CAPITOLO 3

Cenni di dinamica del corpo rigido nello spazio

3.1 Introduzione

Al fine di introdurre la dinamica di un corpo rigido nello spazio, si consideri un primo esempio in cui un corpo rigido sia dotato di moto rotatorio attorno ad un asse. Siano ω e $\dot{\omega}$ rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare imposte

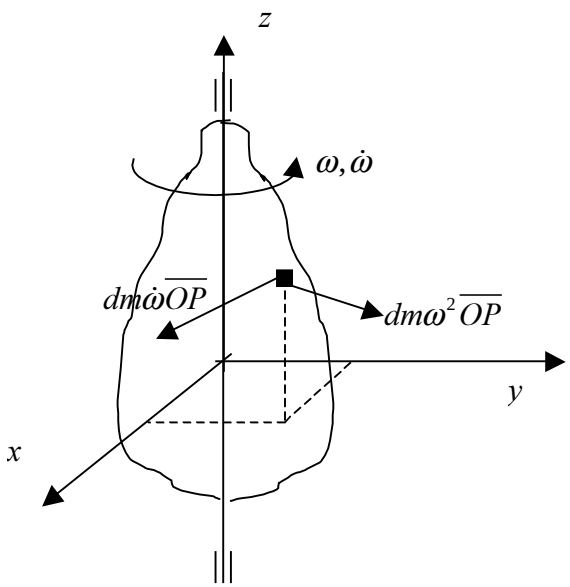

Figura 1 - Corpo rigido in moto rotatorio

Si supponga che il corpo rigido sia in rotazione intorno all'asse *z* e si assumano gli assi *x* e *y* solidali al corpo rigido (e quindi anch'essi in rotazione). Il generico punto P di massa *dm* ha distanza dall'asse di rotazione pari a $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ e una generica quota *z* non trascurabile. Bisogna quindi considerare, oltre al momento intorno all'asse *z*, anche i due momenti intorno all'asse *x* e *y*: è così possibile scomporre la generica forza d'inerzia elementare nelle componenti parallele ai due assi *x* e *y*.

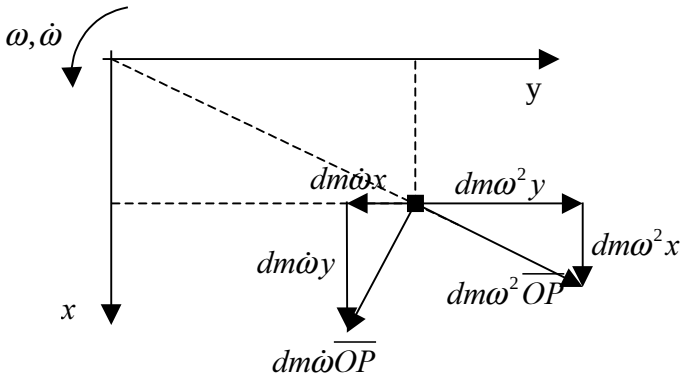

Figura 2 – Momento delle forze d'inerzia

Calcoliamo così i momenti delle forze d'inerzia rispetto ai tre assi coordinati:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} C_x = \int_V dm\dot{\omega}xz - \int_V dm\omega^2 yz = I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2 \\ C_y = \int_V dm\dot{\omega}yz + \int_V dm\omega^2 xz = I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 \\ C_z = -\int_V dm\dot{\omega}R^2 = -I_{zz}\dot{\omega} \end{cases}$$

dove I_{xz} e I_{yz} sono i momenti centrifughi.
Nel caso in cui la velocità angolare ω sia costante le (3.1) diventano:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} C_x = -I_{yz}\omega^2 \\ C_y = I_{xz}\omega^2 \\ C_z = 0 \end{cases}$$

che mostrano come, a differenza del caso del corpo rigido di spessore trascurabile, qualora l'asse di rotazione non sia un asse principale d'inerzia per effetto dei

momenti centrifughi nasca una coppia, di componenti C_x e C_y da equilibrare anche se la velocità angolare è costante.

Questo esempio suggerisce come sia necessario un approccio sistematico per la scrittura delle equazioni di moto di sistemi più complessi quali, in generale, quelli costituiti da insiemi di corpi che si muovono in uno spazio tridimensionale.

3.2 Dinamica del corpo rigido nello spazio

Al fine di fornire un strumento per la valutazione della dinamica del corpo rigido, che permetta di passare in modo generale alla dinamica nello spazio, si vogliono fornire alcune considerazioni alla base dell'analisi dinamica di sistemi multi corpo nello spazio.

Per definire la cinematica di un corpo rigido, si può fare riferimento ai moti relativi ovvero definire la velocità del generico punto P appartenente al corpo come:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{3.3}$$

dove $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare del corpo rigido e $\vec{r}$ è il generico vettore posizione (*P – O*). Si ricorda che, per la definizione di corpo rigido, il vettore posizione $\vec{r}$ non varia in modulo, per cui la sua derivata rispetto al tempo è legata alla sola variazione di direzione, che secondo le relazioni di Poisson risulta essere pari a:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{3.4}$$

L'accelerazione del punto P, ottenuta per derivazione dal vettore velocità, sarà allora data da:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) \tag{3.5}$$

L'algebra vettoriale male si presta ad applicazioni nello spazio e in generale a sistemi con più corpi rigidi per cui spesso si fa riferimento all'approccio matriciale, utilizzato anche dai codici di calcolo numerico. Tale notazione sostituisce l'algebra vettoriale con l'algebra matriciale.

La posizione di un punto *A* nello spazio è identificabile mediante un vettore le cui componenti sono spesso le sue coordinate, che possono venire organizzate in una forma matriciale. E' infatti possibile passare da un vettore nella forma:

(3.6) $$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}$$

alla forma matriciale alternativa:

(3.7) $$[a\wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e b, indicato come $\vec{a} \wedge b$, è un vettore di componenti:

(3.8) $$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix}$$

identico risultato al quale perveniamo con il prodotto matriciale:

(3.9) $$[a\wedge]\{b\} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix}$$

mentre il prodotto scalare $\vec{a} \times b$ è definito come

(3.10) $$\{a\}^T \{b\}$$

Questo formalismo presenta utili proprietà, tra cui le più importanti sono semplicemente la trascrizione matriciale di note relazioni vettoriali che sono in ogni caso facilmente verificabili:

(3.11) $$\{a\}^T\{b\}=\{b\}^T\{a\}$$

(3.12) $$[a\wedge]^T=-[a\wedge]$$

(3.13) $$[a\wedge]\{b\}=-[b\wedge]\{a\}$$

(3.14)
$$[a\wedge][b\wedge]=\{b\}\{a\}^T-\{b\}^T\{a\}[I]=\{b\}\{a\}^T-\{a\}^T\{b\}[I]$$

(3.15) $$[a\wedge][b\wedge]\ \{c\}+[c\wedge][a\wedge]\ \{b\}+[b\wedge][c\wedge]\ \{a\}=0$$

(3.16)
$$\left[\left([a\wedge]\{b\}\right)\wedge\right]=[a\wedge][b\wedge]-[b\wedge][a\wedge]=\ \{b\}\{a\}^T-\{a\}\{b\}^T$$

La velocità del generico punto P (3.5) facente parte del corpo rigido diventa pertanto, grazie alla (3.13):

(3.17) $$\{v_P\}=\{\dot{r}_0\}-[r\wedge]\{\omega\}$$

L'energia cinetica del corpo può essere scritta come:

(3.18)
$$T=\frac{1}{2}\int_V\rho\{v_P\}^T\{v_P\}dV=\frac{1}{2}\int_V\rho\left\{\{\dot{r}_0\}-[r\wedge]\{\omega\}\right\}^T\left\{\{\dot{r}_0\}-[r\wedge]\{\omega\}\right\}dV$$

ovvero

(3.19)
$$T=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\int_V\rho\{\dot{r}_0\}^T\{\dot{r}_0\}dV-\int_V\rho\{\omega\}^T[r\wedge]^T\{\dot{r}_0\}dV+\\-\int_V\rho\{\dot{r}_0\}^T[r\wedge]\{\omega\}dV+\int_V\rho\{\omega\}^T[r\wedge]^T[r\wedge]\{\omega\}dV\end{array}\right)$$

Definendo la matrice di massa $\lfloor M \rfloor$ come:

(3.20) $$[M]=\begin{bmatrix}m&0&0\\0&m&0\\0&0&m\end{bmatrix}\quad\left(m=\int_V\rho dV\right)$$

quella $[S]$ dei momenti statici come:

$$[S] = -\int_V \rho [r\wedge] dV = -\int_V \rho \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} dV$$

(3.21)
$$[S] = -\begin{bmatrix} 0 & -\int_V \rho z dV & \int_V \rho y dV \\ \int_V \rho z dV & 0 & -\int_V \rho x dV \\ -\int_V \rho y dV & \int_V \rho x dV & 0 \end{bmatrix}$$

e quella dei momenti d'inerzia $[J]$:

(3.22)
$$[J] = \int_V \rho [r\wedge]^T [r\wedge] dV = -\int_V \rho [r\wedge][r\wedge] dV$$

(3.23)
$$[J] = \int_V \rho \left(r^2 [I] - \{r\}\{r\}^T \right) dV$$

(3.24)
$$[J] = \int_V \rho \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} dV$$

(3.25)
$$[J] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

si ottiene che l'espressione dell'energia cinetica può essere scritta come:

(3.26)
$$T = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_0\} \\ \{\omega\} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [M] & [S] \\ [S]^T & [J] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_0\} \\ \{\omega\} \end{Bmatrix}$$

Nel caso particolare in cui il punto *O* coincida con il baricentro *G* del corpo, si nota che la matrice dei momenti statici $[S]$ è nulla per la definizione di baricentro. Infatti

$$[S] = -m\begin{bmatrix} 0 & -z_{CG} & y_{CG} \\ z_{CG} & 0 & -x_{CG} \\ -y_{CG} & x_{CG} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Per cui l'espressione dell'energia cinetica (3.26) diventa [1]:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{r}_{CG}\}^T [M]\{\dot{r}_{CG}\} + \frac{1}{2}\{\omega\}^T [J]\{\omega\} \tag{3.28}$$

ovvero il noto teorema di Koenig.
L'accelerazione del generico punto P, ottenibile per derivazione dall'espressione della velocità, è data da:

$$\{a_P\} = \{\ddot{r}_0\} - [r\wedge]\{\dot{\omega}\} - [\omega\wedge][r\wedge]\{\omega\} \tag{3.29}$$

Nota l'accelerazione del punto P, integrandola nel volume V del corpo si ottiene:

(3.30)
$$\{F_i\} = -\int_V \rho\{a_P\}\,dV = -\int_V \rho\left(\{\ddot{r}_0\} - [r\wedge]\{\dot{\omega}\} - [\omega\wedge][r\wedge]\{\omega\}\right)dV$$

[1] E' inoltre possibile definire la quantità di moto e il momento delle quantità di moto come:

$$\begin{Bmatrix}\{Q\}\\ \{\Gamma\}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}[M] & [S]\\ [S]^T & [J]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{r}_0\}\\ \{\omega\}\end{Bmatrix}$$

che se riferiti al baricentro:

$$\{Q\} = [M]\{\dot{r}_{CG}\}$$
$$\{\Gamma\} = [J_{CG}]\{\dot{\omega}\}$$

$$(3.31)\quad \{F_i\} = -\left(\int_V \rho \{\ddot{r}_0\}\, dV - \int_V \rho [r\wedge]\{\dot{\omega}\}\, dV - \int_V \rho [\omega\wedge][r\wedge]\{\omega\}\, dV \right)$$

$$(3.32)\quad \{F_i\} = -\left([M]\{\ddot{r}_0\} + [S]\{\dot{\omega}\} + [\omega\wedge][S]\{\omega\} \right)$$

Il momento rispetto a un polo generico di tutte le azioni d'inerzia risulta:

$$(3.33)\quad \{C_i\} = -\left(\int_V \rho [r\wedge]\{a_P\}\, dV \right) = -\left(\int_V \rho [r\wedge]\left(\{\ddot{r}_0\} - [r\wedge]\{\dot{\omega}\} - [\omega\wedge][r\wedge]\{\omega\} \right) dV \right)$$

Essendo:

$$[r\wedge][\omega\wedge][r\wedge]\{\omega\} = \left([\omega\wedge][r\wedge] + \left[\left([r\wedge]\{\omega\} \right) \wedge \right] \right) [r\wedge]\{\omega\}$$

$$(3.34)\quad \{C_i\} = -\int_V \rho [r\wedge]\{\ddot{r}_0\}\, dV + \int_V \rho [r\wedge][r\wedge]\{\dot{\omega}\}\, dV + \int_V \rho [\omega\wedge][r\wedge][r\wedge]\{\omega\}\, dV$$

$$(3.35)\quad \{C_i\} = -[S]^T \{\ddot{r}_0\} - [J]\{\dot{\omega}\} - [\omega\wedge][J]\{\omega\}$$

Le componenti di forze e coppie d'inerzia possono venire espresse quindi come:

$$(3.36)\quad \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{C_i\} \end{Bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} [M] & [S] \\ [S]^T & [J] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_0\} \\ \{\dot{\omega}\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [\omega\wedge][S]\{\omega\} \\ [\omega\wedge][J]\{\omega\} \end{Bmatrix} \right)$$

$$(3.37)\quad \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{C_i\} \end{Bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} [M] & [S] \\ [S]^T & [J] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \left[\left([S]\{\omega\} \right) \wedge \right] \{\omega\} \\ \left[\left([J]\{\omega\} \right) \wedge \right] \{\omega\} \end{Bmatrix} \right)$$

che se riferite al baricentro divengono:

$$(3.38)\quad \begin{aligned} \{F_i\} &= -[M]\{\ddot{r}_{CG}\} \\ \{C_i\} &= -[J]\{\dot{\omega}\} - [\omega\wedge][J]\{\omega\} = -[J]\{\dot{\omega}\} + \left[\left([J]\{\omega\} \right) \wedge \right] \{\omega\} \end{aligned}$$

Applicando quanto visto al caso piano si ottiene:

$$[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (m=\int_V \rho dV)$$

$$[S]=-\int_V \rho \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} dV$$

$$J=\int_V \rho(x^2+y^2)dV$$

per cui l'energia cinetica assume la forma:

$$T=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \{\dot{r}_0\} \\ \omega \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [M] & [S] \\ [S]^T & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{r}_0\} \\ \omega \end{Bmatrix}$$

ovvero riferendosi al baricentro

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{CG}{}^2+\dot{y}_{CG}{}^2\right)+\frac{1}{2}J_{CG}\omega^2$$

avendo indicato con x_{CG} e $\dot{y}_{CG}$ le componenti del vettore velocità del baricentro del corpo rigido. Infine, la forza e la coppia d'inerzia risultano:

$$\begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ C_i \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} [M] & [S] \\ [S]^T & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_0\} \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \left(\int_V \rho \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} dV\right)\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e se riferite al baricentro:

$$\{F_i\}=-m\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{CG} \\ \ddot{y}_{CG} \end{Bmatrix}$$

$$C_i=-J_{CG}\dot{\omega}$$

3.2.1 Applicazione a un corpo rigido con asse fisso

Si vuole ora applicare quanto visto al corpo in rotazione rispetto ad un suo asse già trattato nel paragrafo 3.1. Prendendo come riferimento un sistema cartesiano

baricentrico ma non principale d'inerzia, dalla (3.38) la coppia d'inerzia risulta come detto:

$$\{C_i\} = -[J]\{\dot{\omega}\} - [\omega\wedge][J]\{\omega\}$$

Il vettore velocità angolare assume la forma:

$$[\omega\wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e il conseguente momento delle forze d'inerzia risulta:

$$\{C_i\} = -\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

ed è facile verificare il risultato precedentemente ottenuto:

$$\{C_i\} = \begin{Bmatrix} I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2 \\ I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 \\ -I_{zz}\dot{\omega} \end{Bmatrix}$$

3.2.2 Fenomeni giroscopici

Le relazioni precedenti sono di relativamente facile uso e possono essere applicate in un qualsiasi sistema di riferimento avendo naturalmente l'accortezza di esprimere tutte le quantità nello stesso sistema. Si consideri ad esempio un corpo rigido messo in rotazione rispetto ad un suo asse *z* con velocità angolare $\dot{\Phi}$ (detta velocità di nutazione o di spin). Si ipotizzi ora di applicare un'altra rotazione al corpo rispetto ad un asse fisso perpendicolare al precedente con velocità $\dot{\Psi}$, detta di precessione. Si vogliano determinare le coppie d'inerzia che nascono.

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani baricentrico e solidale al corpo rigido, così che la matrice dei momenti d'inerzia rimanga costante nel tempo, dalla (3.38) possiamo scrivere il sistema di coppie d'inerzia come:

$$\{C_i\} = -[J]\{\dot{\omega}\} - [\omega \wedge][J]\{\omega\}$$

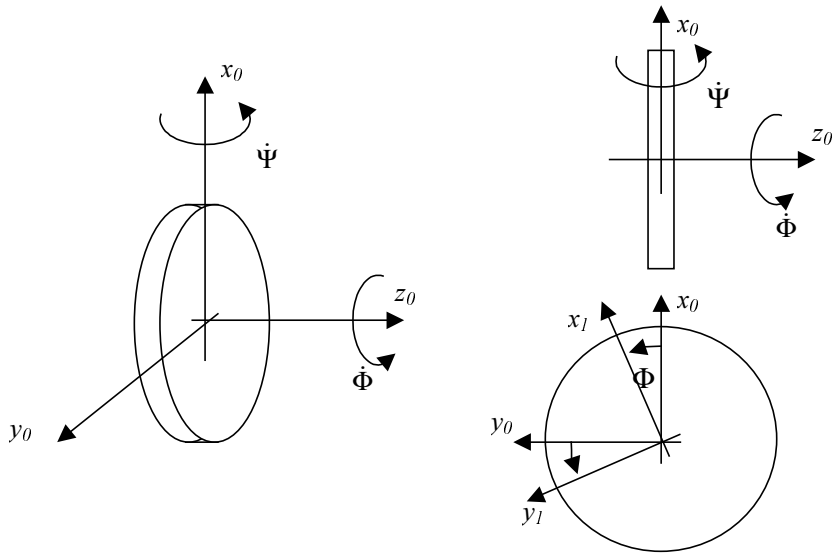

Figura 3 - Corpo rigido in moto rotatorio rispetto a due assi

Il vettore velocità angolare nel sistema di riferimento locale solidale con il corpo, quindi nella terna x_1-y_1-z_1, può essere scritto come:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\cos\Phi \\ -\dot{\Psi}\sin\Phi \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}$$

Si rilevi che è stato semplicemente calcolata la velocità angolare del corpo come somma delle due velocità associate ai due atti di moto rotatori attorno ad assi assegnati. L'operazione è chiaramente corretta essendo le velocità angolari dei vettori. E' però importante notare che, contrariamente al caso piano dove è possibile sommare anche le rotazioni, nello spazio la rotazione di un corpo è sì rappresentabile da tre rotazioni in una sequenza assegnata ma tali rotazioni non sono, in generale, le componenti di un unico vettore.

Dall'espressione della velocità, per derivazione, è possibile determinare il vettore accelerazione angolare:

$$\{\dot{\omega}\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\cos\Phi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E' in tal modo possibile valutare il sistema di coppie d'inerzia agenti sul corpo:

$$\{C_{i_1}\} = -\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\cos\Phi \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ -\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Phi} & -\dot{\Psi}\sin\Phi \\ \dot{\Phi} & 0 & -\dot{\Psi}\cos\Phi \\ \dot{\Psi}\sin\Phi & \dot{\Psi}\cos\Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\cos\Phi \\ -\dot{\Psi}\sin\Phi \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix}$$

Sviluppando i prodotti matriciali e ricordando che per corpi cilindrici a base circolare per simmetria si ha che $I_1 = I_2 = I$ momento d'inerzia rispetto ad un qualunque asse contenuto nel piano 1- 2, si ottiene:

$$\{C_{i_1}\} = \begin{Bmatrix} I_3\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\Phi \\ I_3\dot{\Psi}\dot{\Phi}\cos\Phi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Una più immediata interpretazione fisica della coppia d'inerzia si può avere proiettandola sul sistema di riferimento che segue il corpo con la sola velocità angolare $\dot{\Psi}$. Infatti mediante le relazioni:

$$\begin{Bmatrix} C_{i_{x0}} \\ C_{i_{y0}} \\ C_{i_{z0}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{i_{x1}}\cos\Phi - C_{i_{y1}}\sin\Phi \\ C_{i_{x1}}\sin\Phi + C_{i_{y1}}\cos\Phi \\ C_{i_{z1}} \end{Bmatrix}$$

si ha la più semplice:

$$\begin{Bmatrix} C_{i_{x0}} \\ C_{i_{y0}} \\ C_{i_{z0}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_3\dot{\Psi}\dot{\Phi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La coppia che nasce è detta coppia giroscopica e viene sfruttata in numerose applicazioni quali ad esempio alcuni strumenti di misura di velocità o di posizione angolari e le piattaforme inerziali. Si può, inoltre, notare che controllando la velocità $\dot{\Psi}$ di precessione è possibile variare l'intensità della coppia giroscopica permettendo l'applicazione di una coppia di controllo, anche di elevata entità, perpendicolarmente al piano $\dot{\Psi} - \dot{\Phi}$. Tale principio è utilizzato nei cosiddetti *control moment gyros (CMG)*, utilizzati per il controllo dell'assetto dei satelliti.

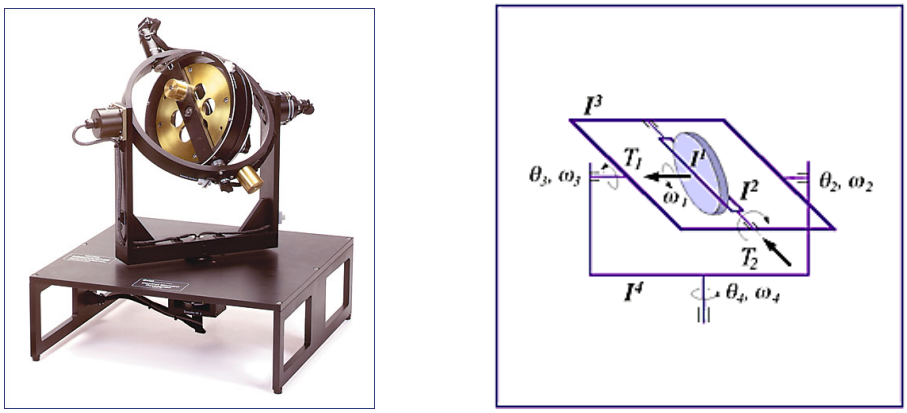

Figura 4 Un CMG della ECP: a sinistra il sistema fisico, a destra il modello fisico (ECP)

Tale coppia può essere inoltre fonte di perturbazioni e sollecitazioni strutturali significative. Si pensi ad esempio alla coppia associata al moto di un'elica e un motore che tende a imbardare in richiamata e a picchiare (o cabrare) in virata. Tale coppia provoca significative sollecitazioni al castello motore. Nel caso in cui vi sia presenza di due motori essi vengono fatti ruotare controrotanti equilibrando tali effetti sul volo ma non modificando lo stato di sollecitazioni sui castelli motore. Da non sottovalutare l'effetto di tale coppia su una motocicletta in curve strette ad alta velocità.

Alla medesima espressione si giunge, più rapidamente, attraverso quanto noto dalla Meccanica Razionale, ovvero mediante la valutazione del momento delle quantità di moto:

$$\vec{\Gamma} = I_3 \dot{\Phi} \vec{i}_{z1} + I\ \dot{\Psi} \vec{i}_{x0}$$

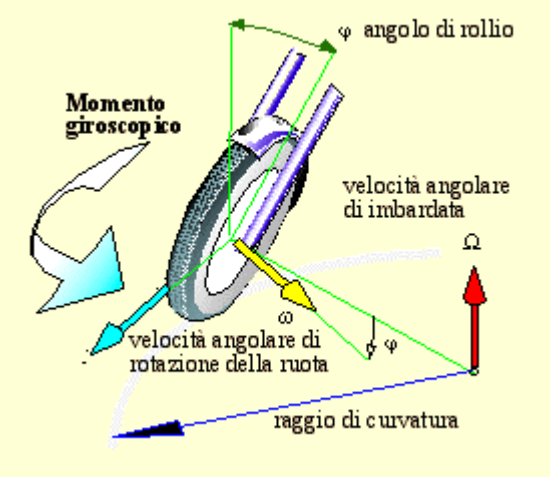

Figura 5 - L'effetto della coppia giroscopica sulla forcella ant. di motocicletta (prof. V. Cossalter)

Il momento risultante delle azioni d'inerzia di un corpo rispetto ad un punto generico nel caso in cui il punto sia fisso, si muova con velocità parallela a quella del baricentro o sia il baricentro stesso diventa:

$$\vec{C}_i = -\frac{d\vec{\Gamma}}{dt}$$

e pertanto il calcolo del momento risultante delle forze d'inerzia risulta determinato una volta definito il momento delle quantità di moto. Si ricordi che esso non è, in generale, diretto come il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ tranne del caso in cui la velocità angolare sia diretta come un asse principale d'inerzia.

Derivando ora il vettore $\vec{\Gamma}$, ricordando dalla figura 3 che una rotazione positiva Ψ porta l'asse z_0 nel verso negativo dell'asse y_0, si ottiene:

$$\vec{C}_i = -\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = -I_3\dot{\Phi}\frac{d\vec{i}_{z1}}{dt} = I_3\dot{\Phi}\dot{\Psi}\vec{i}_{y0}$$

che risulta essere la medesima espressione ottenuta in precedenza. In conclusione si è chiarito come metodi basati su un approccio matriciale possono risultare di più

complessa applicazione nei casi semplici ma risulta di più automatica implementazione nel caso di sistemi maggiormente complessi.

Anche se nella notazione a cui spesso si farà riferimento vengono meno usate, è quindi sempre opportuno ricordare le leggi di base associate alla variazione della quantità di moto e del momento delle quantità di moto, in quanto contengono la vera essenza della fisica.

3.2.3 Un esempio

Si consideri il corpo rigido di figura vincolato a ruotare attorno ad un suo asse z_1, che a sua volta è dotato di un movimento di precessione intorno all'asse y_0. Il sistema è vincolato a mantenere un'inclinazione ϑ rispetto alla verticale. Si vuole definire il sistema di coppie d'inerzia agenti sul corpo rigido.

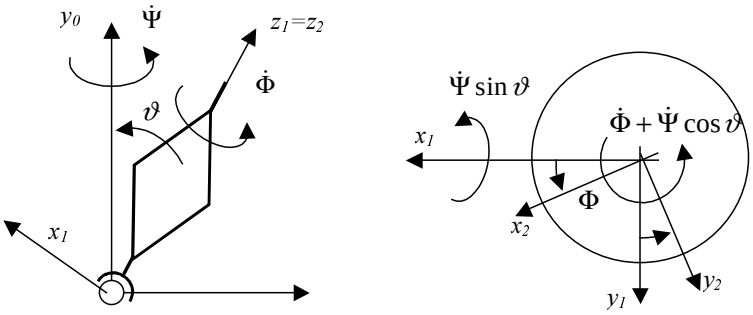

Figura 6 – Coppie giroscopiche

Il vettore velocità angolare può essere scritto proiettando le sue componenti sul sistema di riferimento solidale al corpo rigido $x_2 - y_2 - z_2$ ottenendo:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\sin\vartheta\cos\Phi \\ -\dot{\Psi}\sin\vartheta\sin\Phi \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi}\cos\vartheta \end{Bmatrix}$$

da cui, per derivazione ricordando che nell'applicazione si considerano ϑ, $\dot{\Psi}, \dot{\Phi}$ costanti, è possibile determinare il vettore accelerazione angolare:

$$\{\dot{\omega}\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\vartheta\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\vartheta\cos\Phi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E' in tal modo possibile valutare il sistema di coppie d'inerzia agenti sul corpo:

$$\{C_{i_2}\} = -\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\vartheta\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\vartheta\cos\Phi \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & -\left(\dot{\Phi}+\dot{\Psi}\cos\vartheta\right) & -\dot{\Psi}\sin\vartheta\sin\Phi \\ \dot{\Phi}+\dot{\Psi}\cos\vartheta & 0 & -\dot{\Psi}\sin\vartheta\cos\Phi \\ \dot{\Psi}\sin\vartheta\sin\Phi & \dot{\Psi}\sin\vartheta\cos\Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\sin\vartheta\cos\Phi \\ -\dot{\Psi}\sin\vartheta\sin\Phi \\ \dot{\Phi}+\dot{\Psi}\cos\vartheta \end{Bmatrix}$$

Sviluppando i prodotti matriciali e ponendo i momenti $I_1 = I_2$ per simmetria, si ottiene:

$$\{C_{i_2}\} = \begin{Bmatrix} I_3\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\vartheta\sin\Phi + \left(I_3 - I_1\right)\dot{\Psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\Phi \\ I_3\dot{\Psi}\dot{\Phi}\sin\vartheta\cos\Phi + \left(I_3 - I_1\right)\dot{\Psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\Phi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tali coppie d'inerzia vanno quindi proiettate sul sistema di riferimento che segue il corpo ruotando con velocità $\dot{\Psi}$ mediante le relazioni:

$$\begin{Bmatrix} C_{i_{x1}} \\ C_{i_{y1}} \\ C_{i_{z1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{i_{x2}}\cos\Phi - C_{i_{y2}}\sin\Phi \\ C_{i_{x2}}\sin\Phi + C_{i_{y2}}\cos\Phi \\ C_{i_{z2}} \end{Bmatrix}$$

e di conseguenza la coppia giroscopica diventa:

$$\begin{Bmatrix} C_{i_{x1}} \\ C_{i_{y1}} \\ C_{i_{z1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \left(I_3\dot{\Psi}\dot{\Phi} + \left(I_3 - I_1\right)\dot{\Psi}^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.2.4 Il giroscopio

Si consideri il corpo rigido di figura vincolato a ruotare attorno ad un suo asse z_1, con velocità angolare costante $\dot{\Phi}$, e a cui si imponga una rotazione attorno a x_0 con velocità $\dot{\Psi}$ molto minore di $\dot{\Phi}$.

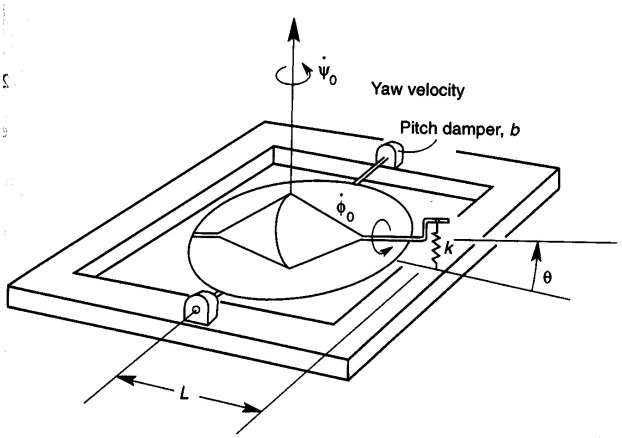

Figura 7 – Il giroscopio [Applied Dynamics – F.C,. Moon 1998]

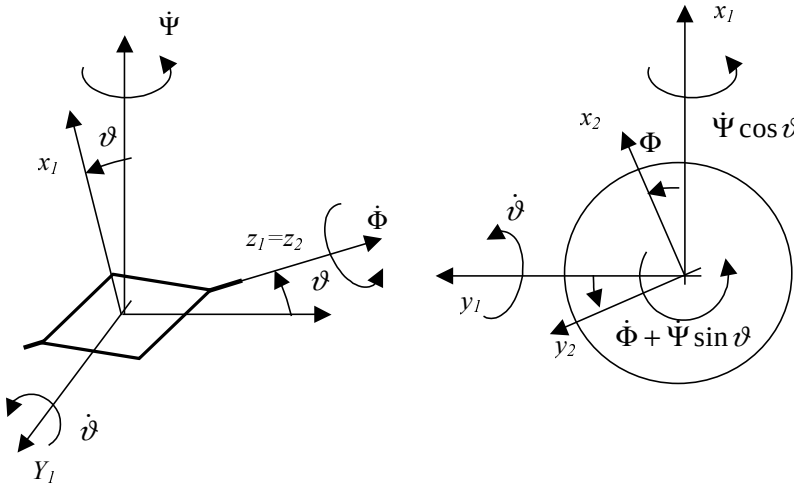

Figura 8 - Corpo rigido in moto rotatorio rispetto a due assi

Il vettore velocità angolare può essere scritto proiettandone le sue componenti sul sistema di riferimento solidale al corpo rigido costituente il corpo del giroscopio $x_2 - y_2$ - z_2 ottenendo:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\cos\vartheta\cos\Phi + \dot{\vartheta}\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\cos\vartheta\sin\Phi + \dot{\vartheta}\cos\Phi \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi}\sin\vartheta \end{Bmatrix}$$

da cui è possibile valutare l'energia cinetica del corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2}\{\omega\}^T [J]\{\omega\} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\cos\vartheta\cos\Phi + \dot{\vartheta}\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\cos\vartheta\sin\Phi + \dot{\vartheta}\cos\Phi \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi}\sin\vartheta \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}\cos\vartheta\cos\Phi + \dot{\vartheta}\sin\Phi \\ -\dot{\Psi}\cos\vartheta\sin\Phi + \dot{\vartheta}\cos\Phi \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi}\sin\vartheta \end{Bmatrix}$$

ovvero:

$$T = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} I_1\left(\dot{\Psi}\cos\vartheta\cos\Phi + \dot{\vartheta}\sin\Phi\right)^2 + I_2\left(-\dot{\Psi}\cos\vartheta\sin\Phi + \dot{\vartheta}\cos\Phi\right)^2 \\ +I_3\left(\dot{\Phi} + \dot{\Psi}\sin\vartheta\right)^2 \end{Bmatrix}$$

L'espressione dell'energia potenziale è invece funzione dell'allungamento della molla che si presenta sotto forma non lineare della rotazione ϑ:

$$V = \frac{1}{2}k\Delta l^T \Delta l = V\left(\vartheta\right)$$

Infine a causa della dissipazione presente nella cerniera è possibile definire una funzione dissipativa pari a :

$$D = \frac{1}{2}c\dot{\vartheta}^2$$

Applicando ora l'equazione di Lagrange con riferimento alla variabile ϑ si ottengono le seguenti espressioni:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \left\{ I_1 \left(\dot{\Psi} \cos\vartheta \cos\Phi + \dot{\vartheta} \sin\Phi \right) \sin\Phi + I_2 \left(-\dot{\Psi} \cos\vartheta \sin\Phi + \dot{\vartheta} \cos\Phi \right) \cos\Phi \right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = I_1 \left(-\dot{\Psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\Phi \sin\Phi - \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \sin^2\Phi + \ddot{\vartheta} \sin^2\Phi + \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \cos\Phi \sin\Phi + \right.$$
$$\left. + \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \cos^2\Phi + \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \sin\Phi \cos\Phi \right) +$$
$$+ I_2 \left(+ \dot{\Psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\Phi \cos\Phi - \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \cos^2\Phi - \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \sin\Phi \cos\Phi + \right.$$
$$\left. + \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \sin^2\Phi - \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \sin\Phi \cos\Phi \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = I_1 \left(-\dot{\Psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cos^2\Phi - \dot{\Psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\Phi \sin\Phi \right) +$$
$$I_2 \left(-\dot{\Psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin^2\Phi + \dot{\vartheta}\dot{\Psi} \sin\vartheta \sin\Phi \cos\Phi \right) + I_3 \left(\dot{\Phi}\dot{\Psi} \cos\vartheta + \dot{\Psi}^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \right)$$

da cui si ottiene, ponendo sempre $I_1 = I_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = I_1 \left(\dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \cos^2\Phi + \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \sin\Phi \cos\Phi \right.$$
$$- \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \sin^2\Phi - \dot{\Psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\Phi \sin\Phi + \ddot{\vartheta} \sin^2\Phi + \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \cos\Phi \sin\Phi$$
$$+ \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \sin^2\Phi - \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \sin\Phi \cos\Phi - \dot{\Psi}\dot{\Phi} \cos\vartheta \cos^2\Phi +$$
$$+ \dot{\Psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \sin\Phi \cos\Phi + \ddot{\vartheta} \cos^2\Phi - \dot{\vartheta}\dot{\Phi} \sin\Phi \cos\Phi + \dot{\Psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cos^2\Phi$$
$$\left. + \dot{\Psi}\dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\Phi \sin\Phi + \dot{\Psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin^2\Phi - \dot{\vartheta}\dot{\Psi} \sin\vartheta \sin\Phi \cos\Phi \right)$$
$$- I_3 \left(\dot{\Phi}\dot{\Psi} \cos\vartheta + \dot{\Psi}^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \right)$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \vartheta}=I_1\left(\ddot{\vartheta}+\dot{\Psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)-I_3\left(\dot{\Phi}\dot{\Psi}\cos\vartheta+\dot{\Psi}^2\cos\vartheta\sin\vartheta\right)$$

Infine:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\vartheta}}=c\dot{\vartheta}$$

L'equazione di moto del giroscopio diventa pertanto:

$$I_1\ddot{\vartheta}-I_3\dot{\Phi}\dot{\Psi}\cos\vartheta+\left(I_1-I_3\right)\dot{\Psi}^2\cos\vartheta\sin\vartheta+c\dot{\vartheta}+\frac{\partial V\left(\vartheta\right)}{\partial\vartheta}=0 \qquad (3.39)$$

La (3.39) si presenta come una equazione non lineare ma nelle applicazioni utilizzate si può ritenere $\vartheta,\dot{\vartheta},\dot{\Psi}$ molto piccoli e pertanto linearizzando attorno a $\vartheta=0$ si ottiene:

$$\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\simeq kR^2\vartheta$$

per cui la (3.39) diventa l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa del II ordine:

$$I_1\ddot{\vartheta}+c\dot{\vartheta}+kR^2\vartheta=I_3\dot{\Phi}\dot{\Psi} \qquad (3.40)$$

che, risolta, lega la rotazione ϑ, che può essere ricavata dalla misura della reazione elastica della molla pari a $kR\vartheta$, alla velocità angolare incognita $\dot{\Psi}$.

Altri giroscopi sono privi del richiamo elastico e operano direttamente sul segnale integrato, così che la (3.40) diventa:

$$I_1\dot{\vartheta}+c\vartheta=I_3\dot{\Phi}\dot{\Psi}$$

e la misura della rotazione ϑ tramite l'elemento viscoso fornisce l'indicazione della posizione angolare Ψ.