabili a travi, cioè ai pannelli, ai correnti ed ai diaframmi; si aggiungono le *giunzioni*, le quali si sviluppano secondo linee, che possono essere longitudinali o trasversali. Le giunzioni non sono elementi fondamentali, in quanto potrebbero mancare in una ipotetica struttura monolitica, ma sono necessarie, dato che una struttura monolitica non è in genere realizzabile. Le principali giunzioni a sviluppo longitudinale sono quelle fra pannelli e correnti, mentre le principali giunzioni a sviluppo trasversale sono quelle fra pannelli e diaframmi. Vi sono poi giunzioni fra pannelli e pannelli, che possono essere sia longitudinali che trasversali, che in genere sono richieste dai limiti tecnologici delle dimensioni massime dei pannelli, e consentono agevoli variazioni di spessore dei pannelli stessi.

Si fanno poi delle ipotesi, peraltro molto vicine alla realtà, che permettono di semplificare sensibilmente gli sviluppi analitici. Le ipotesi sono:

1. i pannelli sono sottili;
2. i correnti sono esili;
3. i diaframmi sono molto ravvicinati e rigidi nel loro piano.

Nell'ottica dell'analogia idraulica, il pannello costituisce un canale molto stretto nel quale il vettore τ scorre con portata q . Poiché lo spessore del pannello è molto piccolo (ipotesi 1) le linee di flusso sono ovunque sensibilmente parallele alle pareti (figura seg.), quindi la direzione del vettore τ è sensibilmente costante lungo lo spessore; anche il modulo di τ varia molto poco lungo lo spessore. Questo esclude il caso della torsione di una sezione aperta, che, come si vedrà, non è significativo per la scarsissima efficienza. La portata q è un vettore che giace nel piano della sezione, con ottima approssimazione tangente alla linea media (rispetto allo spessore) del pannello, con modulo q uguale al valor medio $\bar{\tau}$ (rispetto allo spessore) del modulo di τ moltiplicato per lo spessore t del pannello. La grandezza scalare q si chiama flusso di taglio: ha le dimensioni di uno sforzo moltiplicato per una lunghezza, cioè di una forza diviso una lunghezza. Nelle unità adottate si misura in N/mm.



L'ipotesi 2 significa che le dimensioni trasversali delle sezioni dei correnti sono molto piccole rispetto a quelle di tutta la sezione. Ne segue che il contributo ai momenti di inerzia della sezione dei momenti di inerzia propri dei correnti (rispetto al proprio baricentro) è trascurabile. Inoltre gli sforzi tangenziali dei correnti non contribuiscono in modo significativo al taglio né al momento torcente.

L'ipotesi 3 significa che, a causa dei diaframmi, ogni sezione mantiene sensibilmente la sua forma nel piano normale all'asse (cioè nel piano della sezione). I diaframmi di fatto devono essere abbastanza rigidi nel loro piano ed abbastanza vicini fra di loro da assicurare questo risultato, se non altro per garantire le prestazioni aerodinamiche. Viceversa i diaframmi sono molto poco rigidi fuori dal loro piano, tanto da non opporre apprezzabile resistenza all'*ingobbamento*, cioè alla deformazione delle sezioni fuori dal loro piano. Questo è in contrasto con quanto visto per la trave di De Saint Venant in cui la sezione si manteneva piana ma cambiava forma.

Schema a guscio

Dalle ipotesi fin qui poste deriva direttamente lo *schema a guscio*, i cui elementi componenti sono:

- i pannelli
- i correnti
- i diaframmi
- le giunzioni

Lo schema a guscio è sostanzialmente uno schema della sezione. In esso ogni pannello viene rappresentato da una linea, coincidente con la linea media dello spessore, alla quale si associa uno spessore t , in genere ritenuto costante lungo la linea. Lo sforzo nel pannello è costituito dal flusso di taglio $q = \tau t$ e dal flusso di sforzo normale $p = \sigma t$, entrambi forze per unità di lunghezza. Ogni corrente è rappresentata da un punto, coincidente con il baricentro dell'area del corrente stesso, al quale si associa un'area A . Lo sforzo nel corrente è solo una azione assiale $N = \sigma A$, prodotto dello sforzo assiale per l'area del corrente.

Questo schema realizza le ipotesi di pannelli sottili e di correnti esili, trascurando la variazione di sforzo lungo lo spessore del pannello e sull'area del corrente; inoltre trascura completamente lo sforzo di taglio del corrente. Dei diaframmi e delle giunzioni si dirà più avanti, nei paragrafi che trattano dello schema a semiguscio.

Lo schema della sezione è quindi costituito da linee definite nel piano xy , a ciascuna delle quali è associato uno spessore, e da punti, a ciascuno dei quali sono associate le coordinate x e y e l'area.