

ELEMENTI DI CINEMATICA

1. Introduzione

Def.1.1

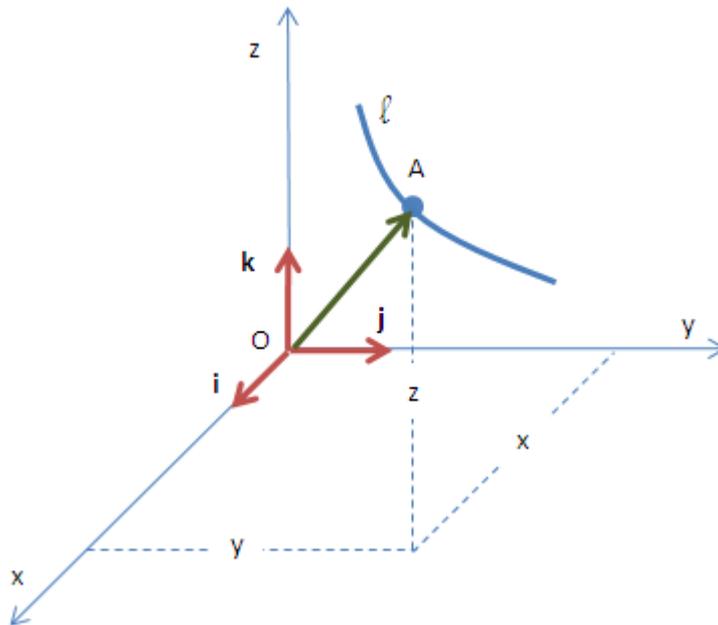
La *cinematica* è quella branca della meccanica che studia i movimenti in relazione al tempo, indipendentemente dalle cause che li producono.

La posizione, il movimento di un corpo, o semplicemente di un punto, sono sempre relativi: cioè noi possiamo stabilire la posizione di un punto e giudicare se essa muta o no soltanto rispetto ad un sistema di riferimento (per esempio un sistema di assi cartesiani di riferimento).

La posizione di un punto all'interno di una stanza è stabilita perché si assegnano le coordinate di questo punto rispetto ad una terna di assi individuata, ad esempio, dai tre spigoli che sono la mutua intersezione di due pareti contigue e del pavimento.

Dire che il punto A si muove rispetto alla terna xyz equivale a dire che, stabilita la posizione di A tramite le sue coordinate(x, y, z), queste mutano col tempo.

Fig.1.1



Def.1.2

Si definisce *vettore posizione* di A il vettore che congiunge O, origine della terna di riferimento, con A.

$$\overline{OA} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Se un corpo A è mobile rispetto ad una terna di riferimento allora anche il suo vettore posizione, di cui x, y e z sono le componenti, muta nel tempo.

Def.1.3

Si definisce *traiettoria* il luogo dei punti occupati successivamente dal punto nel suo movimento.

Def.1.4

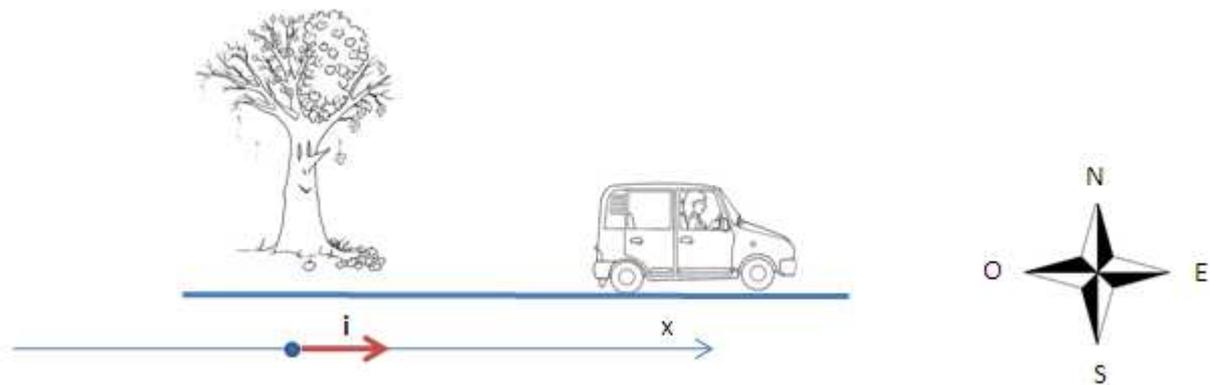
Si definisce *punto materiale* un'entità idealizzata che non ha estensione né struttura interna.

Evidentemente in natura non esiste un oggetto senza estensione. Il concetto di punto materiale è tuttavia molto utile poiché i corpi materiali si comportano spesso, con accettabile approssimazione, come fossero punti materiali; e non c'è bisogno neppure che un corpo sia piccolo, nel senso usuale, perché possa venire trattato come punto materiale. Per esempio, se si considera la distanza della terra dal sole, rispetto a questa distanza la terra e il sole possono essere considerati come punti materiali: in effetti si possono ottenere molte informazioni sul moto del sole e dei pianeti, senza apprezzabili errori, trattando questi oggetti come fossero punti materiali.

2. Il moto in una direzione

Come visto in precedenza, per descrivere il moto di un corpo, la prima cosa da fare è introdurre un sistema di coordinate di riferimento. Nel caso di un moto lungo una linea retta, ciò comporta la scelta in primo luogo di un'origine in qualche punto della retta, e poi di un verso positivo: le misure saranno effettuate allora rispetto a questo sistema di riferimento. Consideriamo un'automobile che percorre una strada rettilinea diretta da est verso ovest: come origine possiamo prendere qualunque punto convenientemente situato, per esempio un punto adiacente a un grande albero sul ciglio della strada.

Fig. 2.1



Posto l'asse x nella direzione della strada, orientiamo il versore \mathbf{i} verso est, scegliendo questo come verso positivo.

Il vettore posizione \mathbf{r} dell'automobile è allora dato da:

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} \quad (2.1)$$

La coordinata x dell'automobile è la componente del vettore posizione.

Quando la vettura si trova a 55 m a est dall'origine, il suo vettore posizione è $\mathbf{r} = (55 \text{ m})\mathbf{i}$

Quando è a 25 m a ovest dall'origine, il suo vettore posizione è $\mathbf{r} = (-25 \text{ m})\mathbf{i}$

Si ha uno spostamento $\Delta\mathbf{r}$ quando si verifica un cambiamento della posizione. $\Delta\mathbf{r}$ è la differenza tra il vettore di posizione finale \mathbf{r}_f e il vettore posizione iniziale \mathbf{r}_i , ossia:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = (x_f - x_i)\mathbf{i} = \Delta x\mathbf{i} \quad (2.2)$$

Se la posizione iniziale dell'automobile era di 25 m a ovest dall'origine e la sua posizione finale è 55 m a est dall'origine, il suo spostamento è stato:

$$\Delta r = ((55 \text{ m}) - (-25 \text{ m}))\mathbf{i} = (80 \text{ m})\mathbf{i}$$

Esempio 2.1

Una slitta sta scivolando su per un pendio nevoso dritto. La slitta si muove sempre più lentamente via via che sale lungo la china, poi si arresta per un istante e inizia a scivolare all'indietro giù per il pendio.

Un'analisi del moto della slitta fornisce la sua coordinata x come funzione del tempo t :

$$x(t) = 18\text{m} + (12\text{m/s})t - (1.2\text{m/s}^2)t^2$$

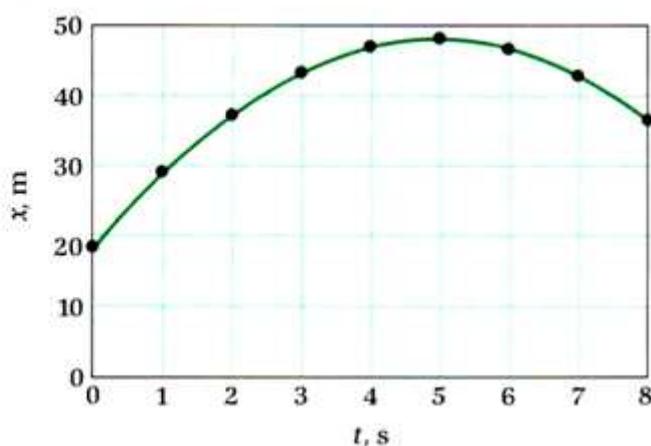
ove x viene misurata lungo il percorso della slitta e il semiasse positivo delle x è rivolto verso la salita. Si richiede di:



- costruire un grafico della coordinata della slitta come funzione del tempo da $t = 0 \text{ s}$ a $t = 8 \text{ s}$ riportando i punti a intervalli di 1 s ;
- determinare lo *spostamento* della slitta tra $t_i = 1 \text{ s}$ e $t_f = 7 \text{ s}$;
- determinare lo *spazio percorso*¹ dalla slitta tra gli istanti $t_i = 1 \text{ s}$ e $t_f = 7 \text{ s}$.

Grafico della coordinata della slitta in funzione del tempo

t, s	x, m
0	18
1	29
2	37
3	43
4	47
5	48
6	47
7	43
8	37



Lo spostamento nell'intervallo di tempo assegnato vale:

$$\Delta \mathbf{r} = (x_f - x_i)\mathbf{i} = (43\text{m} - 29\text{m})\mathbf{i} = (14\text{m})\mathbf{i}$$

¹ Lo spazio percorso da un oggetto è la lunghezza totale della sua traiettoria.

In base al grafico si vede che la coordinata della slitta ha continuato ad aumentare fino a $x \cong 48$ m, e poi ha cominciato a decrescere.

A partire dall'istante $t = 1$ s fino all'istante $t = 5$ s, la slitta percorre, nella direzione $+x$, una distanza d_1 pari a:

$$d_1 \cong (48 - 29) \text{ m} = 19 \text{ m}$$

Dal tempo $t = 5$ s fino al tempo $t = 7$ s, la slitta scende per una distanza d_2 pari a:

$$d_2 \cong (48 - 43) \text{ m} = 5 \text{ m}$$

Lo spazio percorso tra $t = 1$ s e $t = 7$ s vale pertanto:

$$d = d_1 + d_2 \cong 24 \text{ m}$$

Si noti che lo spazio percorso (24 m) non corrisponde allo spostamento (14 m).



3. Velocità vettoriale e scalare nel moto in una dimensione

La posizione di un oggetto indica dove esso si trova rispetto al sistema di riferimento scelto; la velocità vettoriale di un oggetto esprime invece con quale rapidità esso si muove e in quale direzione si dirige rispetto al sistema di riferimento.

Velocità media

Def.3.1

La *velocità media* (velocità vettoriale media) $\bar{\mathbf{v}}$ di un corpo in un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è definita dal seguente rapporto

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3.1)$$

ove \mathbf{r}_f e \mathbf{r}_i sono i vettori posizione che individuano il corpo rispettivamente negli istanti t_f e t_i

Nel moto in una dimensione, la velocità media ha una sola componente, ossia:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{(x_f - x_i) \mathbf{i}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} = \bar{v}_x \cdot \mathbf{i} \quad (3.2)$$

La *componente della velocità media*¹ \bar{v}_x è pari a:

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Esempio 3.1

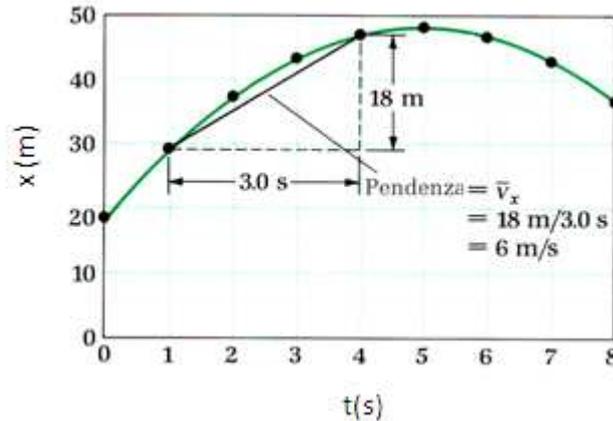
Con riferimento all'Esempio 2.1, determinare la componente della velocità media nell'intervallo compreso tra l'istante $t_i = 1$ s e $t_f = 4$ s.

¹ Ricordiamo che in inglese si usa la parola "speed" per indicare il modulo della velocità, mentre per "velocity" si intende il vettore velocità. Nel seguito, purché non dia luogo a equivoci, useremo il termine velocità sia per indicare il vettore sia per indicarne il modulo.

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(43-29)\text{ m}}{(4-1)\text{ s}} = 6\text{ m/s}$$

La componente della velocità media tra t_f e t_i è pari alla pendenza del segmento di retta che ha per estremi i punti corrispondenti a t_f e t_i sul grafico spostamento (x)-tempo (t).

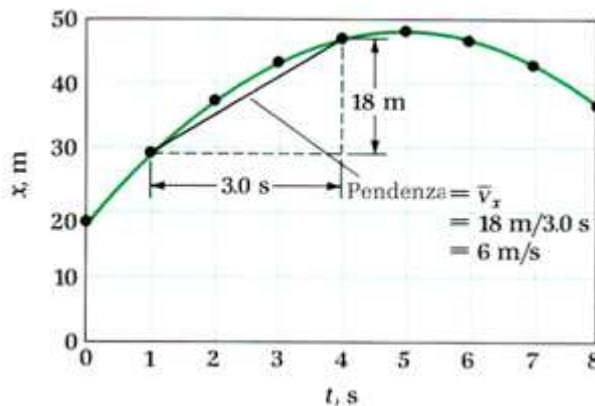
Fig.3. 1



Velocità istantanea¹

Con riferimento al diagramma spostamento-tempo di seguito rappresentato, come abbiamo già visto in precedenza, la pendenza di un segmento che congiunge due punti qualsiasi esprime la componente della velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra quei punti.

Fig.3. 2



Dalla figura si vede che man mano che t_f si avvicina a t_i , la pendenza dei rispettivi segmenti si approssima alla pendenza della retta tangente alla curva in t_i . Portando il discorso al limite diremo che quando l'intervallo $t_f - t_i$ tende a zero la componente della velocità all'istante t_i è rappresentata dalla pendenza

¹ Nel seguito, quando non dia luogo ad ambiguità, la velocità istantanea sarà indicata semplicemente come velocità.

della tangente alla curva nel punto di ascissa t_i . La componente della velocità istantanea può essere pertanto definita come segue.

Def.3. 2

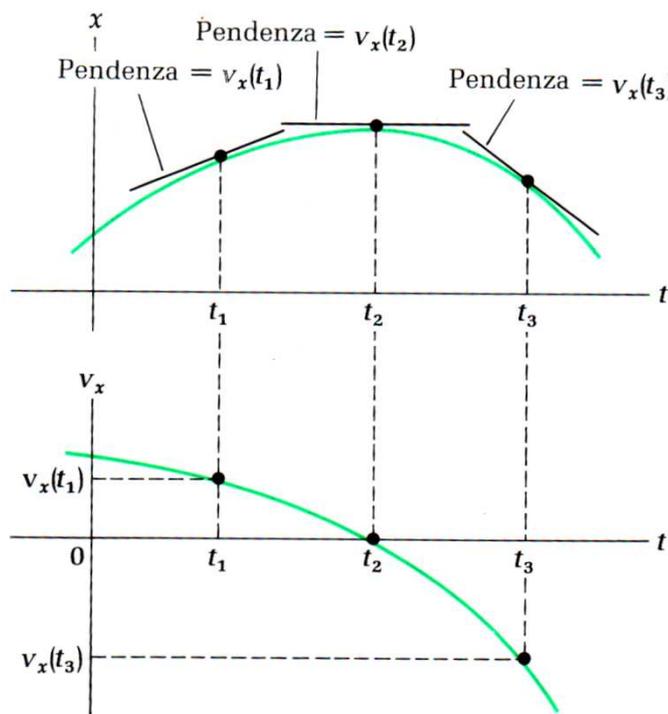
La componente della velocità istantanea è il limite a cui tende la componente della velocità media quando l'intervallo di tempo considerato tende a zero.

Da cui:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3.4}$$

La Fig.3. 3 mostra la relazione tra pendenza della curva¹ spostamento-tempo e la componente della velocità istantanea.

Fig.3. 3



La definizione della componente della velocità istantanea porta immediatamente alla definizione generale della velocità istantanea \mathbf{v}

Def.3. 3

La velocità istantanea \mathbf{v} è il limite a cui tende la velocità media $\bar{\mathbf{v}}$ quando l'intervallo di tempo considerato tende a zero.

Da cui:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}} \tag{3.5}$$

¹ La pendenza della tangente ad una curva in un punto è chiamata solitamente pendenza della curva in quel punto.

Sostituendo la (3.1) nella (3.5) si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Usualmente si dice che la velocità di un'automobile è indicata dalla lettura del tachimetro ossia da un valore numerico. Come sappiamo tuttavia la velocità è una grandezza vettoriale caratterizzata da modulo, verso e direzione: quindi non può essere espressa da un solo valore numerico.

In effetti sul tachimetro non leggiamo la velocità di un'automobile bensì solo il modulo del vettore velocità che definiremo velocità scalare v .

Def.3.4

La velocità scalare v è il modulo del vettore velocità ossia il valore assoluto della componente della velocità.

$$v = |\mathbf{v}_x \mathbf{i}| = |v_x| \quad (3.7)$$

4. L'accelerazione nel moto in una dimensione

L'accelerazione di un corpo esprime la rapidità con la quale la sua velocità varia sia in modulo sia in direzione. Come fatto in precedenza, prima introdurremo il concetto di accelerazione media e successivamente quello di accelerazione istantanea.

Def.4.1

L'*accelerazione media* $\bar{\mathbf{a}}$ di un corpo nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è definita dal seguente rapporto:

$$\bar{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (4.1)$$

dove \mathbf{v}_f e \mathbf{v}_i sono le velocità rispettivamente negli istanti t_f e t_i

Nel moto in una dimensione l'accelerazione ha una sola componente, infatti:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{(v_{xf} - v_{xi}) \mathbf{i}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} = \bar{a}_x \mathbf{i} \quad (4.2)$$

dove v_{xf} e v_{xi} sono le componenti della velocità agli istanti t_f e t_i

Def.4.2

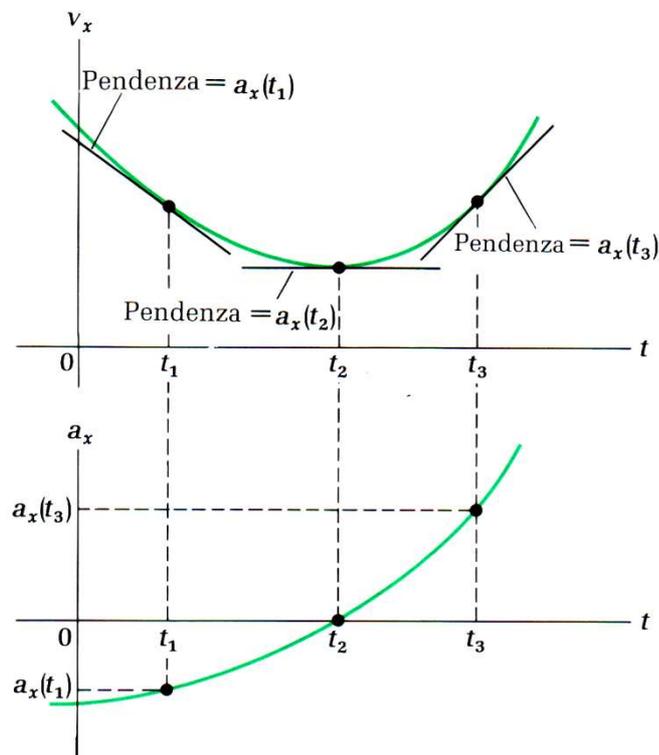
L'*accelerazione istantanea*¹ di un corpo è il limite a cui tende l'accelerazione media quando l'intervallo di tempo considerato tende a zero.

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (4.3)$$

La Fig.4. 1 illustra la connessione tra il grafico di v_x in funzione di t e un grafico di a_x in funzione di t . Si noti la stretta analogia con la Fig.3. 3 dove si esprimeva la relazione tra v_x ed x .

¹ Nel seguito, analogamente a quanto detto a proposito della velocità istantanea, quando non dia luogo ad ambiguità, l'accelerazione istantanea sarà indicata semplicemente come accelerazione.

Fig.4. 1

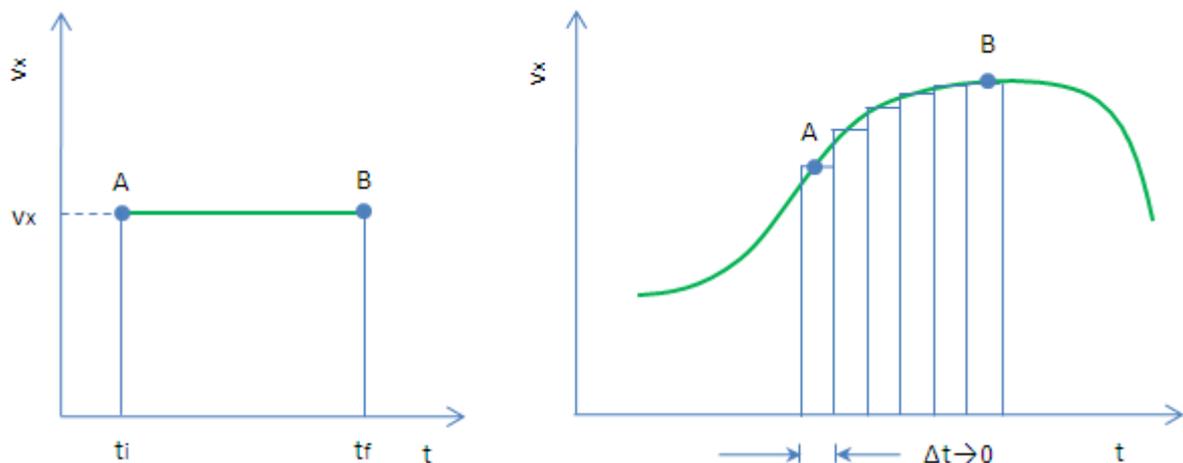


5. Il significato delle aree sottese alle curve v-t ed a-t

Consideriamo un punto che si muove lungo una traiettoria rettilinea con velocità costante v . Lo spazio Δx percorso dall'istante t_i all'istante t_f vale:

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t = v_x (t_f - t_i)$$

Fig. 5. 1



E' evidente pertanto che nella Fig. 5. 1 (sx) lo spazio percorso è rappresentato dall'area del rettangolo di lati v_x e Δt .

Consideriamo ora un punto che si muove lungo una traiettoria rettilinea con velocità variabile con il tempo secondo quanto riportato in Fig. 5. 1 (dx). Per calcolare lo spazio percorso dall'istante A all'istante B, possiamo suddividere l'intervallo di tempo considerato in intervalli infinitesimi all'interno dei quali la velocità del punto può ritenersi costante. Lo spazio percorso è quindi rappresentato dall'area sottesa alla

curva v_x-t , area che, come detto in precedenza, può essere immaginata ottenuta come somma di infiniti rettangoli di spessore infinitesimo e di altezze pari alla velocità del punto nell'intervallo infinitesimo considerato.

Pertanto:

Lo spostamento di un punto, che si muove di moto rettilineo, è rappresentato dall'area sottesa alla curva v_x-t .

Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte con riferimento al grafico a_x-t .

Con riferimento ad un punto che si muove lungo una traiettoria rettilinea con accelerazione costante a , la variazione Δv_x nell'intervallo di tempo considerato vale:

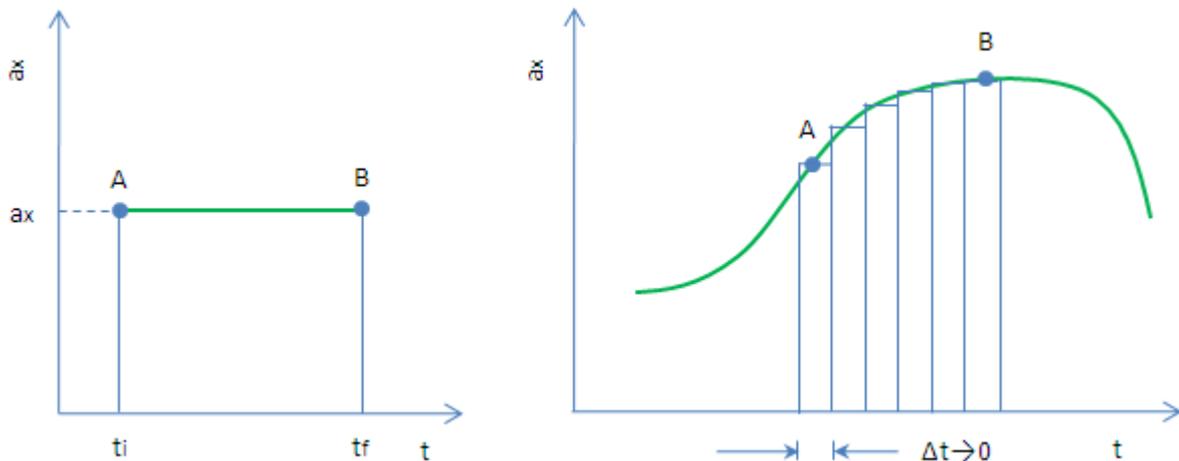
$$\Delta v_x = a_x \cdot \Delta t$$

Dalla Fig. 5. 2 (sx) risulta evidente che Δv_x risulta rappresentato dall'area del rettangolo di base Δt ed altezza a_x .

Estendendo al limite il ragionamento come fatto in precedenza a proposito del grafico v_x-t , si deduce immediatamente che:

La variazione di velocità di un punto, che si muove di muove rettilineo , è rappresentata dall'area sottesa alla curva a_x-t

Fig. 5. 2



6. Il moto rettilineo con accelerazione costante

Quando un corpo si muove con accelerazione costante, l'accelerazione è uguale all'accelerazione media. Si ha quindi:

$$a_x = \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} + v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Per ottenere un'espressione di $v_x(t)$, ossia della velocità rispetto al tempo, poniamo $t_f = t$ e $t_i = 0$, di modo che $v_{xf} = v_x(t)$ e $v_{xi} = v_x(0)$. Si ha quindi:

$$a_x = \frac{v_x(t) - v_{x0}}{t - 0}$$

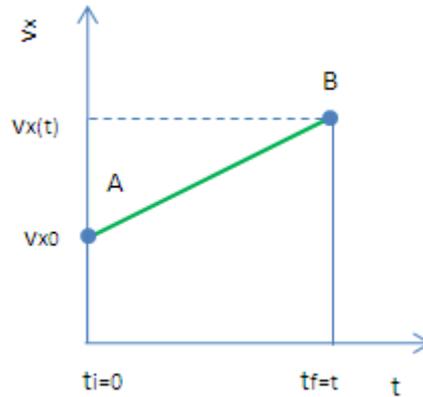
e risolvendo rispetto a $v_x(t)$, si ottiene:

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad (6.1)$$

La velocità del punto dipende linearmente da t .

La (6.1) è rappresentata nella Fig. 6. 1 dalla retta a cui appartiene il segmento AB.

Fig. 6. 1



Sempre con riferimento ad un punto che si muove lungo una traiettoria rettilinea con accelerazione costante a_x , indichiamo con x_0 la posizione del punto al tempo $t_i = 0$ e con $x(t)$ la posizione del punto al tempo $t_f = t$.

Come visto al paragrafo precedente, la variazione di posizione $\Delta x = x(t) - x_0$ è rappresentata, nella Fig. 6. 1, dall'area sottesa al segmento AB. Si ha pertanto:

$$x(t) - x_0 = v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2}(v_x(t) - v_{x0}) \cdot t \quad (6.2)$$

Poiché il moto ha accelerazione costante:

$$v_x(t) - v_{x0} = a_x \cdot t \quad (6.3)$$

Sostituendo la (6.3) nella (6.2) si ottiene infine:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (6.4)$$

Quindi x presenta una dipendenza quadratica rispetto a t .

Esempio 6.1

Un'auto si muove lungo una traiettoria rettilinea. Nei primi 50 km viaggia alla velocità di 100 km/h, nei restanti 50 km viaggia 50 km/h. Determinare la velocità media dell'auto lungo l'intero percorso.

L'auto impiega 0.5 h per compiere i primi 50 km e 1h per compiere i restanti 50.

Il tempo totale di percorrenza è pertanto pari a 1.5 h.

Dalla definizione di velocità media si ricava pertanto che:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100}{1.5} = 66.\bar{6} \text{ km/h}$$

E' importante sottolineare che la velocità media differisce dalla media aritmetica delle velocità.



Esempio 6.2

Un'auto si muove lungo una traiettoria rettilinea. Nella prima mezz'ora mantiene una velocità costante di 100 km/h, nella restante ora viaggia alla velocità costante di 20 km/h. Determinare la velocità media dell'auto lungo l'intero percorso.

Nella prima mezz'ora l'auto compie 50 km, nella restante ora compie 20 km.

Dalla definizione di velocità media si ricava pertanto:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{70}{1.5} = 46.\bar{6} \text{ km/h}$$

Indichiamo con Δx_1 e con Δx_2 gli spostamenti dell'auto rispettivamente nel primo e nel secondo tratto di durate Δt_1 e Δt_2 e con v_{x1} e v_{x2} le rispettive velocità.

Si ha pertanto:

$$v_{x1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad v_{x2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad (6.5)$$

Dalla definizione di velocità media si ha:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (6.6)$$

Sostituendo la (6.5) nella (6.6) si ottiene:

$$\bar{v}_x = \frac{v_{x1} \cdot \Delta t_1 + v_{x2} \cdot \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (6.7)$$

Pertanto la velocità media coincide con la media pesata delle velocità con pesi pari ai tempi con cui si sono mantenute le rispettive velocità.

Dalla (6.7) si ricava che la velocità media coincide con la media aritmetica delle velocità solo se i tempi di mantenimento di tali velocità sono uguali.



Esempio 6.3

Un aereo viaggia lungo una traiettoria rettilinea da per A a B e immediato ritorno. Nell'ipotesi che la velocità dell'aereo sia costante, pari a 800 km/h, e che la distanza AB sia 6200 km, determinare il tempo impiegato per compiere l'intera tratta di andata e ritorno.

Il tempo impiegato a compiere il percorso di andata coincide, in questo caso, con il tempo impiegato per compiere il percorso di ritorno. Pertanto il tempo totale di andata e ritorno vale:

$$t_{AR} = 2 \frac{6200}{800} = 15.5 \text{ h}$$



Esempio 6.4

Con riferimento all'Esempio 6.3 supponiamo ora che, per effetto dei venti in quota, l'aereo compia il tragitto di andata con una velocità costante di 900 km/h e il percorso di ritorno con una velocità costante di 700 km/h. Determinare il tempo impiegato per compiere l'intera tratta di andata e ritorno.

Il tempo impiegato a compiere il percorso di andata vale:

$$t_A = \frac{6200}{900} = 6.8 \text{ h}$$

Il tempo impiegato a compiere il percorso di ritorno vale:

$$t_R = \frac{6200}{700} \cong 8.86 \text{ h}$$

Il tempo totale vale quindi:

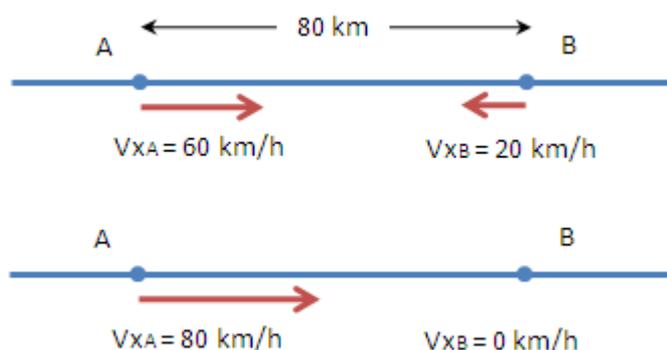
$$t_{AR} = t_A + t_R \cong 15.75 \text{ h}$$

Considerando un percorso di andata e ritorno con velocità costanti rispettivamente pari a v_A e v_B , il tempo totale di percorrenza è sempre superiore al tempo che si impiegherebbe viaggiando sia in andata, sia in ritorno ad una velocità costante pari alla media aritmetica di v_A e v_B .



Esempio 6.5

Due treni distanti 80 km viaggiano su binari paralleli l'uno verso l'altro con velocità pari rispettivamente 60 e 20 km/h. Determinare dopo quanto tempo i treni si incontrano.



Se diamo al sistema di riferimento fisso con le rotaie una velocità di 20 km/h verso sx, il treno B risulta fermo, mentre il treno A assume una velocità pari a 80 km/h.

In questa nuova situazione, cinematicamente simile a quella originaria, il tempo impiegato da A per raggiungere B vale ovviamente:

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{80}{80} = 1 \text{ h}$$

Mantenendo il sistema di riferimento fisso, gli spostamenti di A e B, in funzione del tempo valgono rispettivamente:

$$\Delta x_A = v_{xA} \cdot t \quad \Delta x_B = v_{xB} \cdot t$$

I due treni si incontrano quando la somma dei valori assoluti degli spostamenti uguaglia la distanza iniziale d dei treni ($d = 80$ km). Si ha pertanto:

$$|\Delta x_A| + |\Delta x_B| = d \rightarrow |v_{xA}| \cdot t + |v_{xB}| \cdot t = d \rightarrow t = \frac{d}{|v_{xA}| + |v_{xB}|} = 1 \text{ h}$$



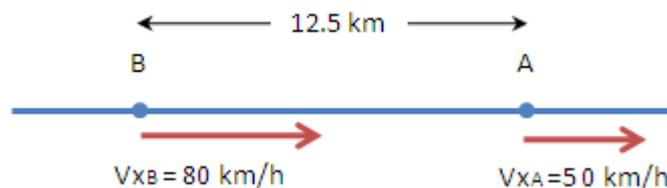
Esempio 6.6

Alle ore 8.00 un'auto A passa davanti al casello stradale alla velocità di 50 km/h. Alle ore 8:15 un'auto B passa davanti allo stesso casello stradale alla velocità di 80 km/h. Determinare, nell'ipotesi che le due auto mantengono costantemente le velocità registrate, l'ora in cui B raggiunge A.

Alle ore 8:15 l'auto A si trova ad una distanza dal casello pari a:

$$d_A = v_{xA} \cdot t = 50 \cdot \frac{1}{4} = 12.5 \text{ km}$$

Alle ore 8:15 la situazione può essere così schematizzata



Come già fatto, dotando il sistema di riferimento di una velocità verso sx di 50 km/h, è lecito considerare A fermo e B dotato di una velocità pari a 30 km/h.

In tali condizioni il tempo impiegato per il raggiungimento vale:

$$t = \frac{\Delta x}{\Delta v_x} = 0.41\bar{6} \text{ h} \rightarrow 25 \text{ min}$$

L'incontro avverrà pertanto alle ore 8:40.



Esempio 6.7

Una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di 80 m/s. Trascurando ogni fenomeno passivo, determinare:

1. l'altezza massima raggiunta;
2. il tempo impiegato per raggiungere la massima altezza;
3. il tempo impiegato per ritornare a terra;
4. la velocità di impatto col suolo.

E' da notare che:

- Il moto di salita è uniformemente decelerato con decelerazione pari all'accelerazione di gravità ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$)
- Il moto di discesa è uniformemente accelerato con accelerazione pari all'accelerazione di gravità.
- Nel punto in cui la palla raggiunge la massima altezza la sua velocità è nulla.

Il tempo impiegato per raggiungere la massima altezza si ricava dalla (6.1) una volta che si ponga $v_x(t) = 0$.

$$v_x(t) = v_{x0} + a \cdot t \rightarrow 0 = v_{x0} - g \cdot t \rightarrow t = \frac{v_{x0}}{g} \cong 8.15 \text{ s}$$

L'altezza massima raggiunta si determina dalla (6.4) una volta che si ponga $x_0 = 0$ e $t = v_{x0}/g$ come ricavato in precedenza.

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow x(t) = \frac{v_{x0}^2}{2g} \cong 326.2 \text{ m}$$

Il moto di discesa è un moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla. Pertanto dalla (6.4) si ottiene:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow \frac{v_{x0}^2}{2g} = \frac{g \cdot t^2}{2} \rightarrow t = \frac{v_{x0}}{g} \cong 8.15 \text{ s}$$

Il tempo di discesa è uguale al tempo di salita. E' facile dimostrare per questa via che ad una certa quota il modulo della velocità di salita è uguale al modulo delle velocità di discesa.

La velocità di impatto col suolo è uguale, in valore assoluto, alla velocità iniziale di 80 m/s.



Esempio 6.8

All'istante in cui il semaforo diventa verde un automobilista parte con una accelerazione di costante di 1.8 m/s^2 . Nello stesso istante muovendosi con velocità costante di 9 m/s un autocarro raggiunge e supera l'automobile.

A quanti metri dal punto di partenza l'automobile sorpasserà l'autocarro? A che velocità starà viaggiando, in quell'istante, l'automobile?

Sia a l'accelerazione dell'auto, v la velocità dell'autocarro, x_1 e x_2 le posizioni rispetto al semaforo verde rispettivamente dell'auto e , e t il tempo a partire da quando il semaforo è diventato verde. Si ha:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}1.8t^2 \\ x_2 = vt = 9t \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

L'incontro avviene dopo 10 secondi: in tale intervallo di tempo l'automobile e l'autocarro avranno percorso 90 metri. Al momento dell'incontro l'automobile starà viaggiando alla velocità:

$$v = at = 1.8 \cdot 10 = 18 \text{ m/s}$$



Esempio 6.9

Un pallone aerostatico sta salendo alla velocità di 12 m/s e quando si trova a un'altezza di 80 m lascia cadere una zavorra. Quanto tempo impiegherà tale zavorra a raggiungere la terra?

Indicata con $x(t)$ la posizione della zavorra, e con t il tempo a partire dalla discesa della zavorra, si ha:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = 80 + 12 \cdot t - \frac{1}{2}9.81 \cdot t^2 \rightarrow t \cong 5.4 \text{ s}$$



Esempio 6.10

Un paracadutista dopo il lancio cade per 50 m senza attrito. Quando il paracadute si apre, egli decelera di 2 m/s^2 e arriva a terra con una velocità di 3 m/s. Determinare:

1. quanto tempo dura il lancio;
2. da quale altezza è stato effettuato il lancio.

Durante la discesa senza attrito il paracadutista scende con un moto uniformemente accelerato, con accelerazione pari all'accelerazione di gravità g . Al termine di questa discesa la velocità raggiunta è pari a:

$$\begin{cases} v_{xf1} = g \cdot t_1 \\ x(t) = \frac{1}{2}g \cdot t_1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{xf1} = g \cdot \sqrt{\frac{2x(t)}{g}} \\ t_1 = \sqrt{\frac{2x(t)}{g}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{xf1} \cong 31.32 \text{ m/s} \\ t_1 \cong 3.193 \text{ s} \end{cases}$$

Il tempo t_2 durante il quale il paracadutista cade in decelerazione vale:

$$v_{xf2} = v_{xf1} - a \cdot t_2 \rightarrow t_2 \cong \frac{31.32 - 2}{2} \cong 14.16 \text{ s}$$

Il tempo totale del lancio vale pertanto:

$$t = t_1 + t_2 \cong 17.353 \text{ s}$$

Nel tempo t_2 il paracadutista scende per un tratto di lunghezza x pari a:

$$x = v_{xf1} \cdot t_2 - \frac{1}{2}a \cdot t_2^2 \rightarrow x = 31.32 \cdot 14.16 - \frac{2}{2}14.16^2 \cong 243 \text{ m}$$

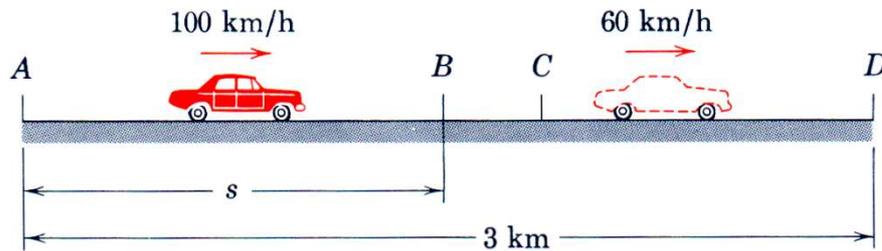
Pertanto il lancio è stato effettuato da un'altezza h pari a:

$$h = x + 50 \text{ m} \cong 293 \text{ m}$$

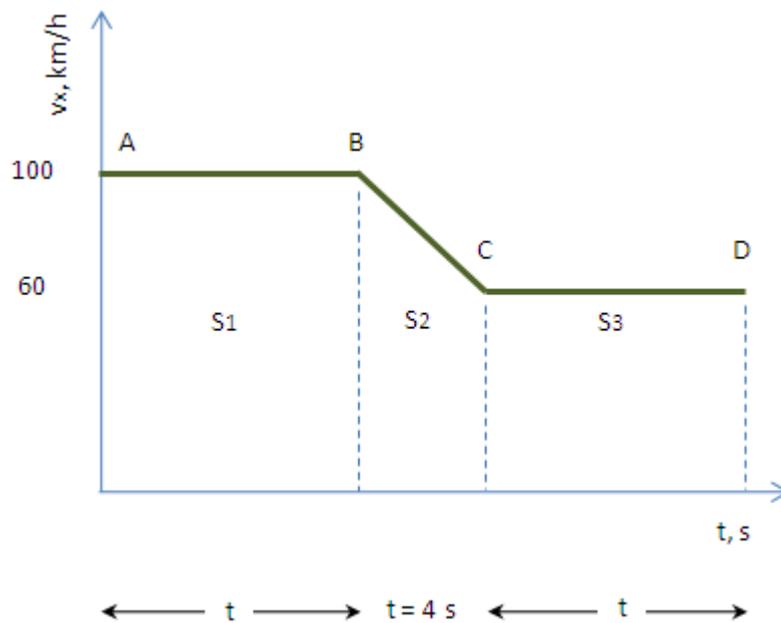


Esempio 6.11

In traveling a distance of 3 km between points A and D, a car is driven at 100 km/h from A to B for t seconds and at 60 km/h from C to D also for t seconds. If the brakes are applied for 4 seconds between B and C to give the car a uniform deceleration, calculate t and the distance between A and B.



Tracciamo il grafico velocità-tempo



Le aree S_1 , S_2 ed S_3 rappresentano gli spostamenti nei tre intervalli di tempo. La somma di tale spostamenti deve essere pari a 3 km. Indicate con v_{x1} e v_{x3} le componenti della velocità nei tratti estremi, si ha quindi:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3000 \text{ m} \rightarrow v_{x1} \cdot t + \frac{v_{x1} + v_{x3}}{2} \cdot 4 + v_{x3} \cdot t = 3000$$

$$t = 65.5 \text{ s}$$

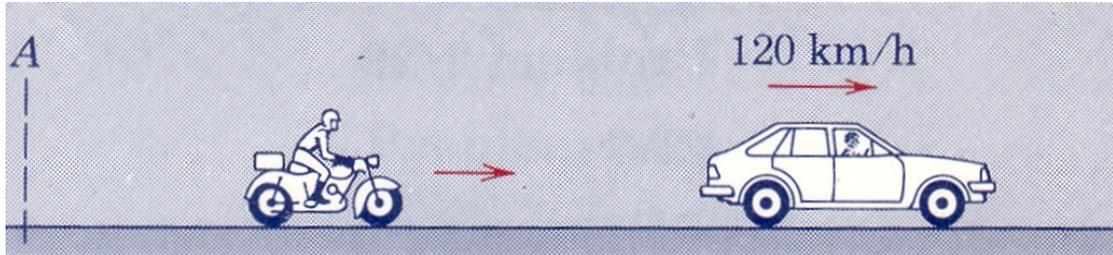
La distanza AB vale perciò:

$$\overline{AB} = v_{x1} \cdot t \cong 1.819 \text{ km}$$

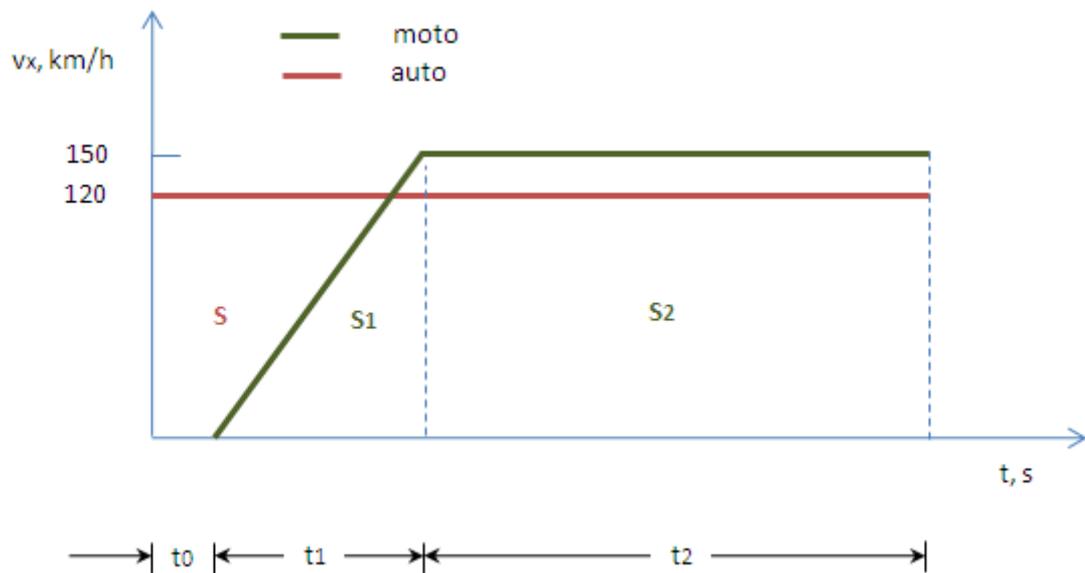


Esempio 6.12

A motorcycle patrolman starts from rest at A two seconds after a car, speeding at the constant rate of 120 km/h, pass the point A. If the patrolman accelerates at the rate of 6 m/s^2 until he reaches his maximum permissible speed of 150 km/h, which he maintains, calculate the distance s from point A to the point at which he overtakes the car.



Tracciamo il grafico velocità tempo dell'automobile e della moto.



Il tempo t_0 è il ritardo con cui parte la moto (2 s).

Il tempo t_1 si calcola ipotizzando che in questo periodo di tempo l'accelerazione si mantenga costante.

Indicata con a tale accelerazione e con v_{xm} la velocità massima raggiungibile dalla moto, il tempo t_1 vale:

$$t_1 = \frac{v_{xm}}{a} \cong 6.94 \text{ s}$$

Esprimiamo ora le ascisse x_m e x_a , rispettivamente di auto e moto, in funzione del tempo.

Uguagliando poi tali ascisse otteniamo il valore del tempo t_2 necessario a completare il raggiungimento.

Indica con v_{xa} la velocità dell'auto, si ha:

$$\begin{cases} x_a = v_{xa} (2 + t_1 + t_2) \\ x_m = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_{xm} \cdot t_2 \end{cases} \rightarrow t_2 \cong 18.4 \text{ s}$$

Il raggiungimento si completa ad una distanza s da A pari a:

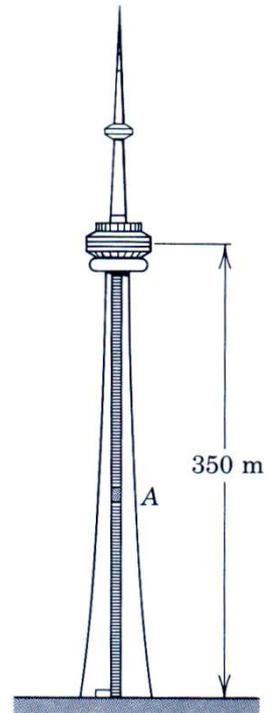
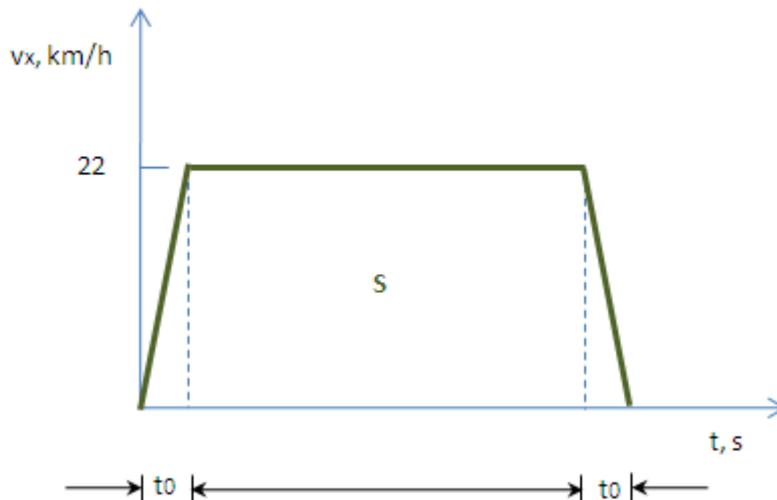
$$s = v_{xa} (2 + t_1 + t_2) \cong 911 \text{ m}$$



Esempio 6.13

The main elevator A of CN Tower in Toronto rises about 350 m and for most of its run has a constant speed of 22 km/h. Assume that both the acceleration and deceleration have a constant magnitude of $0.25g$ and determine the time duration t of the elevator run.

Tracciamo il grafico velocità-tempo relativo all'ascensore.



L'intervallo di tempo t_0 , indicata con v_x la velocità di regime, vale:

$$t_0 = \frac{v_x}{0.25 \cdot g} \cong 2.49 \text{ s}$$

Lo spostamento S , effettuato dall'ascensore in una salita, vale:

$$S = \frac{1}{2}(0.25 \cdot g) \cdot t_0^2 + v_x \cdot t + \frac{1}{2}(0.25 \cdot g) \cdot t_0^2$$

$$350 = \frac{1}{2}(0.25 \cdot 9.81) \cdot 2.49^2 + v_x \cdot t + \frac{1}{2}(0.25 \cdot 9.81) \cdot 2.49^2 \rightarrow t = 54.78 \text{ s}$$

La corsa di salita ha pertanto una durata pari a:

$$t_{tot} = 2t_0 + t \cong 59.8 \text{ s}$$

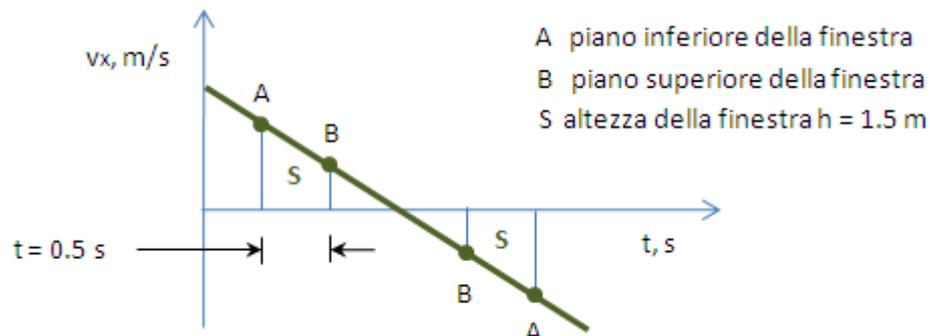


Esempio 6.14

Un cane vede, attraverso una finestra alta 1.5 m, un vaso di fiori volare verticalmente verso l'alto e poi ricadere giù. Se il tempo totale in cui il vaso rimane in vista è 1 s, trovare a che altezza sopra la finestra è arrivato il vaso.



Tracciamo il grafico velocità-tempo relativo al vaso di fiori.



Indichiamo con v_{xA} e v_{xB} le velocità del vaso, nel tratto ascendente, rispettivamente in corrispondenza del piano inferiore e superiore della finestra.

L'altezza S della finestra (1.5 m), indicato con t il tempo durante il quale il vaso rimane in vista nel tratto ascendente, vale:

$$S = \frac{v_{xA} + v_{xB}}{2} \cdot t \rightarrow v_{xA} + v_{xB} = 6 \text{ m/s} \quad (6.8)$$

Poiché il moto è uniformemente decelerato, con decelerazione pari a g , tra v_{xA} e v_{xB} esiste la seguente relazione:

$$v_{xB} = v_{xA} - g \cdot t \rightarrow v_{xA} - v_{xB} = 4.905 \text{ m/s} \quad (6.9)$$

Sostituendo la (6.9) nella (6.8) si ottiene infine:

$$v_{xA} \cong 5.45 \text{ m/s} \quad v_{xB} \cong 0.55 \text{ m/s}$$

L'altezza massima, sopra la finestra, raggiunta dal vaso vale:

$$h_{\max} = \frac{v_{xB}^2}{2g} \cong 1.54 \text{ cm}$$

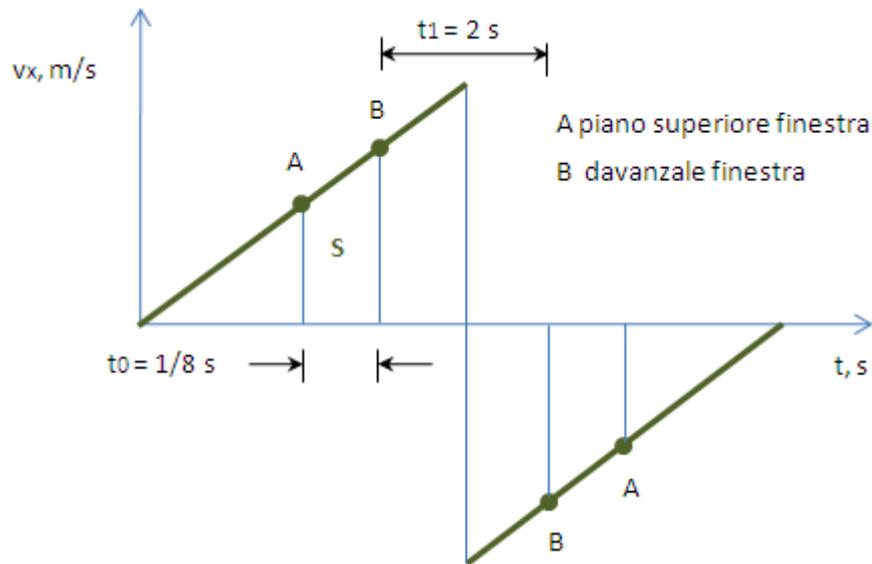


Esempio 6.15

Una sferetta di acciaio è lasciata cadere dal tetto di un edificio (con velocità iniziale nulla). Un uomo dietro a una finestra, alta 1.2 m, nota che la sferetta impiega $1/8$ s ad attraversarne la luce. La sferetta continua la caduta fino ad urtare, in modo completamente elastico, un marciapiede orizzontale e riappare sul davanzale della finestra 2 s dopo che è passata la prima volta cadendo. Quanto è alto l'edificio?

Hint.: dopo un urto completamente elastico la sferetta ha in salita la stessa velocità che aveva nello stesso punto in discesa.

Tracciamo il grafico velocità-tempo relativamente alla sferetta.



Consideriamo la discesa della sferetta: il moto è uniformemente accelerato e indicata con h l'altezza della finestra e con v_{xA} e v_{xB} le velocità della sferetta in corrispondenza rispettivamente del piano superiore e del davanzale della finestra si ha:

$$\begin{cases} \frac{v_{xA} + v_{xB}}{2} \cdot t_0 = h \rightarrow v_{xB} \cong 10.21 \text{ m/s} \\ v_{xB} - v_{xA} = g \cdot t_0 \end{cases}$$

La velocità di impatto con il marciapiede vale:

$$v_{x\max} = v_{xB} + g \frac{t_1}{2} \cong 20.02 \text{ m/s}$$

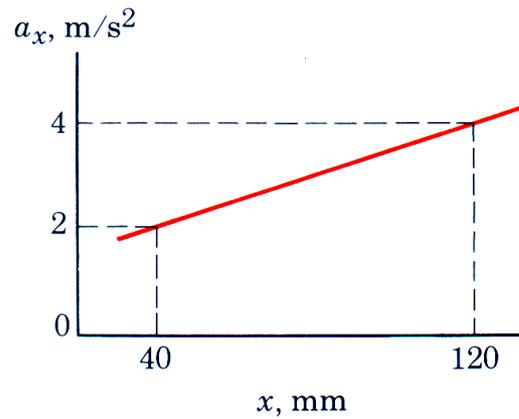
In caduta libera, l'altezza H necessaria per avere all'impatto una velocità v_{\max} vale:

$$H = \frac{v_{\max}^2}{2g} \cong 20.43 \text{ m}$$

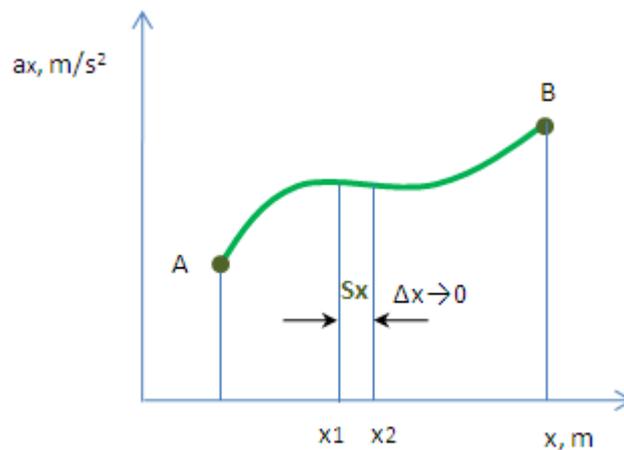


Esempio 6.16

A particle moves along the positive x -axis with an acceleration a_x which increases linearly as x as shown on the graph for an interval of its motion. If the velocity of the particle at $x = 40$ mm is 0.4 m/s, determine the velocity at $x = 120$ mm.



É facile riconoscere che l'area sottesa alla curva accelerazione-spostamento rappresenta la semidifferenza tra il quadrato delle velocità agli estremi dell'intervallo considerato.



Infatti:

$$s_x \cong \bar{a}_x \cdot \Delta x \quad \text{Se } \Delta x \rightarrow 0 \text{ è lecito porre } \bar{a}_x = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

Da cui per sostituzione si ottiene:

$$S_x = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cdot \Delta x = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cdot \bar{v}_x \cdot \Delta t = (v_2 - v_1) \cdot \bar{v}_x$$

Poiché $\Delta x \rightarrow 0$ è lecito porre $\bar{v}_x = \frac{v_2 + v_1}{2}$ da cui $S_x = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

Sommando tutte le areole elementari S_x fino ad ottenere l'area sottesa lungo il tratto AB, si ottiene:

$$S_{AB} = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$$

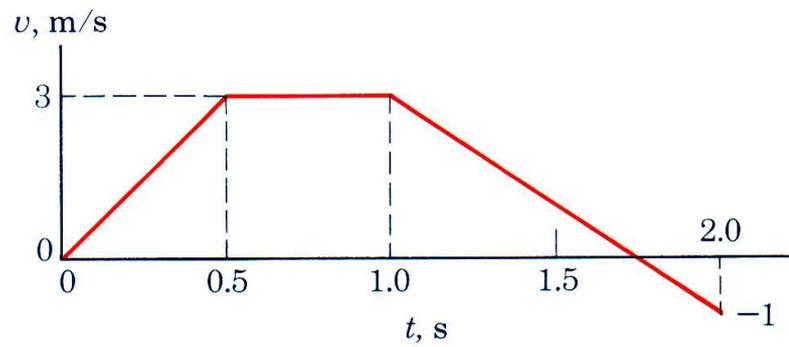
Tornando ai dati dell'esemplificazione proposta si ha:

$$\bar{a} \cdot \Delta x = \frac{1}{2}(v_{x120}^2 - v_{x40}^2) \rightarrow 3 \cdot 0.08 = \frac{1}{2}(v_{x120}^2 - 0.4^2) \rightarrow v_{x120} = 0.8 \text{ m/s}$$

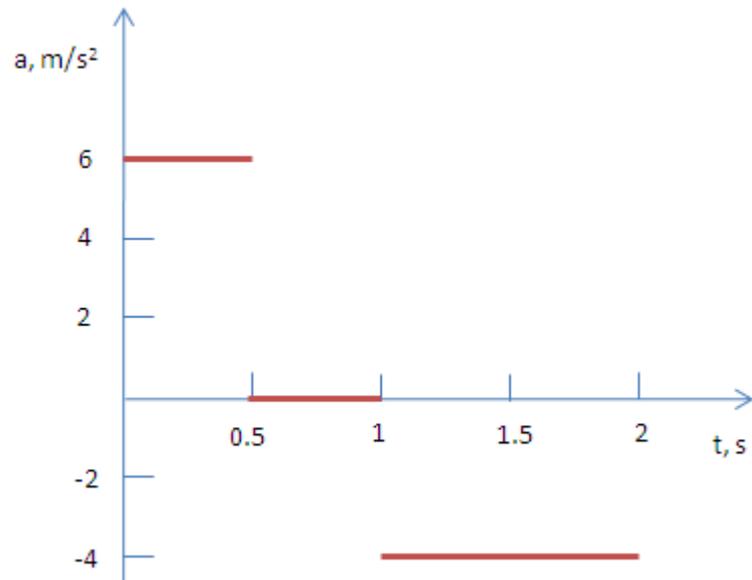


Esempio 6.17

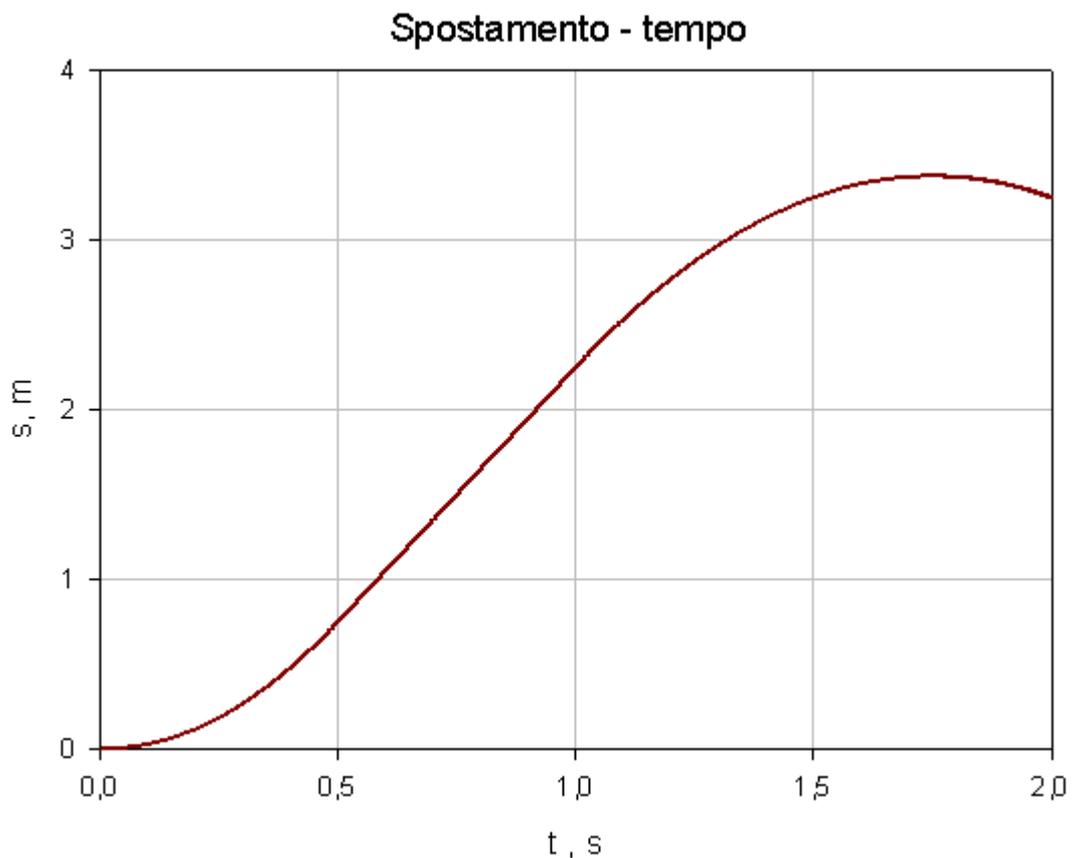
A particle starts from rest at $x = -2$ m and moves along the x -axis with the velocity history shown. Plot the corresponding acceleration and displacement histories for the two seconds. Find the time t when the particle crosses the origin.



Tracciamo dapprima il grafico accelerazione-tempo:



E successivamente il grafico spostamento-tempo:



Dopo 0.5 secondi la particella si è spostata di 0.75 m. Infatti:

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}6 \cdot 0.5^2 = 0.75 \text{ m}$$

Lo spostamento, in funzione del tempo, nel secondo tratto vale:

$$s_2(t) = s_1 + v \cdot (t - 0.5) \quad 0.5 \leq t \leq 1$$

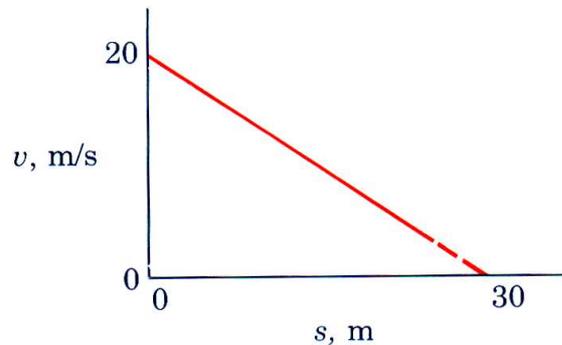
La particella passa attraverso l'origine dell'asse x quando $s_2 = 2 \text{ m}$, ossia la tempo t pari a:

$$t = \frac{s_2 - s_1}{v} + 0.5 \cong 0.917 \text{ s}$$



Esempio 6.18 *

If the velocity v of a particle along a straight line decreases linearly with its displacement s from 20 m/s to a value approaching zero at $s = 30$ m, determine the acceleration a of the particle when $s = 15$ m and show that the particle never reaches the 30-m displacement.



La velocità in funzione dello spostamento s , indicati con v_0 e s_f rispettivamente la velocità iniziale e lo spostamento finale (30 m), vale:

$$v(s) \equiv \frac{ds}{dt} = v_0 - \frac{v_0}{s_f} s \quad (6.10)$$

Il moto della particella è retto pertanto dalla seguente equazione differenziale¹:

$$\ddot{s} = -\frac{v_0}{s_f} \dot{s} + v_0 \quad (6.11)$$

La cui soluzione generale vale:

$$s = s_f - k \cdot \exp\left(-\frac{v_0}{s_f} t\right)$$

Poiché per $t = 0$ deve essere $s = 0$ e immediato ricavare il valore della costante k . Si ha:

$$k = -s_f \rightarrow s = s_f - s_f \cdot \exp\left(-\frac{v_0}{s_f} t\right)$$

Lo spostamento $s = s_f$ non può che essere raggiunto in un tempo tendente a infinito!

Dalla (6.10), derivando rispetto al tempo si ottiene l'espressione dell'accelerazione:

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = -\frac{v_0}{s_f} \frac{ds}{dt} \quad (6.12)$$

Sostituendo la (6.10) nella (6.12) si ottiene l'espressione dell'accelerazione in funzione dello spostamento:

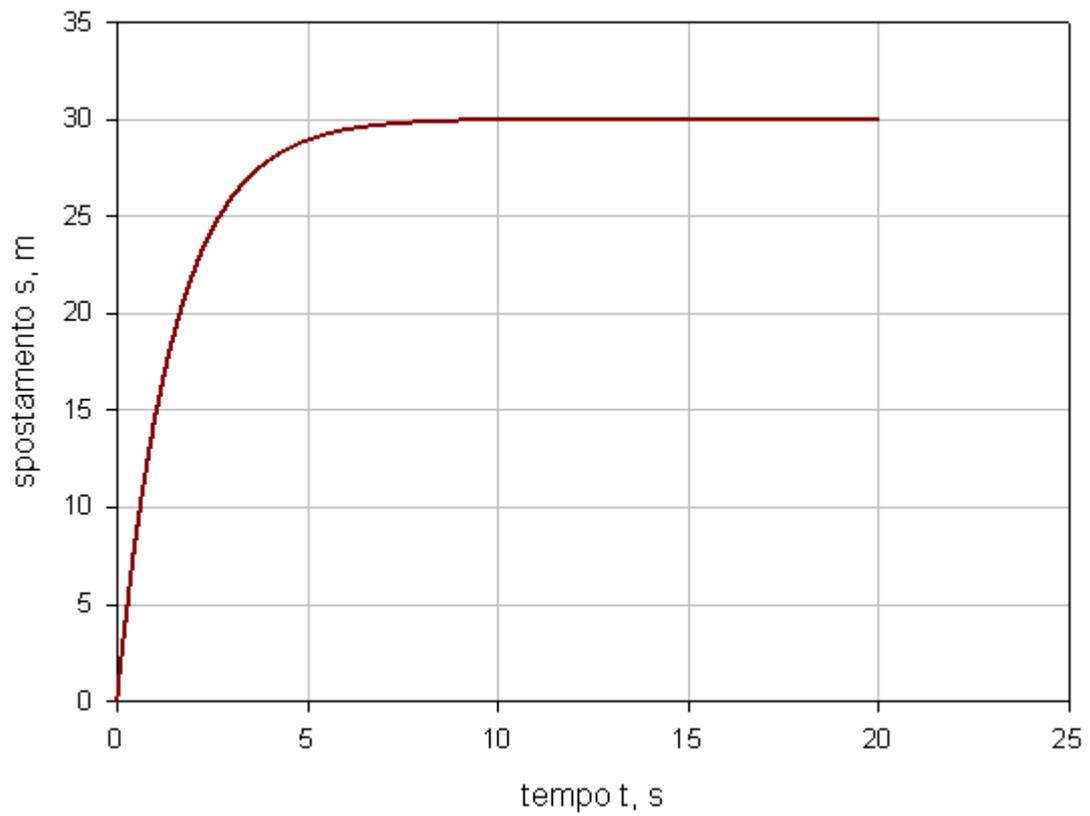
$$a(s) = -\frac{v_0}{s_f} \left(v_0 - \frac{v_0}{s_f} s \right)$$

In corrispondenza di uno spostamento $s = 15$ m si ha un'accelerazione pari a:

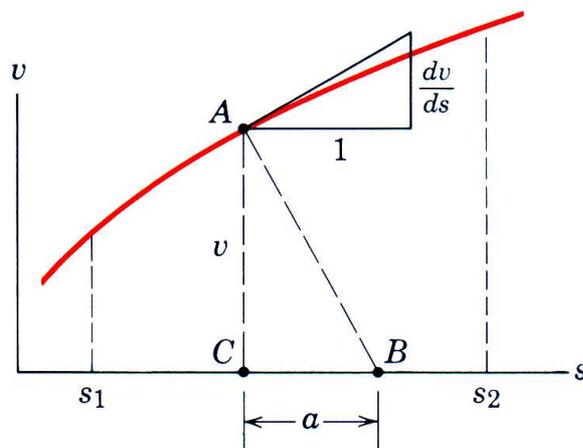
$$a = -\frac{20}{30} \left(20 - \frac{20}{30} 15 \right) = -\frac{20}{3} \text{ m/s}^2$$

¹ Con \ddot{s} e \dot{s} si sono indicate rispettivamente la derivata seconda e la derivata prima, rispetto al tempo, dello spostamento s .

Grafico spostamento-tempo



L'accelerazione in corrispondenza di uno spostamento $s = 15$ m, si può determinare direttamente dal grafico velocità-spostamento, come di seguito riportato:



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$
$$a = -\frac{20}{30} \left(20 - \frac{20}{30} \cdot 15 \right) = -\frac{20}{3} \text{ m/s}^2$$



7. Il moto in due dimensioni

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito le tre grandezze cinematiche: *vettore posizione*, *velocità* ed *accelerazione* con riferimento ad un moto lungo una linea retta.

Ora applicheremo quelle definizioni a punti materiali che si muovono in un piano ovvero in due dimensioni. In tale situazione il carattere vettoriale delle grandezze cinematiche si manifesterà in modo più chiaro, infatti, nel moto in due dimensioni la velocità e l'accelerazione, come vedremo, non giacciono necessariamente sulla medesima retta.

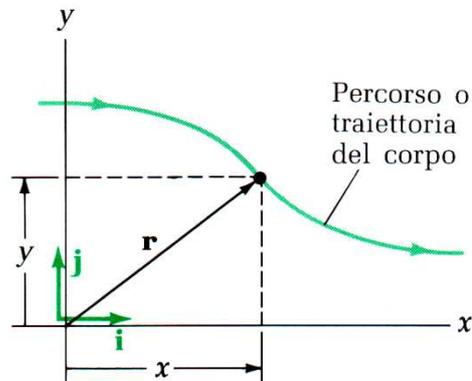
7.1 Velocità ed accelerazione

Il vettore posizione \mathbf{r} , anche nel moto piano, localizza un punto rispetto all'origine di un sistema di riferimento.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (7.1.1)$$

ove x e y sono le coordinate del corpo.

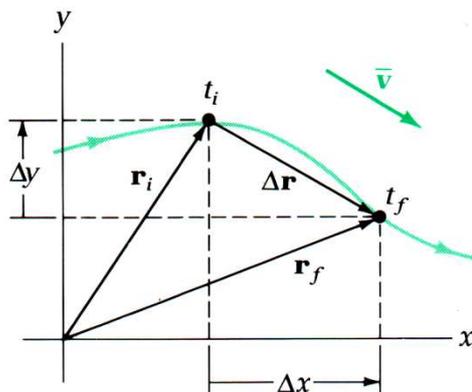
Fig. 7.1. 1



L'insieme dei punti del piano occupati dal corpo successi mantere per effetto del suo moto prende il nome di percorso o traiettoria.

Lo spostamento di un corpo lungo la sua traiettoria, nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ è la differenza tra i vettori posizione rispettivamente al tempo t_f e t_i

Fig. 7.1. 2



$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i = (x_f \mathbf{i} + y_f \mathbf{j}) - (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j}) = (x_f - x_i) \mathbf{i} + (y_f - y_i) \mathbf{j} \quad (7.1.2)$$

Ponendo $\Delta x = (x_f - x_i)$ e $\Delta y = (y_f - y_i)$ si ottiene:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$$

Velocità

La *velocità media* $\bar{\mathbf{v}}$ di un corpo nell'intervallo di tempo Δt è pari al rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo stesso:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} = \bar{v}_x \mathbf{i} + \bar{v}_y \mathbf{j} \quad (7.1.3)$$

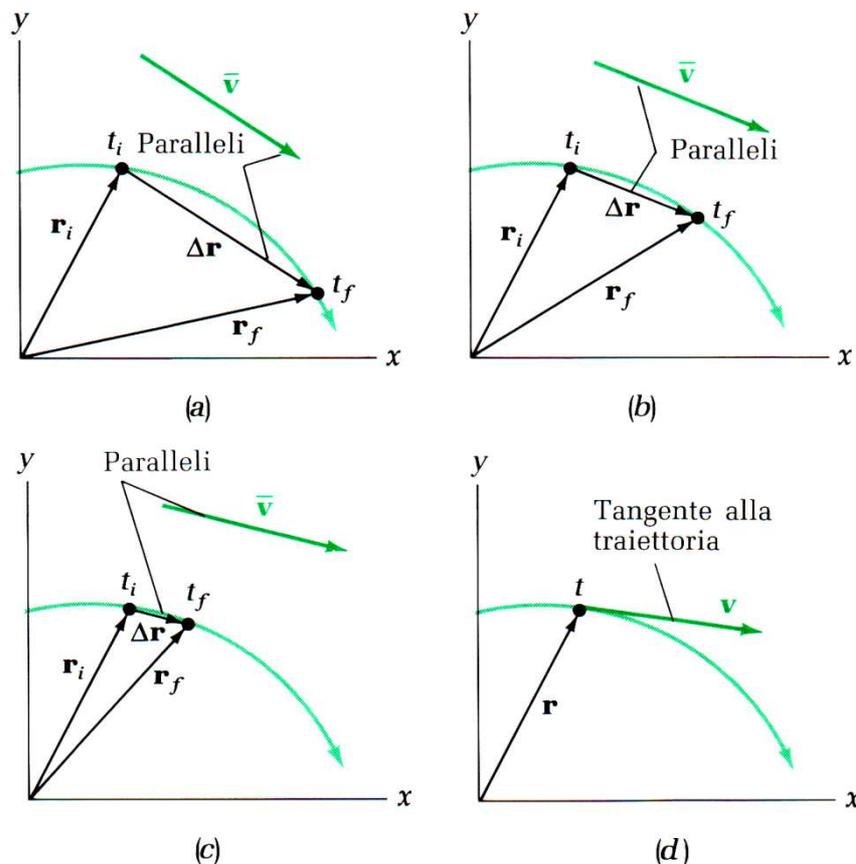
Dalla (7.1.3) è immediato riconoscere che la direzione della velocità media è la stessa di $\Delta \mathbf{r}$ come illustrato in Fig. 7.1. 2

La *velocità istantanea*, al solito, è definita come il limite a cui tende la velocità media quando l'intervallo di tempo considerato tende a zero. Pertanto si ha:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (7.1.4)$$

La Fig. 7.1. 3 mostra questo passaggio al limite rende ragione del fatto che la velocità \mathbf{v} , in qualunque punto della traiettoria di un corpo, è diretta parallelamente alla retta tangente alla traiettoria stessa ed è rivolta nel senso del moto.

Fig. 7.1. 3



Il passaggio al limite della (7.1.4) può essere formulato esprimendo $\Delta \mathbf{r}$ tramite le sue componenti. Si ha pertanto:

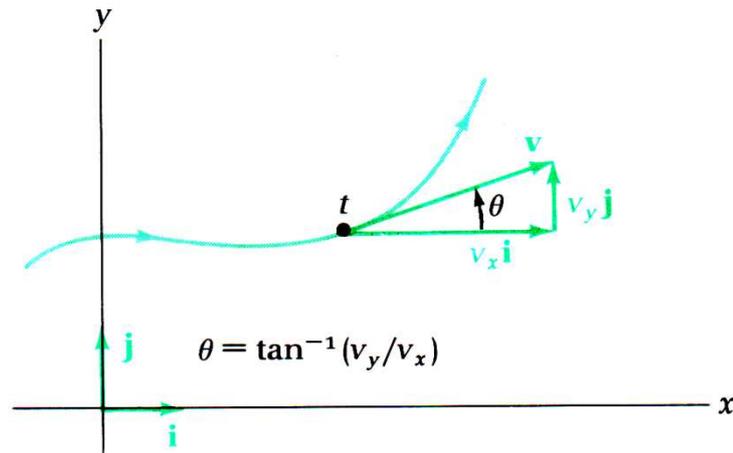
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \mathbf{j} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \quad (7.1.5)$$

La velocità scalare v , ovvero il modulo del vettore velocità, vale:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7.1.6)$$

La direzione in cui si muove il corpo, in un istante qualsiasi, è individuata dall'angolo θ compreso¹ tra il vettore velocità e l'asse x .

Fig. 7.1. 4



Le componenti della velocità sono pari a:

$$v_x = v \cos \theta \quad v_y = v \sin \theta \quad (7.1.7)$$

Accelerazione

L'*accelerazione media* $\bar{\mathbf{a}}$ di un corpo in un intervallo di tempo Δt :

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{j} = \bar{a}_x \mathbf{i} + \bar{a}_y \mathbf{j} \quad (7.1.8)$$

L'accelerazione è definita come il limite a cui tende l'accelerazione media quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (7.1.9)$$

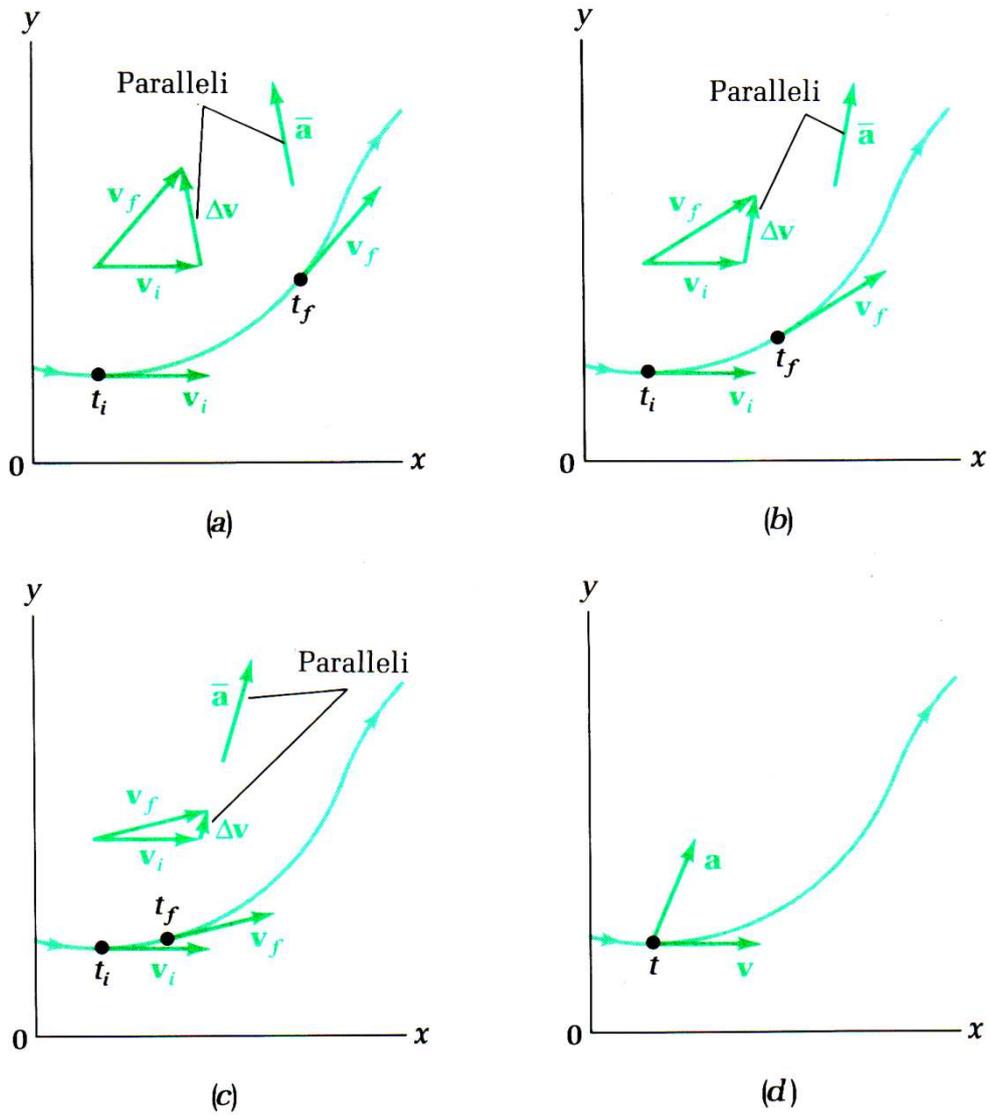
Tenuta presente le (7.1.5) e (7.1.8) si ha:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{j} \right) = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) \mathbf{j} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \quad (7.1.10)$$

La figura seguente illustra graficamente il passaggio al limite della (7.1.9): nel passare da (a) a (c) gli intervalli di tempo diventano sempre più brevi (si mantiene fisso t_i e si fa tendere progressivamente t_f a t_i); passando al limite \mathbf{v}_f tende a \mathbf{v}_i ed ecco perché in (d) le due velocità vengono indicate semplicemente con \mathbf{v} .

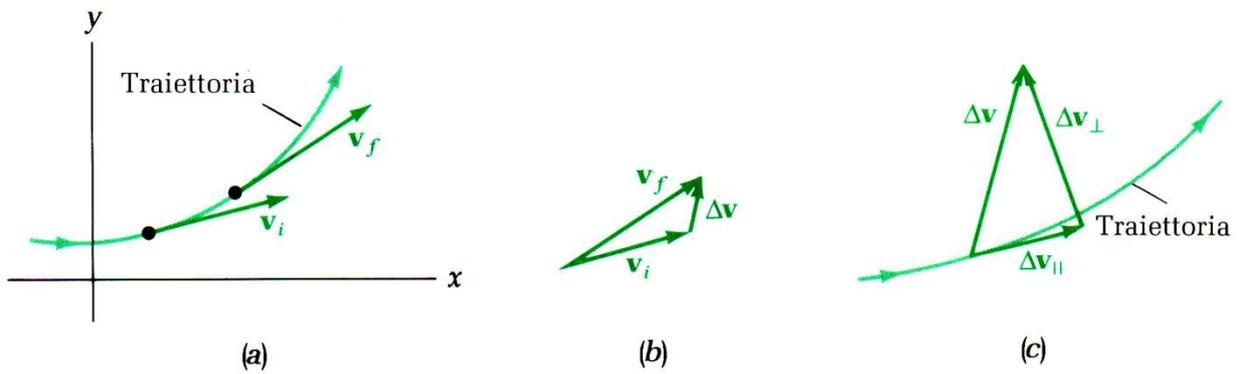
¹ L'angolo θ è positivo quando il versore \mathbf{i} deve ruotare in senso antiorario per sovrapporsi al vettore \mathbf{v}

Fig. 7.1. 5



L'accelerazione \mathbf{a} e quindi anche $\Delta\mathbf{v}$ possono sempre essere scomposte in due direzioni ortogonali, una tangente alla traiettorie e una ad essa normale.

Fig. 7.1. 6



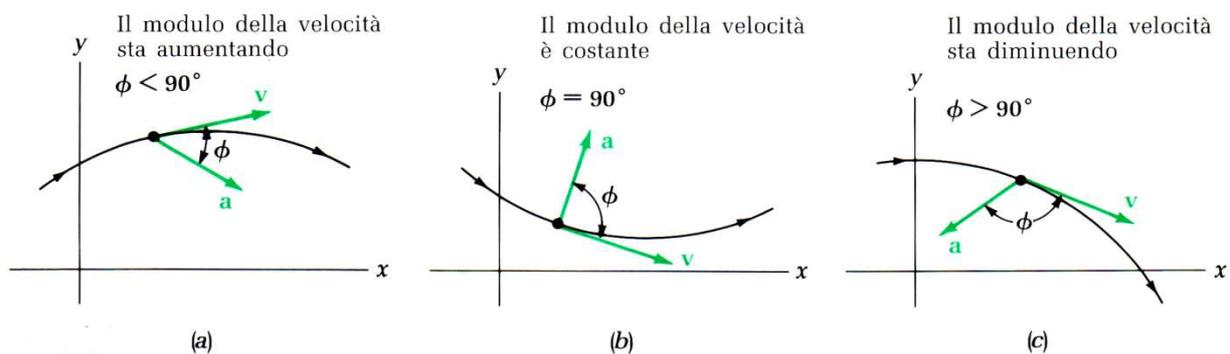
Nella Fig. 7.1. 6 v_f è maggiore, in modulo, di v_i : il modulo della velocità sta aumentando. In questo caso Δv_{\parallel} ha il medesimo verso di v ed a ha una componente positiva nella direzione di v (a è diretta *parzialmente* nella direzione di v).

Se il modulo della velocità di un corpo è costante, $\Delta v_{\parallel} = 0$ ed a non ha una componente parallela a v .

Infine se il modulo della velocità di un corpo diminuisce, Δv_{\parallel} ha verso opposto a v , ed a ha una componente negativa nella direzione di v .

La Fig. 7.1. 7 mostra le possibili relazioni tra la velocità e l'accelerazione di un corpo che percorre una traiettoria piana.

Fig. 7.1. 7



In (a) il modulo della velocità del corpo sta aumentando e quindi l'angolo ϕ compreso tra v ed a è minore di 90° . In (b) il modulo della velocità è costante quindi $\phi = 90^\circ$ e v ed a sono perpendicolari.

Infine in (c) il modulo della velocità sta diminuendo e quindi ϕ è maggiore di 90° .

7.2 Moto piano con accelerazione costante: il moto del proiettile

Il generico vettore velocità v può sempre essere scomposto in due componenti fra loro ortogonali secondo quanto indicato in Fig. 7.1. 4. Si ha pertanto:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \quad (7.2.1)$$

Il generico moto piano risulta pertanto scomposto in due moti rettilinei ortogonali.

Ritenuta costante l'accelerazione, e tenuta presente la (6.1) si ottiene:

$$\mathbf{v} = (v_{x0} + a_x t) \mathbf{i} + (v_{y0} + a_y t) \mathbf{j} \quad (7.2.2)$$

Anche il vettore posizione r può essere scomposto in due direzioni ortogonali secondo quanto indicato dalla Fig. 7.1. 1. Si ha pertanto:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_y = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} \quad (7.2.3)$$

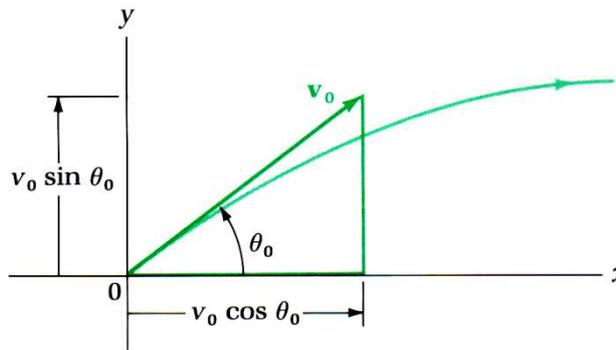
Ritenuta costante l'accelerazione, e tenuta presente la (6.4) si ha:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \quad (7.2.4)$$

Il moto del proiettile

Consideriamo il moto di un proiettile che venga lanciato con una velocità iniziale v_0 formante un angolo θ_0 con il verso positivo dell'asse delle ascisse.

Fig.7.2. 1



Considerata trascurabile la resistenza dell'aria il moto può pertanto essere scomposto in un moto orizzontale, privo di accelerazione e con velocità $v_0 \cos \theta_0$, e in un moto verticale, con velocità iniziale $v_0 \sin \theta_0$, sottoposto ad un'accelerazione a_y pari a $-g \cdot \mathbf{j}$ (g uguale all'accelerazione di gravità 9.8 m/s^2). Le componenti della velocità, in funzione del tempo, hanno pertanto le seguenti espressioni:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \quad v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (7.2.5)$$

Sostituendo le (7.2.5) nelle (7.2.4), una volta che si faccia coincidere l'origine del sistema di riferimento con la posizione iniziale del proiettile si ottiene:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \theta_0)t \\ y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (7.2.6)$$

Da cui, eliminando il tempo, si ha:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}x^2 \quad (7.2.7)$$

La (7.2.7) indica che la traiettoria del moto di un proiettile, trascurando la resistenza dell'aria, è una parabola, passante per l'origine, con asse verticale e concavità rivolta verso il basso. (Fig.7.2. 2)

Sia $y = ax^2 + bx$ l'equazione di una parabola ad asse verticale e passante per l'origine, il vertice V ha coordinate pari a:

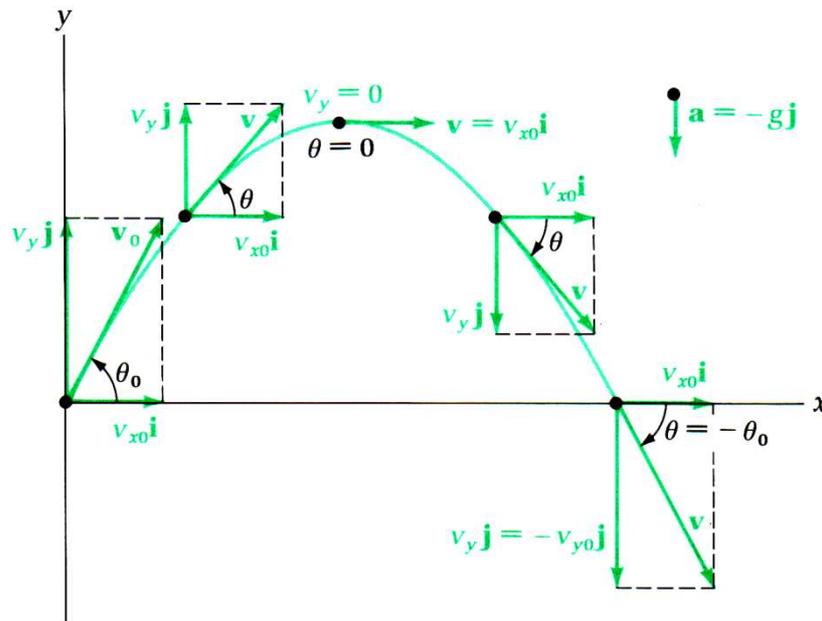
$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right) \quad (7.2.8)$$

L'altezza massima h_m del proiettile corrisponde allora alla ordinata del vertice, mentre la gittata R (la distanza orizzontale percorsa dal proiettile tra il punto di lancio e il punto in cui, nel moto discendente, ripassa per $y = 0$) è pari, per simmetria, al doppio dell'ascissa del vertice.

Posto nella (7.2.8):

$$a = -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad b = \tan \theta_0$$

Fig.7.2. 2



L'altezza massima h_m e la gittata R valgono rispettivamente:

$$h_m = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} \quad (7.2.9)$$

$$R = \frac{2(v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \quad (7.2.10)$$

Dalle (7.2.9) e (7.2.10) è immediato riconoscere che, a parità di velocità iniziale, l'altezza massima e la gittata massima si raggiungono in corrispondenza di angoli θ_0 pari, rispettivamente, a 90° e 45° .

Le (7.2.9) e (7.2.10), ricavate in precedenza solamente tramite l'analisi della traiettoria parabolica, possono ottenersi anche da semplici considerazioni cinematiche.

Nel punto di massima altezza, il proiettile ha una componente verticale della velocità pari a zero. Il tempo impiegato ad annullare tale velocità vale:

$$t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (7.2.11)$$

Sostituendo la (7.2.11) nella seconda delle (7.2.6) si ottiene l'espressione dell'altezza massima raggiunta dal proiettile:

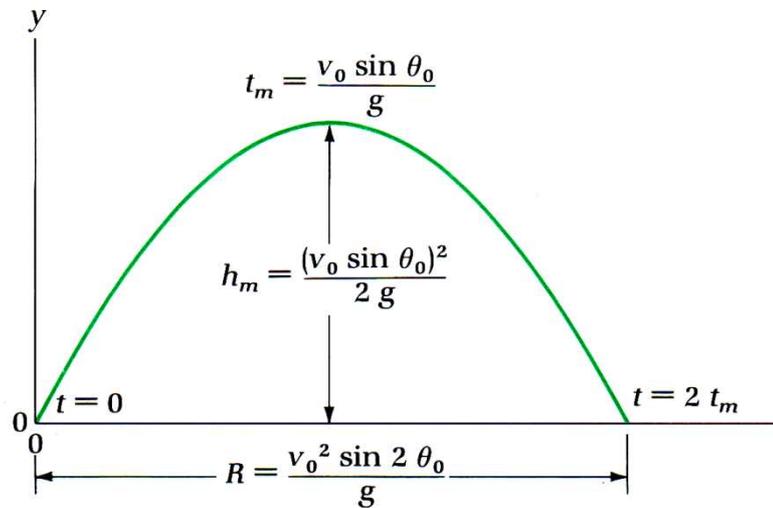
$$h_m = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} \quad (7.2.12)r$$

Per semplici considerazioni di simmetria la gittata massima è pari all'ascissa x in corrispondenza di un tempo pari a $t = 2t_m$.

Sostituendo pertanto nella prima delle (7.2.6) il valore $t = 2t_m$ si ottiene il valore della gittata R .

$$R = \frac{2(v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \quad (7.2.13)r$$

Fig.7.2. 3

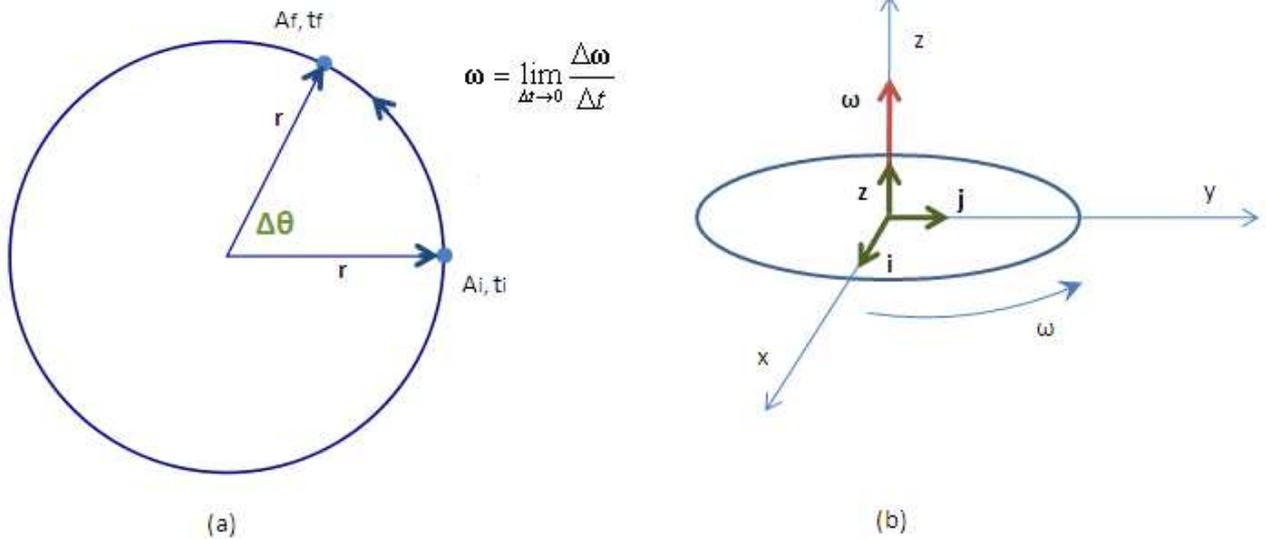


7.3 Il moto circolare uniforme

Il moto circolare è il moto di un punto che si muove lungo una circonferenza.

Il modulo della velocità angolare *media* $\bar{\omega}$ è il rapporto tra l'angolo "spazzato" da un vettore r che ruota e il tempo impiegato a compiere tale rotazione.

Fig.7.3. 1



$$\bar{\omega} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (7.3.1)$$

Il modulo della velocità angolare istantanea ω è sempre definita dalla (7.3.1) una volta che si faccia tendere a zero l'intervallo di tempo considerato.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (7.3.2)$$

È possibile definire, per la velocità angolare, anche una direzione ed un verso, conferendole quindi le caratteristiche di un vettore (Fig.7.3. 1 b). Come direzione si sceglie quella dell'asse di rotazione, ovvero quella normale al piano di rotazione, mentre il verso è diretto verso l'osservatore (dai piedi verso la testa) che vede una rotazione antioraria (regola della mano destra).

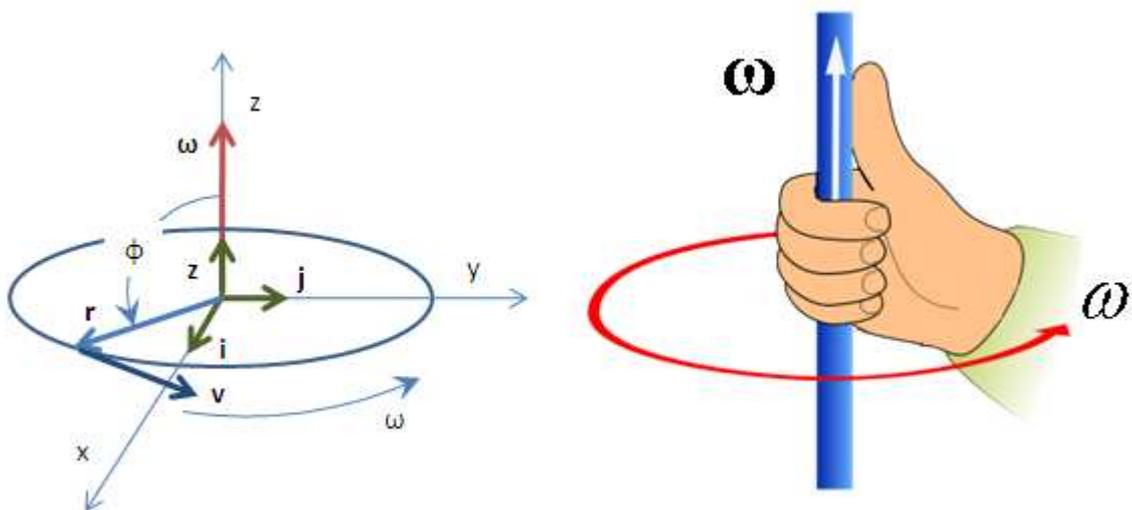
Definito il vettore ω , il vettore velocità di un punto descrivente una traiettoria circolare di raggio r con velocità angolare ω è pari, come giustificheremo meglio in seguito, al prodotto vettoriale:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.3.3)$$

E il modulo di tale velocità, dato che il vettore r e il vettore ω sono fra loro ortogonali, vale:

$$v = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{r}| \sin \phi = \omega \cdot r \quad (7.3.4)$$

Fig.7.3. 2



Un corpo si muove secondo un moto circolare *uniforme* se percorre una circonferenza con velocità angolare costante e pari alla sua velocità angolare media.

Dalla (7.3.4) si deduce che se un corpo si muove secondo un moto circolare uniforme il *modulo* del vettore velocità si mantiene costante nel tempo.

Velocità periferica nel moto circolare uniforme

Nella (7.3.3) abbiamo definito la velocità di un punto, che si muove di moto circolare, come il prodotto vettoriale tra il vettore ω e il vettore posizione r ovvero il vettore che dal centro O della traiettoria congiunge il punto stesso. Nel seguito introdurremo il vettore velocità come risultato di un passaggio al limite.

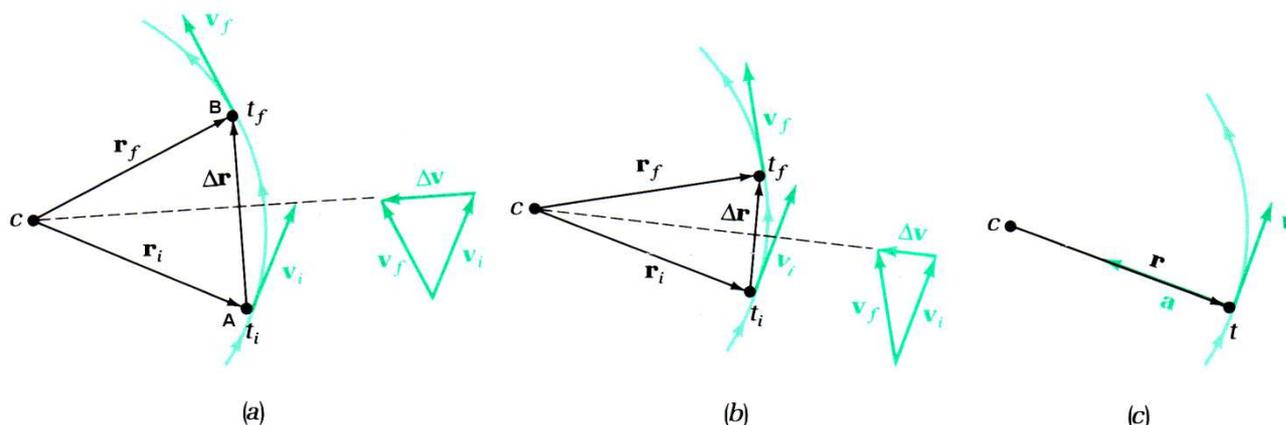
Con riferimento alla Fig.3. 3 (a), indicati con r_f ed r_i i vettori posizione rispettivamente all'istante t_f e t_i , la velocità media è definita, in accordo con la (7.1.3), come:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Considerando un intervallo di tempo infinitesimo, con un passaggio al limite, si ottiene, al solito, la velocità istantanea:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (7.3.5)$$

Fig.7.3.3



Nella (7.3.5), poiché Δt è infinitesimo è lecito confondere l'arco AB con la corda sottesa, da cui:

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{AB} = \widehat{AB} \rightarrow \Delta r = r \cdot \Delta \theta \quad (7.3.6)$$

Sostituendo la (7.3.6) nella (7.3.5) si ottiene infine:

$$v = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = r \cdot \omega \quad (7.3.7)$$

O anche, indicando con Δs l'arco corrispondente alla corda Δr :

$$v = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{r \cdot \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (7.3.8)$$

Ecco pertanto che, poiché il vettore v deve essere perpendicolare al vettore radiale di posizione r e al vettore ω definito in precedenza, la (7.3.3) risulta pienamente giustificata.

Accelerazione nel moto circolare uniforme

In precedenza abbiamo stabilito che l'accelerazione di un punto che percorre una traiettoria curva è sempre diretta verso la concavità della traiettoria e che, se il modulo della velocità è costante, \mathbf{a} è perpendicolare a \mathbf{v} (Fig. 7.1. 7 (b)). La figura Fig.3. 3 illustra, con un passaggio al limite, come ciò avvenga in particolare nel caso di un moto circolare uniforme.

Stabilita direzione e verso dell'accelerazione (direzione radiale, verso centripeto¹) rimane da determinarne il modulo.

Sappiamo, in generale, che:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (7.3.9)$$

Se consideriamo in particolare un moto circolare uniforme, nella Fig.3. 3 (a) possiamo porre:

$$r_f = r_i = R \quad v_f = v_i = v$$

e dai triangoli simili, sempre rappresentati in Fig.3. 3 (a), si ha:

¹ Centripeto ovvero verso il centro: dal latino cèntrum (centro) e pètere (dirigersi).

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{R} \rightarrow \Delta v = v \frac{\Delta r}{R} \quad (7.3.10)$$

Sostituendo la (7.3.10) nella (7.3.9) si ottiene:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (7.3.11)$$

Tenuta presente la prima delle (7.3.5) si ha infine:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (7.3.12)$$

Pertanto in un moto circolare uniforme si ha sempre un'accelerazione centripeta avente un modulo definito dalla (7.3.12).

Nel moto circolare uniforme è utile introdurre due grandezze: la frequenza e il periodo.

- La *frequenza* (f) è definita come il numero di rivoluzioni compiute nell'unità di tempo. Nel Sistema internazionale (SI) l'unità di tempo è il secondo per cui la frequenza viene espressa come il numero di rivoluzioni compiute in un secondo e si misura in hertz (Hz).^{1,2}
- Il *periodo* (T) è definito come il tempo impiegato per compiere una rivoluzione completa. Nel SI il periodo si misura in secondi.

Dalle definizioni precedenti è immediato riconoscere che tra periodo e frequenza esiste al seguente relazione:

$$f = \frac{1}{T} \quad (7.3.13)$$

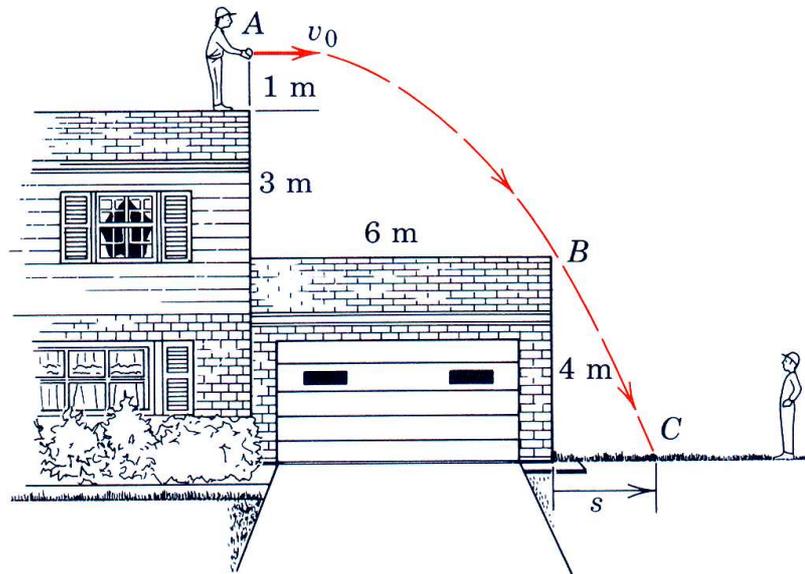
ossia la frequenza è il reciproco del periodo.

¹ L'hertz (Hz) prende il nome dal fisico tedesco Heinrich Rudolf Hertz (Amburgo, 22 febbraio 1857 – Bonn, 1 gennaio 1894) che portò importanti contributi alla scienza, nel campo dell'elettromagnetismo. Suo nipote Gustav Ludwig Hertz vinse il premio Nobel per la fisica nel 1925. Al figlio di Gustav, Carl Hellmuth Hertz si deve lo sviluppo dell'ecografia medica.

² In ambito tecnico la frequenza viene spesso espressa in numero di rivoluzioni compiute in un minuto e si misura in rpm (rounds per minute)

Esempio 7.1

A roofer tosses a small tool toward a coworker on the ground. What is the minimum horizontal velocity v_0 necessary so that the tool clears point B? Locate the point of impact by specifying the distances s shown in the figure.



Dalla (7.2.7) posto $\theta_0 = 0^\circ$ e con riferimento ad un sistema di assi ortogonali con centro in A (asse verticale y diretto verso l'alto, asse orizzontale x diretto verso dx), si ha:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$$

La velocità minima richiesta si ottiene imponendo che il punto B appartenga alla traiettoria.

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 \rightarrow 4 = \frac{9.81}{2v_0^2} 6^2 \rightarrow v_0 \cong 6.64 \text{ m/s}$$

La distanza s si calcola determinando preliminarmente l'ascissa del punto C.

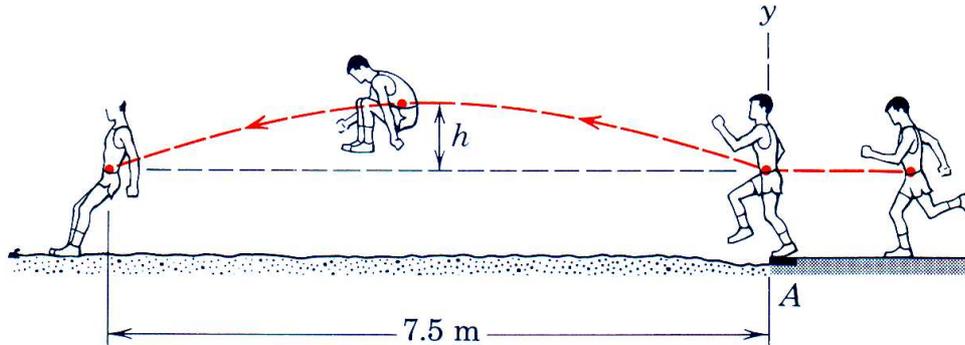
$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 \rightarrow 8 = \frac{9.81}{2 \cdot 6.64^2} x_C^2 \rightarrow x_C \cong 8.48 \text{ m} \rightarrow s = x_C - 6 \text{ m} \cong 2.48 \text{ m}$$



Esempio 7.2

A broadjumper approaches his takeoff board A with a horizontal velocity of 10 m/s. Determine the vertical component v_y of the velocity of his centre of gravity at takeoff for him to make the jump shown.

What is the vertical rise h of his centre of gravity?



Il tempo $2t$ durante il quale il saltatore rimane in volo vale:

$$s = v_0 \cdot 2t \rightarrow 2t = \frac{s}{v_0} = \frac{7.5}{10} = 0.75 \text{ s}$$

L'altezza massima h , per ragioni di simmetria, è raggiunta al tempo t ovvero 0.375 s dallo stacco da terra. La componente verticale della velocità v_y deve essere tale da annullarsi, per effetto della gravità, 0.375 s dopo lo stacco da terra.

$$0 = v_y - g \cdot t \rightarrow v_y \cong 9.81 \cdot 0.375 \cong 3.68 \text{ m/s}$$

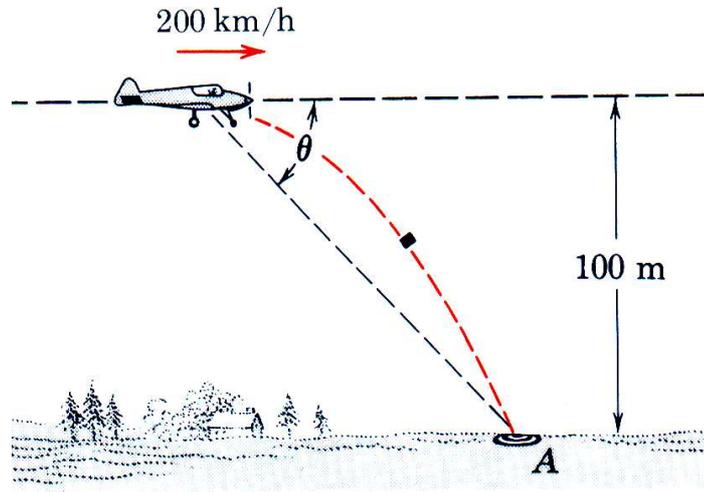
L'altezza massima raggiunta h , si calcola dalla seconda delle (7.2.6):

$$h = v_y t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \cong 6.64 \cdot 0.375 - 0.5 \cdot 9.81 \cdot 0.375^2 \cong 0.69 \text{ m}$$



Esempio 7.3

The pilot of an airplane carrying a package of mail to a remote outpost wishes to release the package at the right moment to hit the recovery location A. What angle θ with the horizontal should the pilot's line of sight to the target make at the instant of release? The airplane is flying horizontally at an altitude of 100 m with a velocity of 200 km/h.



Al solito introduciamo un sistema ortogonale di riferimento avente origine nel punto in cui il pacco postale lascia l'aereo (asse verticale y diretto verso l'alto, asse orizzontale x diretto verso dx). In tale sistema di riferimento, l'ascissa del punto A, dalla (7.2.7), vale:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 \rightarrow 100 = \frac{9.81}{2 \cdot \left(\frac{200}{3.6}\right)^2} x_A^2 \rightarrow x_A \cong 251 \text{ m}$$

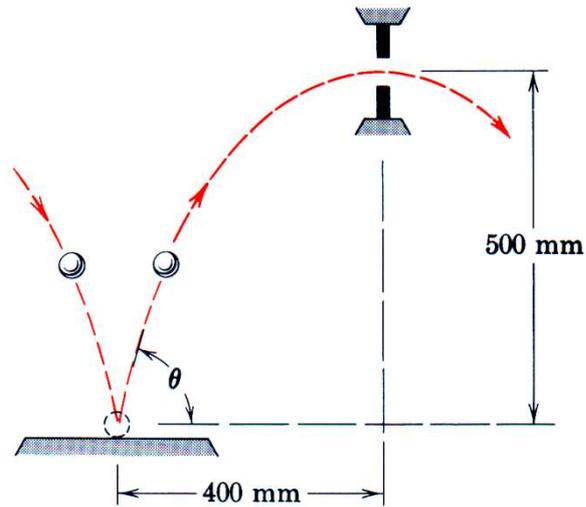
L'angolo θ , indicata con h la quota di 100 m, vale:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{h}{x_A} \right) \cong 21.72^\circ$$



Esempio 7.4

To pass inspection, small ball bearings must bounce through an opening of limited size at the top of their trajectory when rebounding from a heavy plate as shown. Calculate the angle θ made by the rebound velocity with the horizontal and the velocity v of balls as they pass through the opening.



Dalle (7.2.9) e (7.2.10) si ottiene:

$$\begin{cases} h_m = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} \\ R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0.5 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta}{2g} \\ 0.8 = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g} \end{cases} \rightarrow \frac{0.5}{0.8} = \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin(2\theta)} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{0.8} \right) \cong 68.2^\circ$$

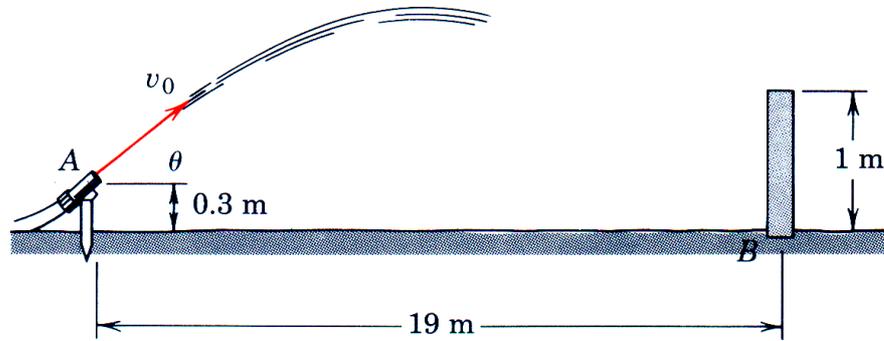
Sostituendo nella (7.2.9) il valore di θ ricavato in precedenza si ottiene il modulo del vettore velocità iniziale:

$$h_m = \frac{(v_0 \sin \theta_0)^2}{2g} \rightarrow 0.5 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta}{2 \cdot 9.81} \rightarrow v_0 \cong 3.4 \text{ m/s}$$



Esempio 7.5

Water is ejected from the water nozzle with a speed $v_0 = 14$ m/s. For what value of the angle θ will the water land closest to the wall after clearing the top? Neglect the effects of wall thickness and air resistance. Where does the water land?



Not to scale

Introduciamo un sistema di riferimento ortogonale con origine in A (asse verticale y diretto verso l'alto, asse orizzontale x diretto verso dx). In tale sistema di riferimento il getto deve passare per il punto di coordinate $(19 \text{ m}; 0.7 \text{ m})$.

Dalla (7.2.7) si ottiene pertanto:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}x^2 \rightarrow 0.7 = 19 \cdot \tan \theta - \frac{9.81}{2 \cdot 14^2 \cdot \cos^2 \theta}19^2$$

Posto:

$$\tan \theta = k \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

Si ottiene un'equazione di secondo grado in k :

$$9.03k^2 - 19k + 9.73 = 0$$

Le cui due soluzioni permettono di determinare gli angoli θ che permettono al getto di passare per il punto di coordinate $(19\text{m}; 0.7\text{m})$.

$$\theta_1 = 50.73^\circ \quad \theta_2 = 41.38^\circ$$

Poiché il problema chiede di determinare l'angolo in corrispondenza del quale il getto atterra il più vicino possibile al muro, la soluzione è evidentemente θ_1

Dalla (7.2.7) posto $\theta_0 = \theta_1$, e $y = -0.3$ m si ottiene l'ascissa x del punto di impatto del getto con il terreno.

A conti fatti risulta:

$$x = 19.824 \text{ m}$$

Pertanto il getto atterrerà ad una distanza di 0.824 m a destra del muro.



Esempio 7.5

La luna gira attorno alla terra facendo un giro completo in 27.3 giorni. Si assuma che l'orbita sia circolare e abbia un raggio di 385000 km. Qual è il modulo dell'accelerazione della luna verso la terra?

Il periodo T di rivoluzione di 27.3 giorni, espresso in secondi, vale:

$$T = 2.36 \cdot 10^6 \text{ s}$$

La velocità della luna, supposta costante, vale:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3.85 \cdot 10^8}{2.36 \cdot 10^6} \cong 1020 \text{ m/s}$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a = \frac{v^2}{R} \cong \frac{1020^2}{3.85 \cdot 10^8} \cong 0.00273 \text{ m/s}^2$$



Esempio 7.6

Calcolare la velocità di un satellite artificiale della terra supponendo che esso viaggi ad un'altezza h di 140 km al di sopra della superficie terrestre, dove $g = 9.2 \text{ m/s}^2$. Il raggio della terra sia $R = 6360 \text{ km}$.

Come ogni altro oggetto libero nelle vicinanze della superficie terrestre il satellite è soggetto ad una accelerazione g verso il centro della terra. E' questa accelerazione g che gli fa seguire una traiettoria circolare; essendo quindi g un'accelerazione centripeta si ha:

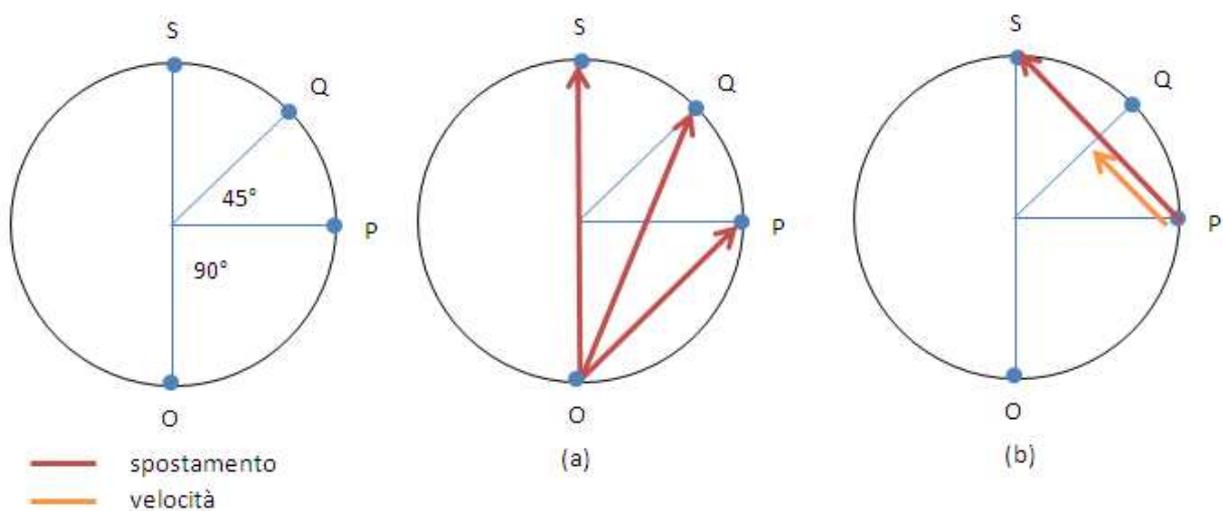
$$g = \frac{v^2}{(R+h)} \rightarrow v \cong 27826 \text{ km/h}$$



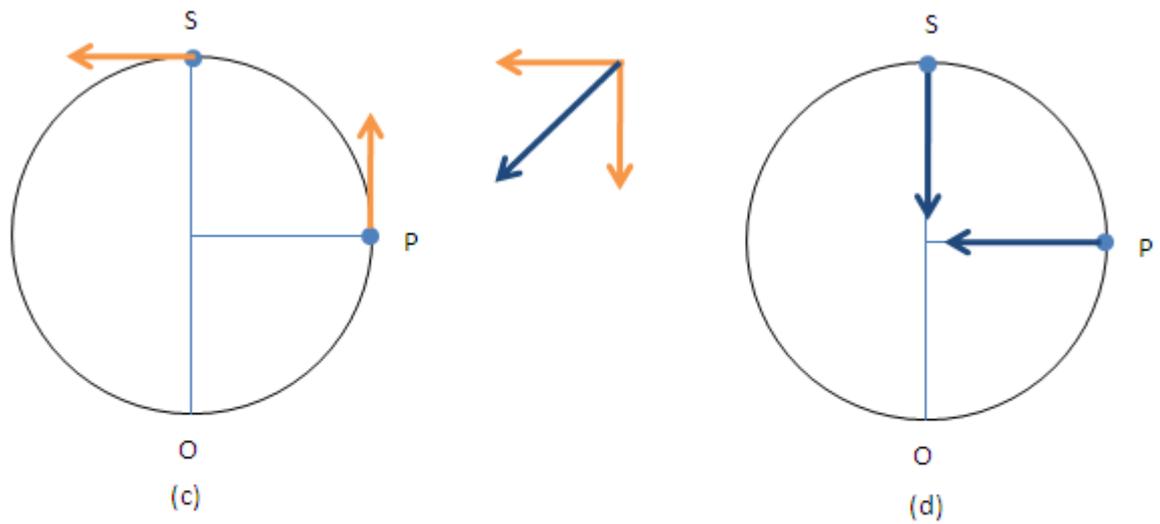
Esempio 7.7

Una particella percorre con velocità costante una traiettoria circolare di raggio 3 m e compie una rivoluzione in 20 s. Trovare:

1. il modulo e la direzione del vettore spostamento 5, 7.5 e 10 s dopo che la particella è partita da O;
2. il modulo e la direzione dello spostamento nell'intervallo di tempo compreso tra il quinto e il decimo secondo;
3. il vettore velocità media nell'intervallo temporale definito al punto precedente;
4. il vettore velocità istantanea agli estremi dell'intervallo temporale definito al punto 2;
5. Il vettore accelerazione media nell'intervallo temporale definito al punto 2;
6. Il vettore accelerazione istantanea agli estremi dell'intervallo temporale definito al punto 2.



- a) I vettori spostamento OP , OQ ed OS sono indicati in (a) e sono inclinati, rispetto all'asse orizzontale diretto verso dx , rispettivamente di 45° , 68° e 90° .
 I moduli dei vettori spostamento valgono:
 $OP = 4.2 \text{ m}$ $OQ = 5.5 \text{ m}$ $OS = 6.0 \text{ m}$
- b) Lo spostamento e il vettore velocità media, nell'intervallo compreso tra il quinto e il decimo secondo, sono rappresentati in (b). I vettori hanno direzione e verso coincidenti e risultano inclinati, rispetto all'orizzontale, di un angolo pari a 135° .
 I moduli del vettore spostamento e velocità media valgono rispettivamente 4.2 m e 0.85 m/s .
- c) Il vettore accelerazione media, nell'intervallo temporale tra il quinto e il decimo secondo, è rappresentato in (c), ha modulo 0.27 m/s^2 ed è inclinato, rispetto all'orizzontale, di un angolo pari a 225° .
- d) Le accelerazioni istantanee, nell'intervallo temporale tra il quinto e il decimo secondo, sono rappresentate in (d) e sono inclinate, rispetto all'orizzontale di 180° in P e di 270° in F.
 I moduli di tali accelerazioni valgono 0.3 m/s^2 .



— accelerazione
 — velocità



Esempio 7.8

Un satellite terrestre si muove su un'orbita circolare a 630 km sopra la superficie della terra. Sapendo che il periodo di rivoluzione è 98 minuti, determinare l'accelerazione di gravità sull'orbita.

$$a = \omega^2 \cdot R \cong \left(\frac{2\pi}{98 \cdot 60} \right)^2 (6360 + 630) \cdot 1000 \cong 7.98 \text{ m/s}^2$$



Esempio 7.9

To simulate a condition of “weightlessness” in its cabin, a jet transport traveling at 800 km/h moves on a sustained vertical curve as shown. At what rate $\dot{\beta}$ in degrees per second should the pilot drop his longitudinal line of sight to effect the desired condition? The maneuver takes place at a mean altitude of 8 km, and the gravitational acceleration may be taken as 9.79 m/s^2 .



Per simulare l'assenza di peso un soggetto deve essere lasciato libero di “scendere” con un'accelerazione pari all'accelerazione di gravità (caduta libera di un ascensore).

Nell'esempio proposto, l'aereo dovrà compiere una traiettoria circolare di raggio R tale che, per effetto della velocità v , si produca in cabina una accelerazione centripeta pari esattamente all'accelerazione di gravità.

Dalla (7.3.12), si calcola il raggio R della traiettoria circolare:

$$a = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a} \cong \frac{222.2\bar{2}}{9.79} \cong 5044 \text{ m}$$

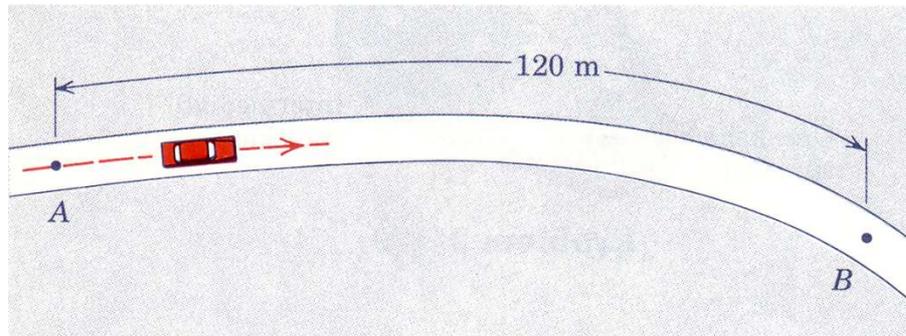
$\dot{\beta}$ coincide con ω , e per la (7.3.7) si ha:

$$\omega = \frac{v}{R} \cong \frac{222.2\bar{2}}{5044} \cong 0.44 \text{ rad/s} \cong 2.52 \text{ deg/sec}$$



Esempio 7.10

A car travels along the level curved road with a speed that is decreasing at a constant rate of 0.6 m/s each second. The speed of the car as it passes point A is 16 m/s. Calculate the magnitude of the total acceleration of the car as it passes point B which is 120 m along the road from A. the radius of curvature of the road at B is 60 m.



Conosciamo il modulo della velocità e dell'accelerazione lungo la traiettoria, nonché lo spazio che si deve percorrere, lungo la traiettoria curvilinea, per passare da A a B.

Possiamo immaginare di rettificare il tratto AB, in modo tale da calcolare la velocità dell'auto in B tramite le formule introdotte nel caso del moto rettilineo.

Per prima cosa, sempre con riferimento ad un moto rettilineo equivalente, determiniamo il tempo impiegato dall'auto per compiere un tratto rettilineo pari a 120 m.

$$s = v_A t - \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 120 = 16 \cdot t - 0.5 \cdot 0.6 \cdot t^2 \rightarrow t \cong 9.02 \text{ s}$$

Calcoliamo ora la velocità dell'auto, misurata sul tachimetro, nel punto B.

$$v_B = v_A - a \cdot t \rightarrow v_B \cong 16 - 0.6 \cdot 9.02 \cong 10.6 \text{ m/s}$$

Nel punto B l'auto ha un'accelerazione tangenziale a_T pari a 0.6 m/s² e un'accelerazione centripeta pari a:

$$a_c = \frac{v_B^2}{R} \cong \frac{10.6^2}{60} \cong 1.87 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione risultante è pertanto pari a:

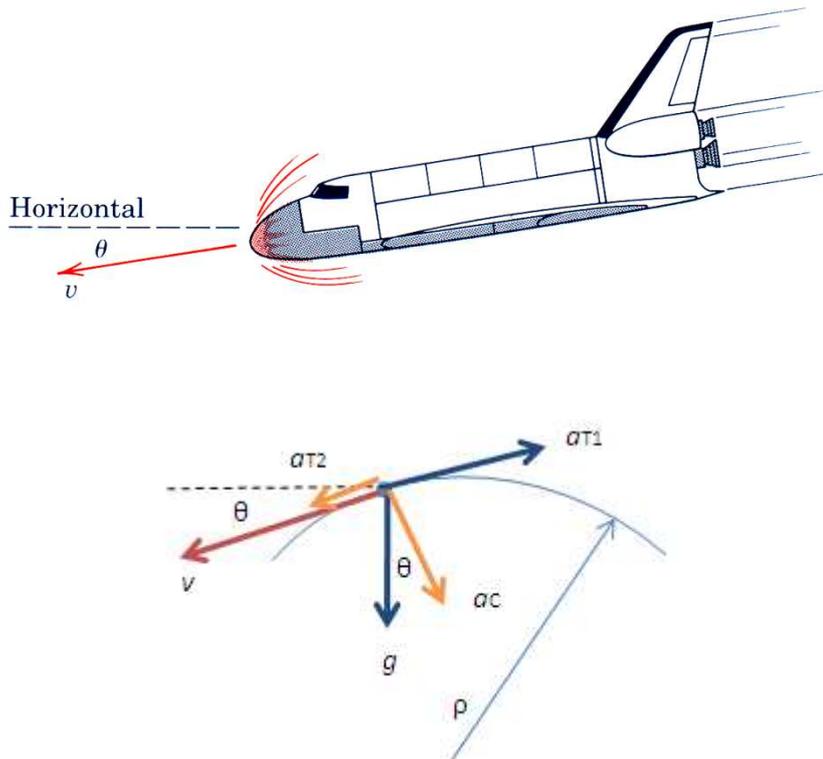
$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} \cong 1.96 \text{ m/s}^2$$



Esercizio 7.11

At certain point in the re entry of the space shuttle into the earth's atmosphere, the total acceleration of the shuttle may be represented by two components. One component is the gravitational acceleration of $g = 9.66 \text{ m/s}^2$ at this altitude. The second component equals 12.90 m/s^2 due to atmospheric resistance and is directed opposite to the velocity.

The shuttle is at an altitude of 48.2 km and has reduced its orbital velocity of 28300 km/h to 15450 km/h in the direction $\theta = 1.5^\circ$. For this instant calculate the radius of curvature ρ of the path and the rate \dot{v} at which the speed is changing.



L'accelerazione centripeta, normale alla traiettoria, vale:

$$a_C = g \cdot \cos \theta \cong 9.66 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione tangenziale, dovuta all'accelerazione di gravità, vale:

$$a_{T2} = g \cdot \sin \theta \cong 0.253 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione tangenziale totale, opposta a v , vale:

$$a = a_{T1} - a_{T2} \cong 12.65 \text{ m/s}^2$$

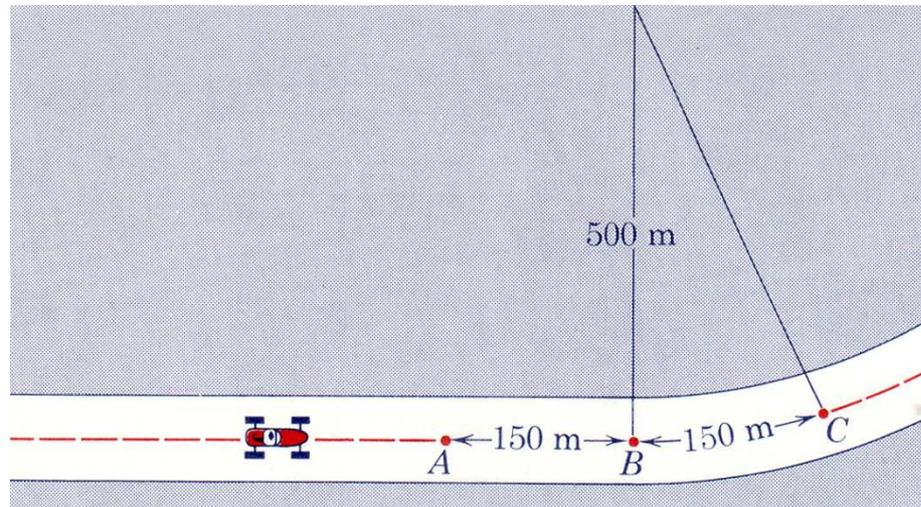
Il raggio di curvatura della traiettoria si valuta in base alla velocità v e all'accelerazione centripeta calcolata in precedenza:

$$a_C = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_C} \cong 1907 \text{ km}$$



Esempio 7.12

A race driver traveling at speed of 250 km/h on straightaway applies his brakes at point A and reduces his speed at a uniform rate to 200 km/h at C in a distance of $150+150 = 300$ m. Calculate the magnitude of the total acceleration of the race car an instant after it passes point B.



Poiché l'accelerazione tangenziale è costante, coincide con l'accelerazione media. Indicato con t il tempo impiegato dall'auto a percorrere il tratto di strada da A a C, si ha:

$$a_T = \frac{v_C - v_A}{t}$$

Il tempo t si ricava "rettificando" il percorso e considerando il moto rettilineo equivalente:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a_T \cdot t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} (v_C - v_A) \cdot t \rightarrow t \cong 4.8 \text{ s}$$

L'accelerazione vale pertanto:

$$a_T = \frac{200 - 250}{3.6 \cdot 4.8} \cong -2.89 \text{ m/s}^2$$

Calcoliamo il tempo t_1 intercorso tra il paggio dell'auto dal punto A al punto B.

$$s = v_A \cdot t_1 + \frac{1}{2} a_T \cdot t_1^2 \rightarrow t_1 \cong 2.27 \text{ s}$$

Il punto B viene raggiunto 2.27 s dopo che l'auto è passata da A. Pertanto la velocità al punto B vale:

$$v_B = v_A + a_T \cdot 2.27 \cong 62.88 \text{ m/s}$$

L'accelerazione centripeta vale:

$$a_C = \frac{v_B^2}{R} \cong \frac{62.5^2}{500} \cong 7.9 \text{ m/s}^2$$

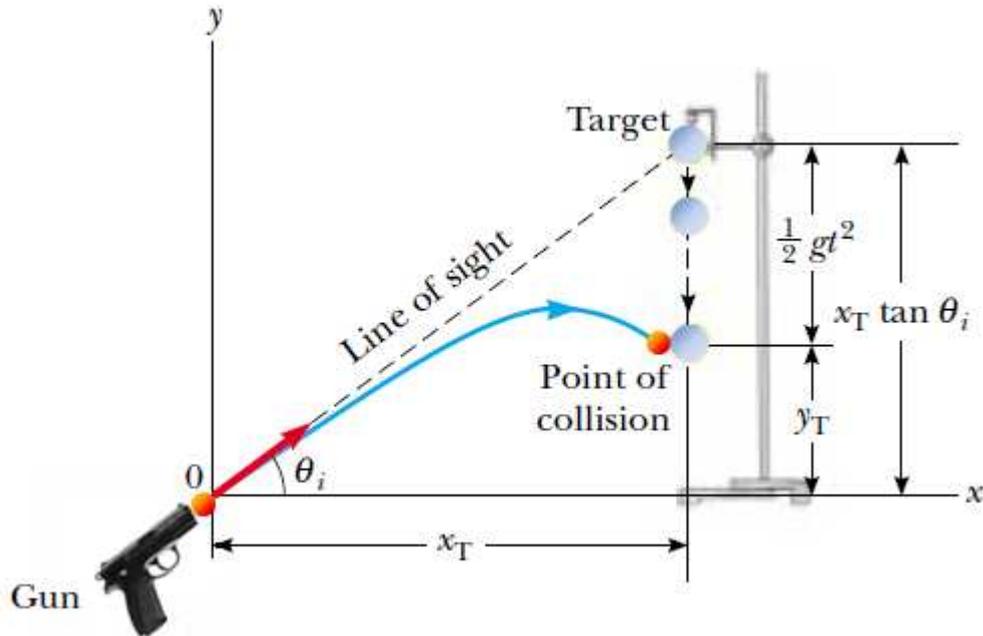
L'accelerazione totale immediatamente dopo B vale:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_C^2} \cong 8.42 \text{ m/s}^2$$



Esempio 7.13

In a popular lecture demonstration, a projectile is fired at a target T in such a way that the projectile leaves the gun at the same time the target is dropped from rest, as shown. Show that if the gun is initially aimed at the stationary target, the projectile hits the target.



Notice that the problem asks for no numbers. The expected result must involve an algebraic argument. Because both objects are subject only to gravity, we *categorize* this problem as one involving two objects in free-fall, one moving in one dimension and one moving in two. Let us now *analyze* the problem. A collision results under the conditions stated by noting that, as soon as they are released, the projectile and the target experience the same acceleration, $a_y = -g$. The figure shows that the initial y coordinate of the target is $x_T \cdot \tan \theta_i$ and that it falls to a position $(1/2)gt^2$ below this coordinate at time t . Therefore, the y coordinate of the target at any moment after release is:

$$y_T = x_T \cdot \tan \theta_i - \frac{1}{2}gt^2$$

Now if we use Equation (7.2.6) to write an expression for the y coordinate of the projectile at any moment, we obtain:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \theta_0)t \\ y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow y_p = x_p \cdot \tan \theta_i - \frac{1}{2}gt^2$$

Thus, by comparing the two previous equations, we see that when the y coordinates of the projectile and target are the same, their x coordinates are the same and a collision results. That is, when $y_T = y_p$, $x_T = x_p$. You can obtain the same result, using expressions for the position vectors for the projectile and target.

To *finalize* this problem, note that a collision can result only when $v_i \cdot \sin \theta_i \geq \sqrt{g \cdot d/2}$ where d is the initial elevation of the target above the floor. If $v_i \cdot \sin \theta_i$ less than this value, the projectile will strike the floor before reaching the target.

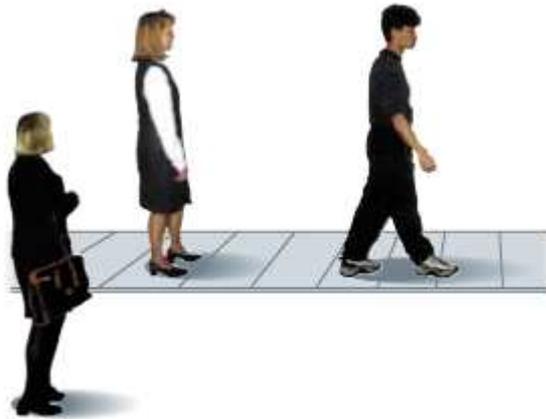


8. Moti relativi

In questo paragrafo illustreremo come il moto di un punto possa essere descritto da vari osservatori ciascuno solidale con un diverso sistema di riferimento.

Consideriamo ad esempio un soggetto A che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v lungo un tapis roulant (Tapis Roulant). Un osservatore, solidale con il tapis roulant vede A muoversi con velocità v , mentre un osservatore "esterno" al tapis roulant vede A muoversi con una velocità maggiore: la velocità v più la velocità di scorrimento del tapis roulant. Entrambi gli osservatori esaminano lo stesso soggetto, ma attribuiscono ad esso velocità differenti! Entrambe le descrizioni del moto sono corrette: le differenze sono dovute ai diversi sistemi di riferimento all'interno dei quali gli osservatori hanno effettuato le loro misurazioni.

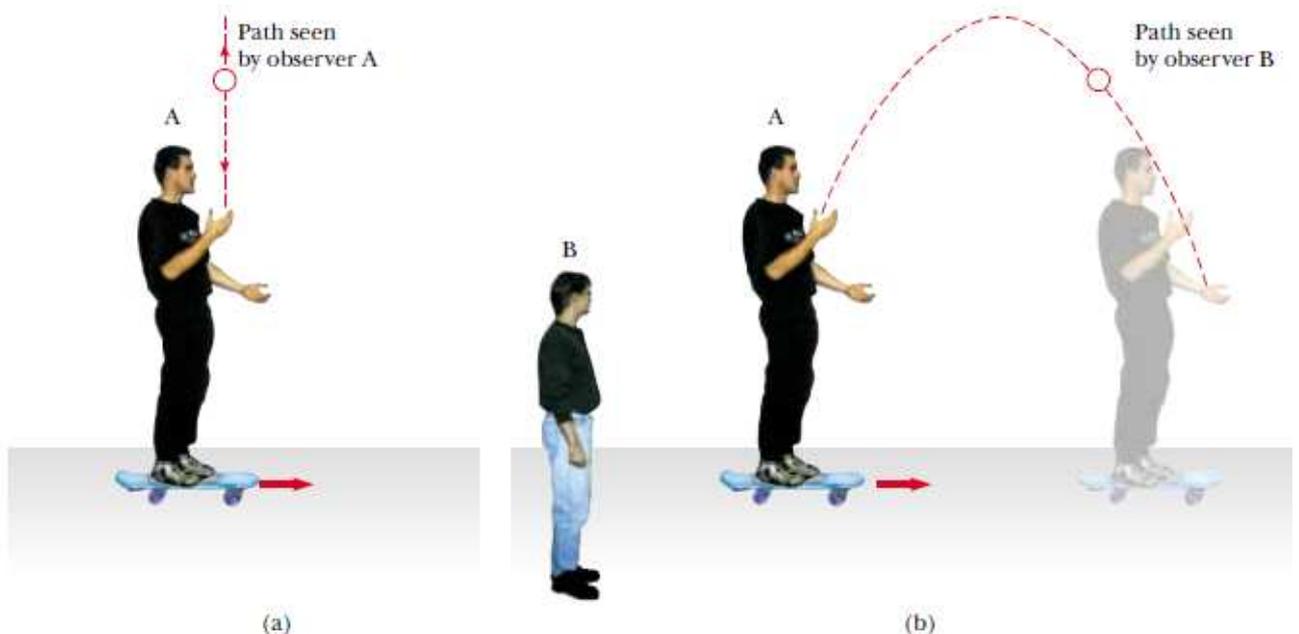
Fig. 8. 1



Two observers measure the speed of a man walking on a moving beltway. The woman standing on the beltway sees the man moving with a slower speed than the woman observing from the stationary floor.

Esaminiamo ora un altro esempio: un soggetto A, in movimento sul proprio skateboard, lancia verticalmente una palla verso l'alto e poi riprenderla.

Fig. 8. 2



L'osservatore A descrive il moto della palla come un moto verticale decelerato in salita e accelerato in discesa.

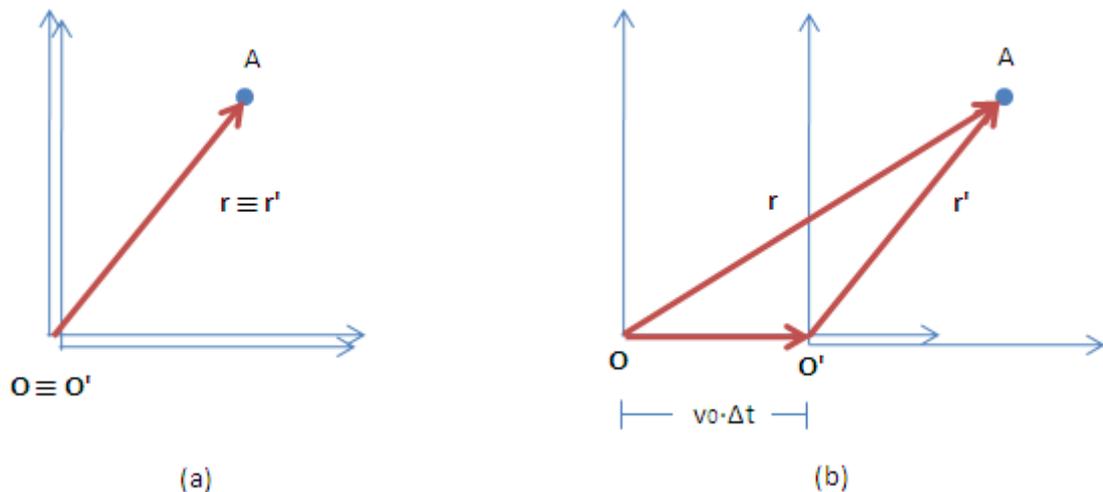
Un osservatore B, fermo sul terreno, vede invece la palla muoversi secondo una traiettoria parabolica. Per questo osservatore la palla inizialmente è dotata di una velocità verticale (fornita da A) e da una velocità orizzontale (la velocità dello skateboard).

8.1 Le trasformazioni di Galileo

Ora affrontiamo il problema per via più generale. Consideriamo un punto A solidale con un sistema di riferimento O' dotato di velocità relativa v_0 costante (verso dx) rispetto ad un sistema di riferimento O ritenuto fisso.

Inizialmente i due sistemi di riferimento siano coincidenti: in questo istante temporale il medesimo vettore posizione individuerà il punto A nei due sistemi. (Fig.8.1. 1a)

Fig.8.1. 1



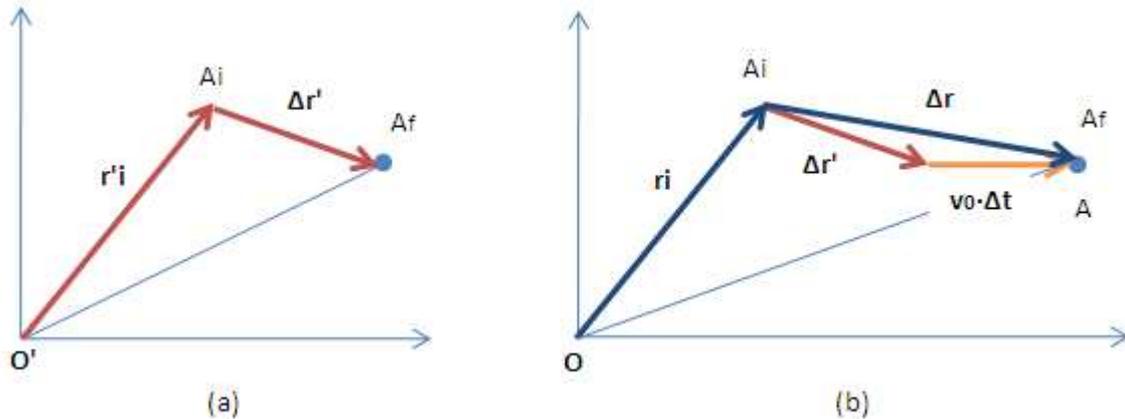
Dopo un certo intervallo di tempo Δt il punto A (fisso rispetto al sistema O') avrà subito una variazione di posizione rispetto al riferimento fisso O. I due vettori posizione r e r' definiti rispettivamente nel riferimento fisso e in quello mobile non sono più coincidenti. Come è facile ricavare dalla Fig.8.1. 1 b, i vettori posizioni definiti in precedenza sono legati dalla seguente relazione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 \cdot \Delta t \quad (8.1.1)$$

Consideriamo ora un punto A che si muova all'interno di un sistema di riferimento O' a sua volta mobile rispetto ad un sistema fisso O. Dopo un certo intervallo di tempo Δt il punto si sposterà da A_i ad A_f nel sistema di riferimento mobile: in tale sistema il vettore che individua la variazione di posizione è $\Delta r'$ (Fig.8.1. 2 b).

Nel sistema di riferimento fisso, la variazione di posizione è diversa ed rappresentata dal vettore Δr ottenuto come somma del vettore $\Delta r'$ (il vettore spostamento nel sistema mobile) e del vettore $\mathbf{v}_0 \cdot \Delta t$ (il vettore spostamento di O' rispetto ad O).

Fig.8.1. 2



Si ha pertanto:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 \cdot \Delta t \quad (8.1.2)$$

da cui:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t} + \mathbf{v}_0 \quad (8.1.3)$$

Considerando poi intervalli di tempo infinitamente piccoli, tenuta presente la (3.6) si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad (8.1.4)$$

dove con \mathbf{v} e \mathbf{v}' si sono indicate rispettivamente le velocità osservate nel sistema di riferimento fisso (velocità assoluta) e in quello mobile (velocità relativa).

Le equazioni (8.1.1) e (8.1.4) sono dette *trasformazioni di Galileo*.¹

In precedenza abbiamo analizzato come il posizionamento di un punto e la velocità ad esso associata appaiono generalmente diverse a secondo del sistema di riferimento considerato. Resta ora aperta ancora una questione: come saranno valutate, da osservatori diversi, le accelerazioni?

Consideriamo ancora un soggetto che si muove con velocità \mathbf{v} e accelerazione \mathbf{a} su un tapis roulant a sua volta dotato di velocità \mathbf{v}_0 (Fig.8.1. 3). Un osservatore solidale con il tapis roulant nota che, dopo un intervallo di tempo Δt , la velocità del soggetto è passata da \mathbf{v}_i a \mathbf{v}_f : deduce pertanto che l'accelerazione media, nell'intervallo di tempo considerato, è pari a:

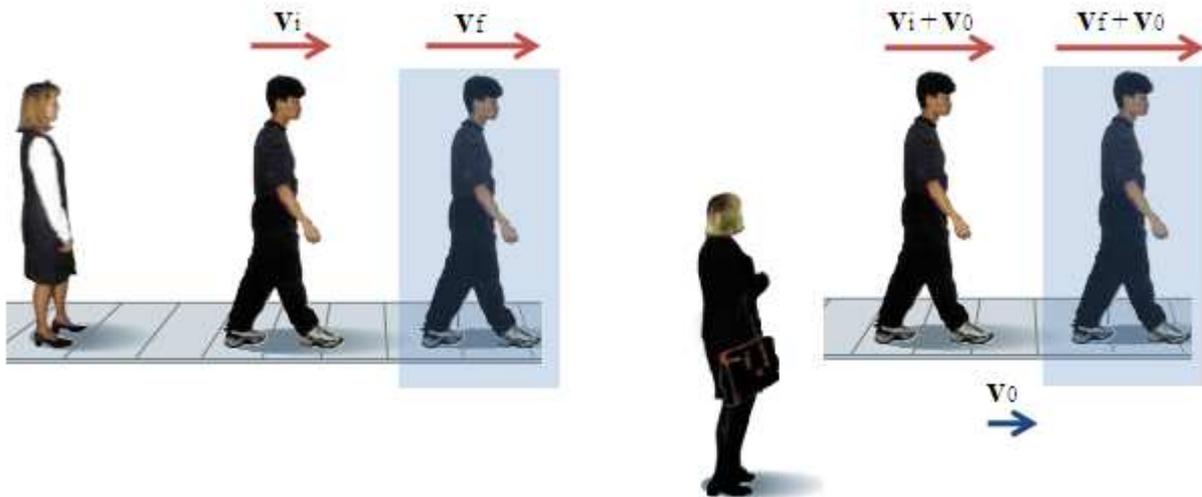
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{\Delta t} \quad (8.1.5)$$

Un osservatore "esterno" al tapis roulant nota, per contro, che, dopo un intervallo di tempo Δt , la velocità del soggetto è passata da $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_0$: deduce pertanto che l'accelerazione media, nell'intervallo di tempo considerato, è pari a:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_0)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{\Delta t} \quad (8.1.6)$$

¹ Galileo Galilei (Pisa, 15 febbraio 1564 – Arcetri, 8 gennaio 1642) è stato un fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano, padre della scienza moderna. Il suo nome è associato ad importanti contributi in dinamica e in astronomia - fra cui il perfezionamento del telescopio, che gli permise importanti osservazioni astronomiche - e all'introduzione del metodo scientifico (detto spesso *metodo galileiano*).

Fig.8.1. 3



Entrambi gli osservatori misurano la medesima accelerazione media. Prendendo poi intervalli di tempo infinitesimi le medesime considerazioni possono essere effettuate nei confronti delle accelerazioni istantanee. Le (8.1.5) e (8.1.6) anche se ricavate con riferimento ad una esemplificazione, si dimostra che possono essere generalizzate. Infatti, applicando la (8.1.4) in corrispondenza di degli estremi t_i e t_f di un intervallo temporale infinitesimo si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \mathbf{v}'_f + \mathbf{v}_0 \cdot \Delta t \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_0 \cdot \Delta t \end{cases} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (8.1.7)$$

Sottraendo membro a membro, dividendo membro a membro per Δt (infinitesimo) si ottiene:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (8.1.8)$$

Pertanto l'accelerazione di un punto è la stessa, sia osservata da un osservatore solidale con un sistema fisso, sia osservata da un osservatore solidale con un sistema di riferimento mobile, dotato di traslazione uniforme, rispetto al primo.

E' importante infine sottolineare che tutte le considerazioni sviluppate in questo paragrafo si riferiscono *esclusivamente* a sistemi di riferimento mobili rispetto ad un sistema fisso, ma *privi di accelerazioni*.¹

Tali sistemi di riferimento, ossia tutti quei sistemi di riferimento che si muovono senza accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento fisso, prendono il nome di *riferimenti inerziali*.

¹ Nel caso il sistema di riferimento mobile fosse dotato di moto accelerato rispetto al sistema fisso, le (8.1.7) andrebbero riscritte come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \mathbf{v}'_f + \mathbf{v}_0 \cdot \Delta t \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}^* \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \end{cases} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

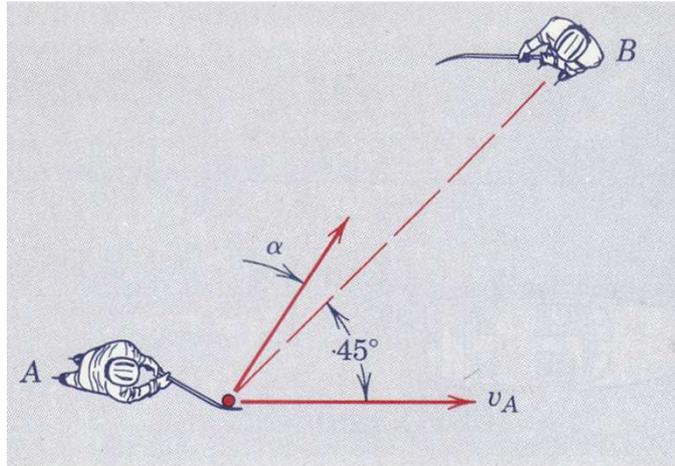
Da cui sottraendo membro a membro, e dividendo membro a membro per Δt , si ottiene:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}^*$$

Dove \mathbf{a} è l'accelerazione assoluta, \mathbf{a}' quella relativa (misurata cioè all'interno del sistema mobile) e \mathbf{a}^* è l'accelerazione del sistema mobile rispetto al sistema fisso.

Esempio 8.1

Hockey player A carries the puck on his stick and moves in the direction shown with a speed $v_{AT} = 4$ m/s . In passing the puck to his stationary teammate B, by what shot angle α should the direction of his shot trail the line of sight if he launches the puck with a speed $v_R = 7$ m/s relative to himself?



Per raggiungere B il disco deve avere una traiettoria rettilinea che congiunga A con B.

Tale traiettoria rettilinea risulta inclinata di 45° rispetto all'orizzontale e tale deve essere pure l'inclinazione della direzione della velocità assoluta \mathbf{v} .

Dalla (8.1.4) sappiamo che:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{TA}$$

Pertanto:

$$v_R \cdot \cos(45 - \alpha) = v_R \cdot \sin(45 - \alpha) + v_{TA}$$

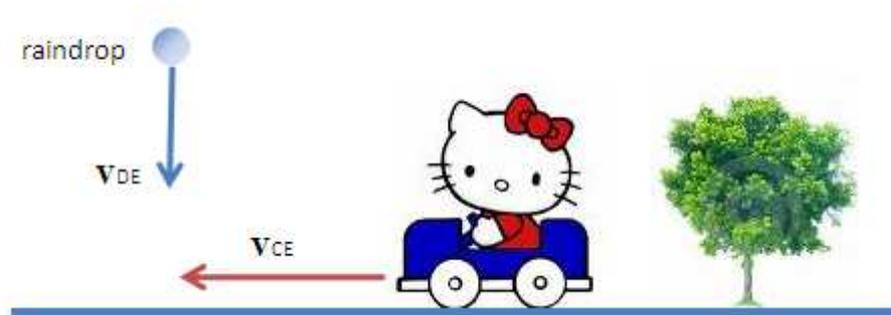
Da cui:

$$\alpha \cong 23.83^\circ$$



Esempio 8.2

A car travels due east with a speed of 50.0 km/h. Raindrops are falling at a constant speed vertically with respect to the Earth. The traces of the rain on the side windows of the car make an angle of 60.0° with the vertical. Find the velocity of the rain with respect to (a) the car and (b) the Earth.

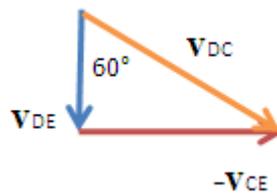


Dalla (8.1.4) si ha:

$$\mathbf{v}_{DE} = \mathbf{v}_{DC} + \mathbf{v}_{CE} \rightarrow \mathbf{v}_{DC} = \mathbf{v}_{DE} - \mathbf{v}_{CE}$$

dove con \mathbf{v}_{DE} , \mathbf{v}_{DC} , \mathbf{v}_{CE} si sono indicate rispettivamente la velocità della goccia rispetto a terra, della goccia rispetto all'auto e dell'auto rispetto alla terra.

Graficamente si ha:



$$v_{DE} = \frac{v_{CE}}{\sin 60} \cong 57.73 \text{ km/h}$$

$$v_{DE} = \frac{v_{CE}}{\tan 60} \cong 28.87 \text{ km/h}$$



Esempio 8.3

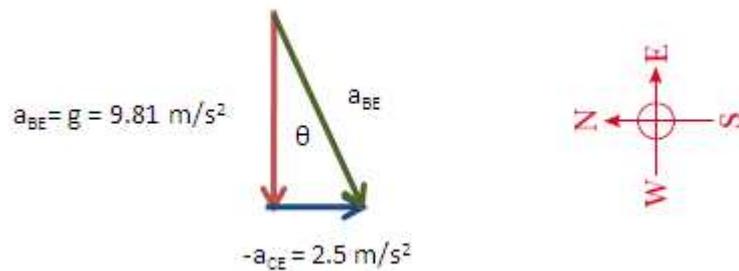
A bolt drops from the ceiling of a train car that is accelerating northward at a rate of 2.50 m/s^2 . What is the acceleration of the bolt relative to (a) the train car? (b) the Earth?

Un osservatore a terra vede il bullone cadere con un'accelerazione pari all'accelerazione di gravità.

$$\mathbf{a}_{BE} = g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Un osservatore solidale con l'autocarro, vede il bullone cadere con un'accelerazione pari alla differenza tra l'accelerazione \mathbf{a}_{BE} e l'accelerazione dell'autocarro \mathbf{a}_{CE}

$$\mathbf{a}_{BE} = \mathbf{a}_{BC} + \mathbf{a}_{CE} \rightarrow \mathbf{a}_{BC} = \mathbf{a}_{BE} - \mathbf{a}_{CE} \rightarrow a_{BC} = \sqrt{a_{BE}^2 + a_{CE}^2} \cong 10.1 \text{ m/s}^2$$

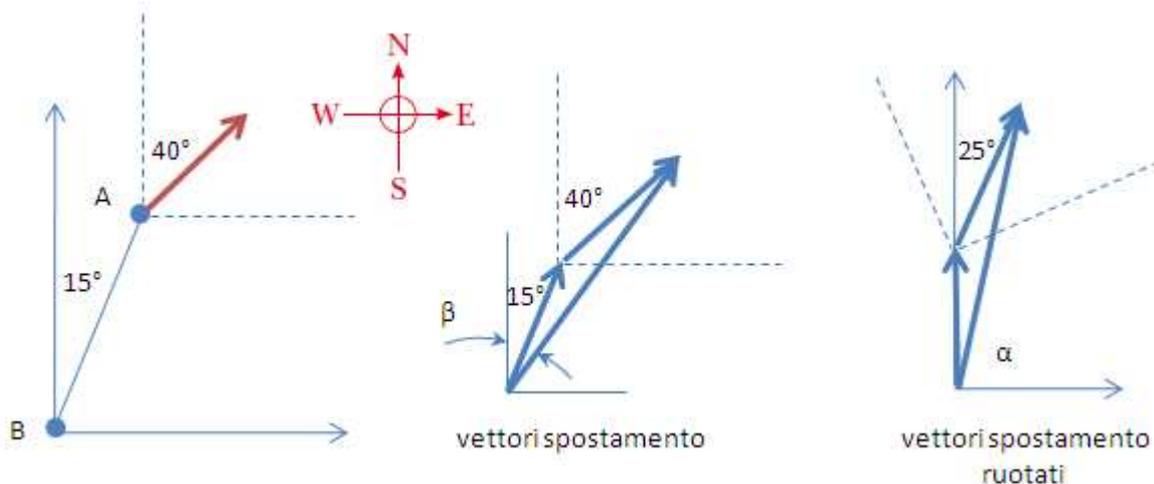


$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{9.81}\right) \cong 14.3^\circ$$



Esempio 8.4

A Coast Guard cutter detects an unidentified ship at a distance of 20.0 km in the direction 15.0° east of north. The ship is traveling at 26.0 km/h on a course at 40.0° east of north. The Coast Guard wishes to send a speedboat to intercept the vessel and investigate it. If the speedboat travels 50.0 km/h, in what direction should it head? Express the direction as a compass bearing with respect to due north.



Dai vettori spostamento ruotati si ricava che al punto di incontro deve essere:

$$v_A \sin 25^\circ \cdot t = v_B \cos \alpha \cdot t \rightarrow \alpha \cong 77.3^\circ \rightarrow \beta = 15^\circ + (90^\circ - 77.3^\circ) = 27.7^\circ$$



Esempio 8.5

A river has a steady speed of 0.500 m/s. A student swims upstream a distance of 1.00 km and swims back to the starting point. If the student can swim at a speed of 1.20 m/s in still water, how long does the trip take? Compare this with the time the trip would take if the water were still.

Tempo totale di permanenza in acqua nel caso di assenza di corrente

$$t_{tot} = \frac{d}{v} = \frac{1000+1000}{1.20} \cong 1.6 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Tempo di percorrenza in andata (a favore di corrente)

$$t_a = \frac{1000}{1.2+0.5} \cong 588.2 \text{ s}$$

Tempo di percorrenza in ritorno (controcorrente)

$$t_r = \frac{1000}{1.2-0.5} \cong 1428.6 \text{ s}$$

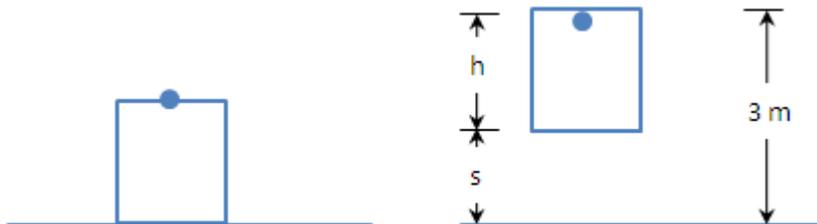
Tempo totale di permanenza in acqua in presenza di corrente:

$$t_{totC} = t_a + t_r \cong 2017 \text{ s}$$



Esempio 8.6

Un montacarichi sale con accelerazione verso l'alto di 1.5 m/s^2 . Un bullone allentato si stacca dal soffitto dell'ascensore a 3 m dal suolo e cade giù, nell'istante in cui l'ascensore ha una velocità di 2.5 m/s. Calcolare il tempo che impiega il bullone a cadere dal soffitto al pavimento.



$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow s = \frac{v^2}{2a} \cong 2.08 \text{ m} \quad \rightarrow \quad h \cong 0.916 \text{ m}$$

L'accelerazione del bullone relativamente al pavimento dell'ascensore vale:

$$a_{BP} \cong g + 1.5 \cong 11.31 \text{ m/s}^2$$

Il tempo impiegato a raggiungere il pavimento vale:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BP}}} \cong 0.4 \text{ s}$$



9. Cinematica del corpo rigido

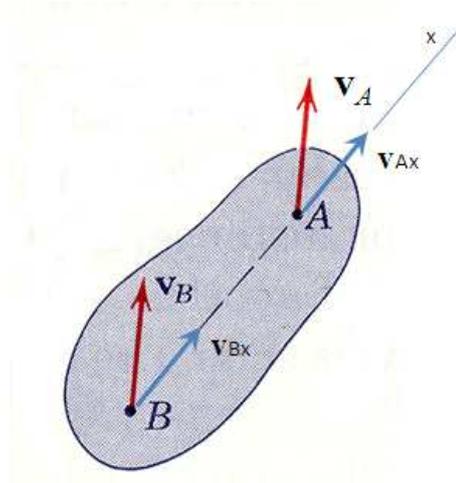
Si definisce *corpo rigido* un sistema materiale i cui punti godono della proprietà che la loro mutua distanza non varia rispetto al tempo.

E' immediato riconoscere che le velocità di due punti qualsiasi appartenenti ad un corpo rigido devono avere istante per istante la medesima proiezione, con segno, sulla retta che li unisce.

Con riferimento alla Fig.9. 1 deve essere pertanto:

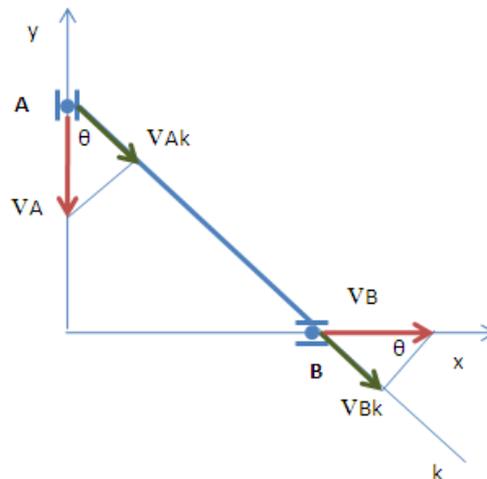
$$v_{Bx} = v_{Ax}$$

Fig.9. 1



Esempio 9.1

L'asta AB di seguito rappresentata è vincolata a scorrere, tramite due pattini, lungo due guide perpendicolari . Se l'estremo A dell'asta è dotato di una velocità v_A , determinare la velocità del punto B.

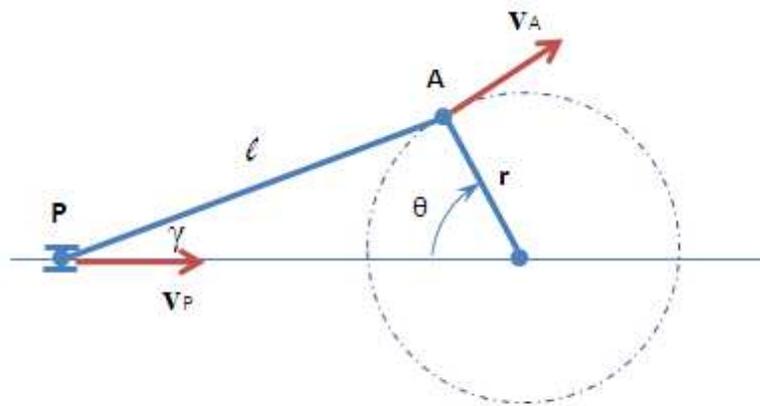


$$v_B = \frac{v_{Bk}}{\sin \theta} = \frac{v_{Ak}}{\sin \theta} = v_A \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{v_A}{\tan \theta}$$

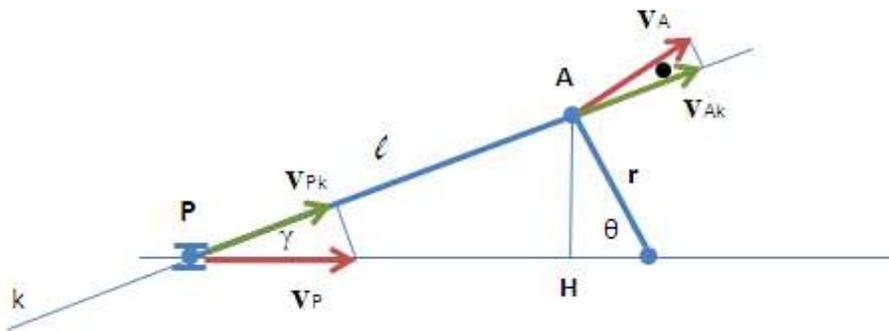


Esempio 9.2

Con riferimento al meccanismo biella-manovella di seguito rappresentato, determinare la velocità del piede di biella P.



A bottone di manovella
 P piede di biella
 r raggio di manovella
 l lunghezza della biella



● = 90-(θ+γ)

$$v_P = \frac{v_{Pk}}{\cos \gamma} = \frac{v_{Ak}}{\cos \gamma} = \frac{v_A \cdot \sin(\theta + \gamma)}{\cos \gamma} \quad \text{con } \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{r}{l} \sin \theta\right)$$



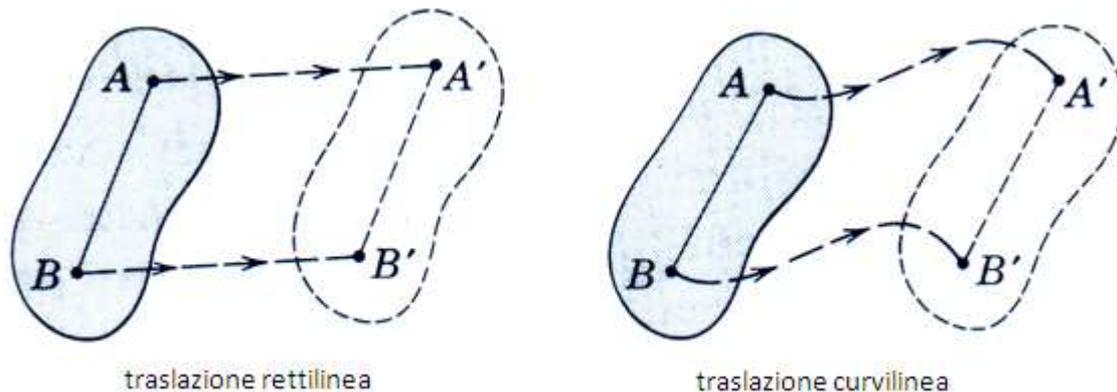
9.1 Tipi di moto

Moto traslatorio

Definiamo moto *traslatorio* del corpo rigido un atto di moto per il quale risulta indipendente dal tempo l'orientamento di un arbitrario segmento materiale definito sul corpo rigido stesso.

I moti traslatori possono essere suddivisi in rettilinei e curvilinei.

Fig.9.1 1

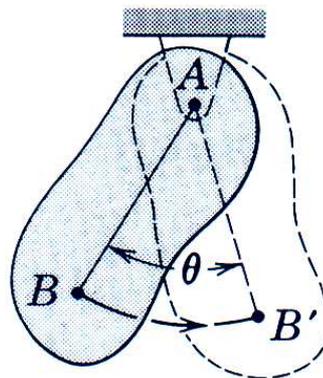


In un moto traslatorio tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità e la stessa accelerazione

Moto rotatorio

Un corpo rigido *ruota attorno ad un asse fisso* quando tutti i suoi punti (eccetto quelli che si trovano sull'asse di rotazione) si muovono su traiettorie circolari concentriche con l'asse fisso.

Fig.9.1 2

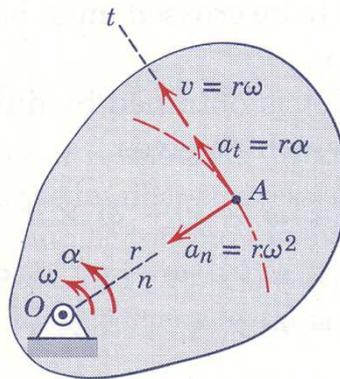


La velocità e l'accelerazione di un punto generico A, appartenente ad un corpo rigido ruotante attorno ad un punto fisso O con velocità angolare ω e accelerazione angolare α , si calcola agevolmente ricordando le relazioni introdotte nel caso del moto di un punto materiale.

Indicata con r la distanza OA (vedi Fig.9.1 3) si ha:

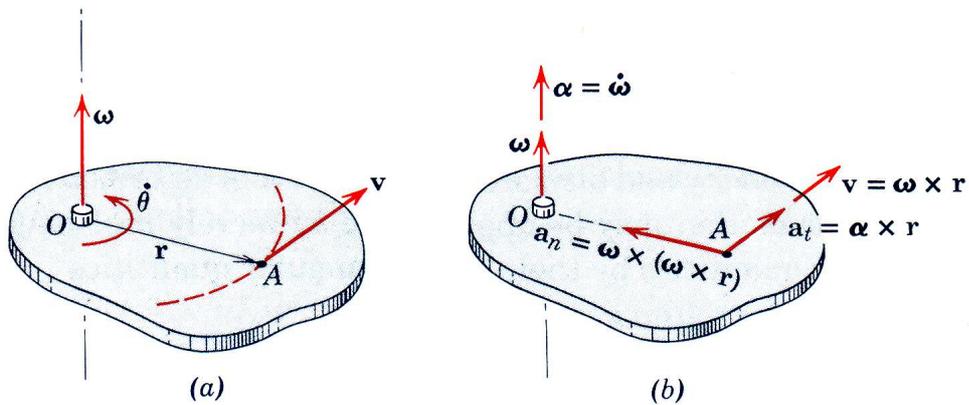
$$v = \omega \cdot r \quad a_n = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \quad a_t = \alpha \cdot r \quad (9.1.1)$$

Fig.9.1 3



Le (9.1.1) possono anche essere espresse in termini vettoriali come esemplificato nella figura sotto rappresentata.

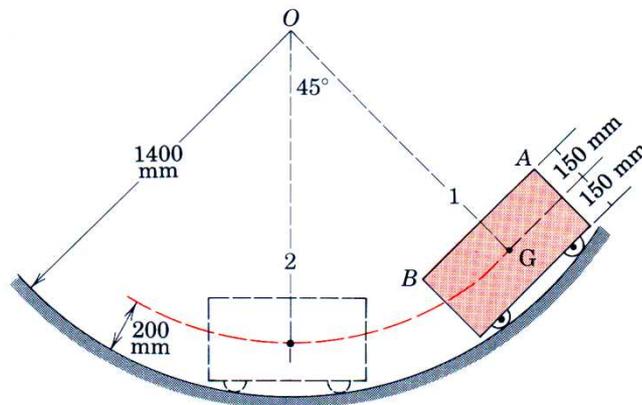
Fig.9.1 4



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (9.1.2)$$

Esempio 9.3

The small cart is released from rest in position 1 and requires 0.638 seconds to reach position 2 at the bottom of the path where its centre G has a velocity of 4.33 m/s. Determine the angular velocity ω of the line AB in position 2 and the average angular velocity ω_{AV} of AB during the interval.



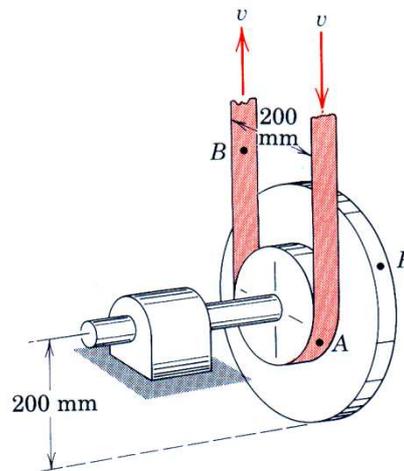
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{4.33}{1.2} \approx 3.608 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{AV} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{8} \frac{1}{0.638} \approx 1.23 \text{ rad/s}$$



Esempio 9.4

The two attached pulleys are driven by the belt with increasing speed. When the belt reaches a speed $v = 0.6 \text{ m/s}$, the total acceleration of point P is 8 m/s^2 . For this instant determine the angular acceleration α of pulleys and the acceleration of point B on the belt.



La velocità angolare delle pulegge, nell'istante considerate, vale:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0.6}{0.1} = 6 \text{ rad/s}$$

L'accelerazione normale (centripeta) di P vale:

$$a_{nP} = \omega^2 \cdot r = 6^2 \cdot 0.2 = 7.2 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione totale di P è vale:

$$a_P = \sqrt{a_{nP}^2 + a_{tP}^2}$$

$$a_{tP} \approx 3.483 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione angolare di P vale pertanto:

$$\alpha = \frac{a_{tP}}{r} \approx \frac{3.483}{0.2} \approx 17.43 \text{ rad/s}$$

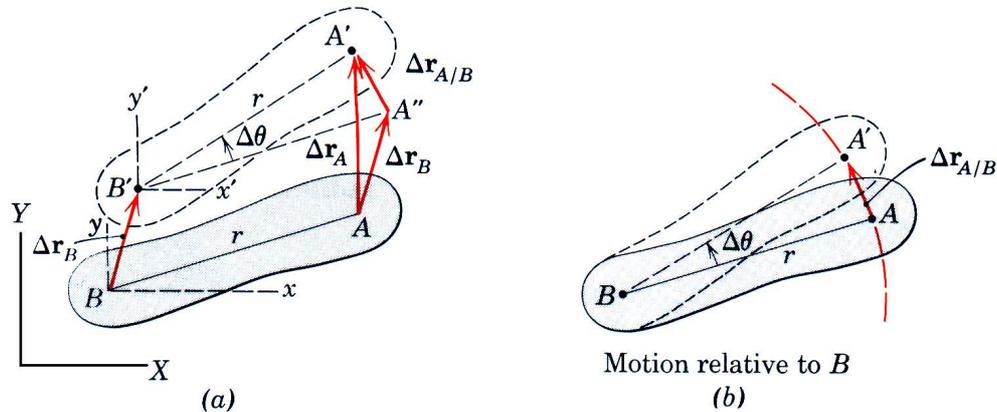


Moto piano generico

Un moto piano generico può sempre essere scomposto in una traslazione ed in una rotazione.

Nella Fig.9.1 5 vediamo un segmento materiale BA che dopo un certo tempo Δt si porta in B'A'. Tale spostamento può essere immaginato come il risultato di una traslazione di BA in B'A'' (BA è parallelo a BA'') e di una rotazione B'A'' in B'A'.

Fig.9.1 5



Scelto B come punto di riferimento, la variazione del vettore posizione di A può essere così scomposto:

$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B + \Delta \mathbf{r}_{A/B} \quad (9.1.3)$$

dove il modulo di $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$, per Δt sufficientemente piccolo, è pari a $r \cdot \Delta \theta$.¹

Dividendo membro a membro la (9.1.3) per Δt (con $\Delta t \rightarrow 0$), tenuto conto della definizione di velocità, si ottiene la seguente relazione fondamentale²:

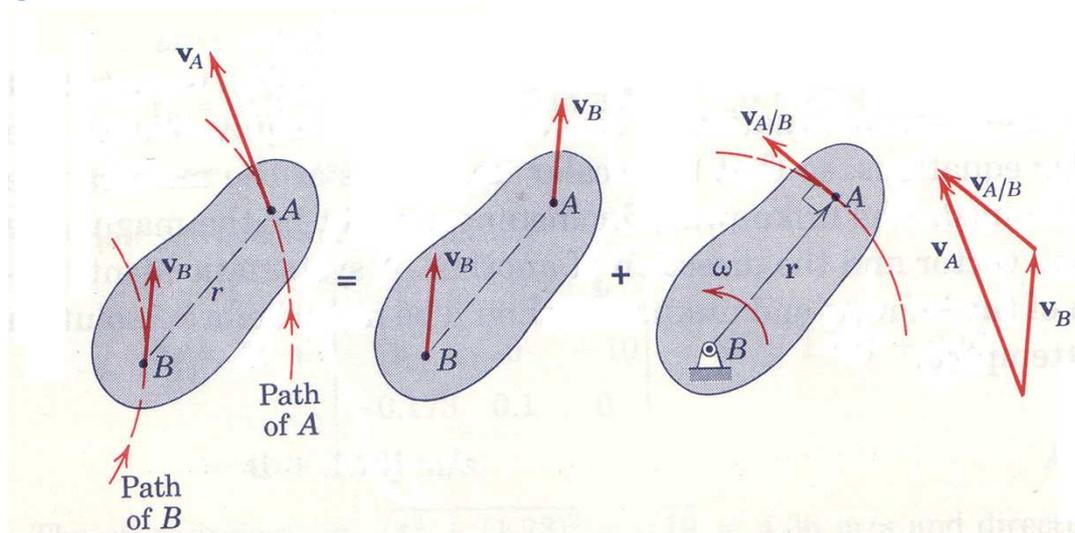
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (9.1.4)$$

dove, tenute presenti le prime delle (9.1.1) e (9.1.2) si ha:

$$\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad v_{A/B} = \omega \cdot r \quad (9.1.5)$$

L'applicazione della (9.1.4) è esemplificata nella Fig.9.1 6.

Fig.9.1 6

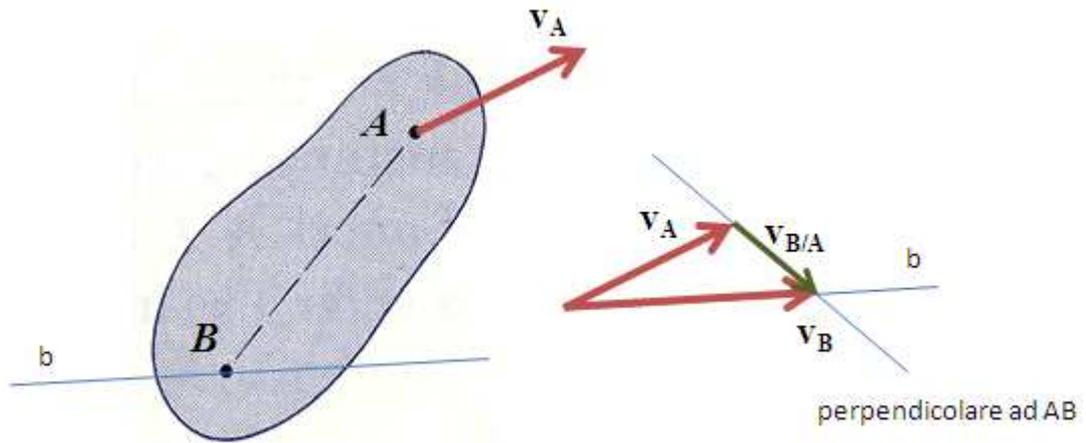


¹ La direzione di $\mathbf{v}_{A/B}$ è sempre perpendicolare a \mathbf{r}

² La (9.1.4) che in questo paragrafo abbiamo applicato due punti appartenenti ad un corpo rigido vale in generale. Ossia, per due qualsiasi coppia di punti appartenenti al piano (vedi Esempio 9.8).

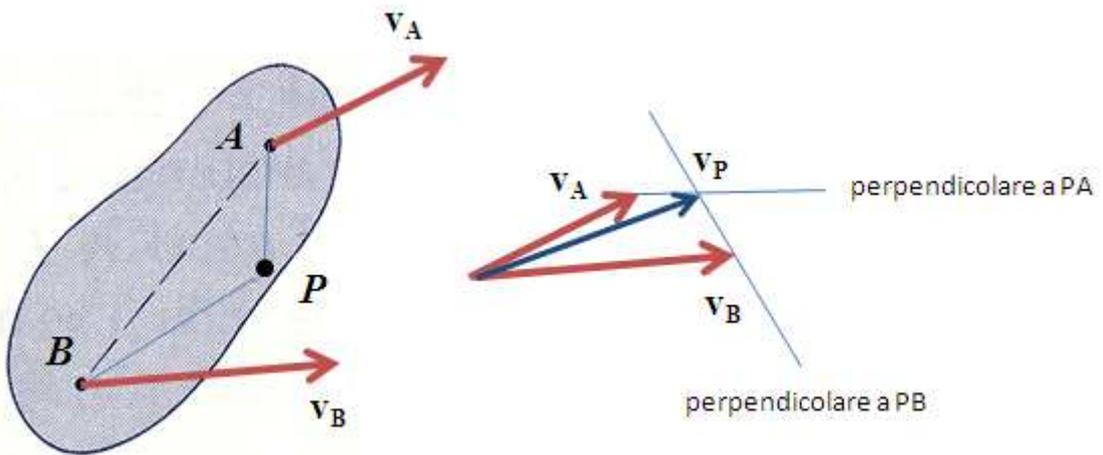
La (9.1.4) permette, in un corpo rigido, di determinare la velocità di un punto B, di cui si conosca solo la direzione, una volta nota la velocità di un altro punto qualsiasi A.

Fig.9.1 7



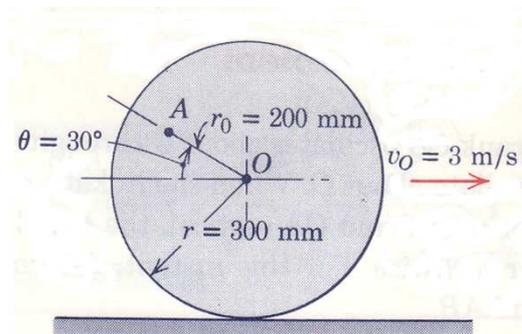
Inoltre sempre dalla (9.1.4) è facile riconoscere che, in un corpo rigido, una volta note le velocità di due punti A e B, risultano definite le velocità di tutti gli altri punti appartenenti al corpo rigido.

Fig.9.1 8

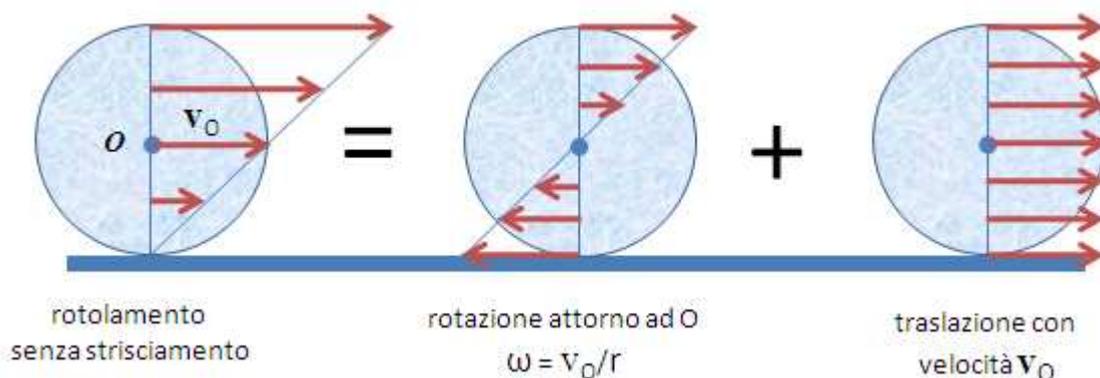


Esempio 9.5

The wheel of radius $r = 300$ mm rolls to right without slipping and has a velocity $v_O = 3$ m/s of its centre O . Calculate the velocity of point A on the wheel for the instant represented.



Il moto di un disco che rotola senza strisciare su di un piano può essere immaginato come la sovrapposizione di una traslazione e di una rotazione attorno al centro O come schematizzato nella figura sotto rappresentata.



Riprendiamo la (9.1.4) scegliendo O come punto di riferimento:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O}$$

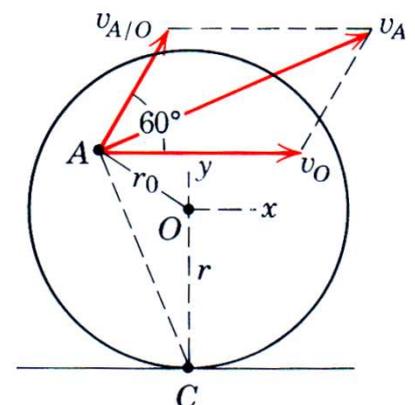
La velocità $\mathbf{v}_{A/O}$ è la velocità di A registrata da un osservatore solidale con O , ovvero è la velocità dovuta alla rotazione attorno ad O . Si ha pertanto:

$$v_{A/O} = \omega \cdot r_0 = \frac{v_O}{r} r_0 = 2 \text{ m/s}$$

con $\mathbf{v}_{A/O}$ perpendicolare rispetto a \mathbf{r}_O .

Nota v_A la velocità \mathbf{v}_A si calcola tramite il teorema di Carnot.

$$v_A^2 = v_O^2 + v_{A/O}^2 - 2v_O \cdot v_{A/O} \cdot \cos 60^\circ \rightarrow v_A \cong 4.36 \text{ m/s}$$

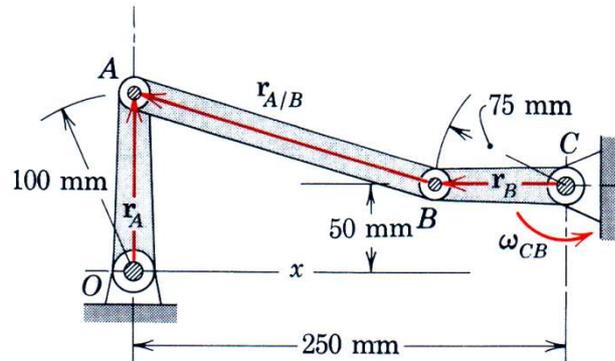


Come ulteriore esercizio si dimostri, geometricamente, che \mathbf{v}_A è perpendicolare a \mathbf{r}_O .



Esempio 9.6

Crank CB oscillates about C through a limited arc, causing crank OA to oscillate about O. When the linkage passes the position shown with CB horizontal and OA vertical, the angular velocity of CB is 2 rad/s counterclockwise. For this instant, determine the angular velocity of OA and AB.



Dalla (9.1.4), scelto B come punto di riferimento, la velocità di A deve soddisfare la seguente identità vettoriale.

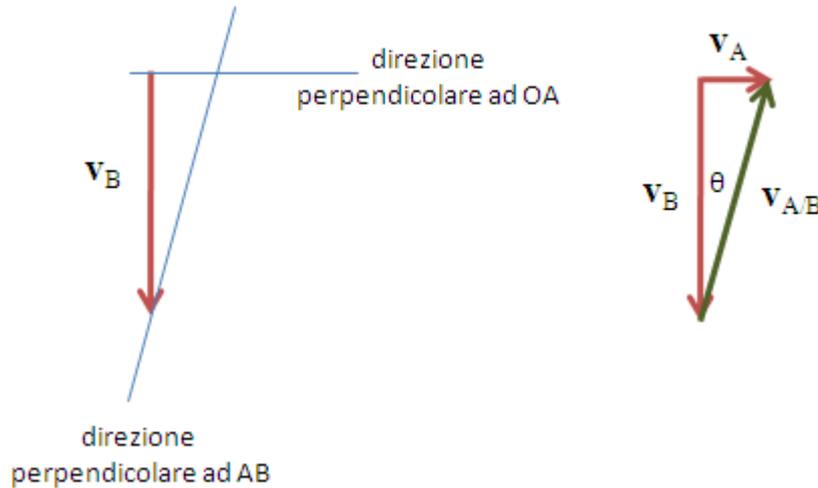
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

La velocità di B è conosciuta in modulo e direzione (perpendicolare a BC):

$$v_B = \omega_{CB} \cdot BC = 2 \cdot 0.075 = 0.150 \text{ m/s}$$

Di \mathbf{v}_A e $\mathbf{v}_{A/B}$ conosciamo solo le direzioni, rispettivamente perpendicolari a OA e a AB.

Con questi dati si può costruire il triangolo delle velocità



L'angolo θ si ricava dalla geometria del sistema:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{100 - 50}{250 - 75} \right) \cong 15.9^\circ$$

Pertanto:

$$v_{A/B} = v_B / \cos \theta \cong 0.156 \text{ m/s} \quad v_A = v_B \cdot \tan \theta \cong 0.0427 \text{ m/s}$$

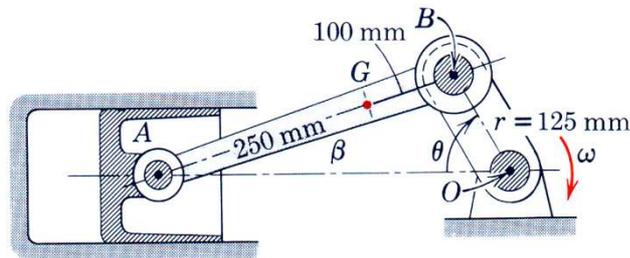
e quindi:

$$\omega_{AB} = \frac{v_{A/B}}{AB} \cong 0.854 \text{ rad/s} \quad \omega_{OA} = \frac{v_A}{OA} \cong 0.417 \text{ rad/s}$$



Esempio 9.7

The common configuration of a reciprocating engine is that of slider-crank mechanism shown. If the crank OB has a clockwise rotational speed of 1500 rpm, determine for the position where $\theta = 60^\circ$ the velocity of piston A, the velocity of point G on the connecting rod, and the angular velocity of the connecting rod.



La velocità del punto A, appartenente alla biella AB, si determina facilmente tramite la (9.1.4) una volta che si scelga B come punto di riferimento. Si deve pertanto risolvere la seguente identità vettoriale:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (1)$$

\mathbf{v}_A è nota in direzione (coincidente con AO)

\mathbf{v}_B è nota in modulo e direzione (modulo pari a $\omega \cdot r$ e direzione perpendicolare a OB)

$\mathbf{v}_{A/B}$ è nota in direzione (perpendicolare a AB)

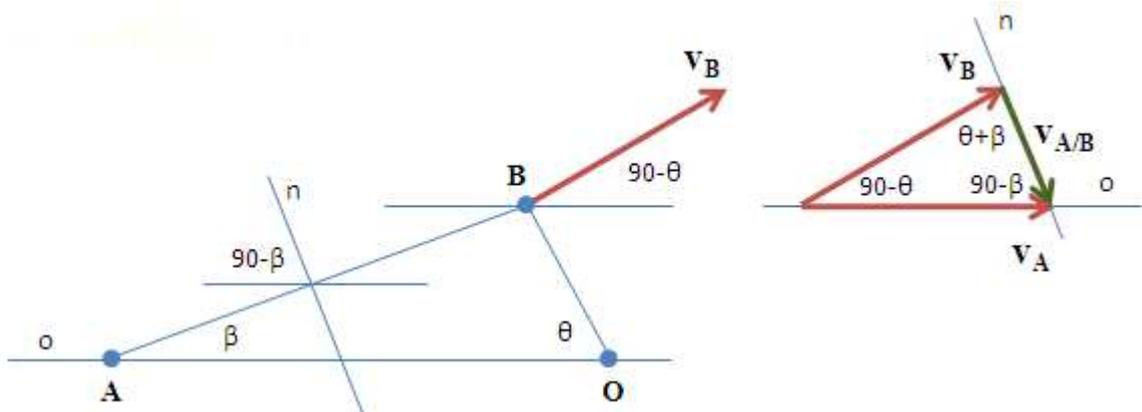
Per procedere alla risoluzione grafica dobbiamo preliminarmente calcolare, dal teorema dei seni, il valore dell'angolo β .

$$\frac{125}{\sin \beta} = \frac{350}{\sin 60^\circ} \rightarrow \beta \cong 18^\circ$$

Il modulo di \mathbf{v}_B vale:

$$v_B = \omega \cdot r = \frac{2\pi \cdot 1500}{60} \cdot 0.125 \cong 19.63 \text{ m/s}$$

A questo punto si hanno tutti gli elementi per costruire il triangolo delle velocità in accordo con la (1)



I moduli di \mathbf{v}_A e $\mathbf{v}_{A/B}$ si determinano in base sempre al teorema dei seni:

$$\frac{v_A}{\sin(\theta + \beta)} = \frac{v_B}{\sin(90 - \beta)} \rightarrow v_A \cong 20.2 \text{ m/s}$$

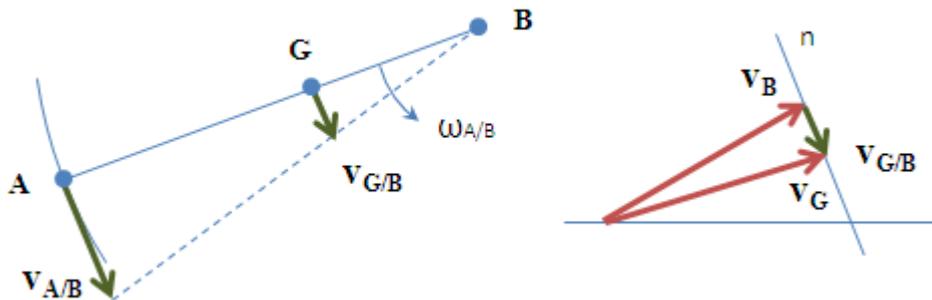
$$\frac{v_{A/B}}{\sin(90-\theta)} = \frac{v_B}{\sin(90-\beta)} \rightarrow v_{A/B} \cong 10.32 \text{ m/s}$$

La velocità angolare di AB, come si deduce dalla direzione di $v_{A/B}$, è antioraria e di modulo pari a:

$$\omega_{A/B} = \frac{v_{A/B}}{AB} \cong 29.5 \text{ rad/s}$$

Determiniamo ora la velocità del punto G riscrivendo la (1) sempre con B come punto di riferimento:

$$v_G = v_B + v_{G/B}$$



Dai grafici sopra riportati si ricava immediatamente che:

$$v_{G/B} = v_{A/B} \frac{GB}{AB} \cong 2.95 \text{ m/s}$$

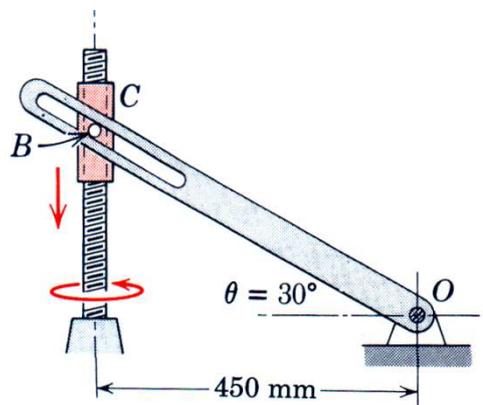
Il modulo di v_G si ottiene direttamente dal diagramma delle velocità o per via analitica tramite il teorema di Carnot.

$$v_G^2 = v_B^2 + v_{G/B}^2 - 2 \cdot v_B \cdot v_{G/B} \cdot \cos 78^\circ \rightarrow v_G \cong 19.23 \text{ m/s}$$



Esempio 9.8

The power screw turns at a speed that gives the threaded collar C a velocity of 0.25 m/s vertically down. Determine the angular velocity of the slotted arm when $\theta = 30^\circ$.



La velocità angolare del braccio è nota una volta che si conosca la velocità di un punto ad esso appartenente.

Consideriamo un punto A sul braccio coincidente con il punto B rappresentativo del perno solidale con il collare. Usando B come punto di riferimento dalla (9.1.4) otteniamo:

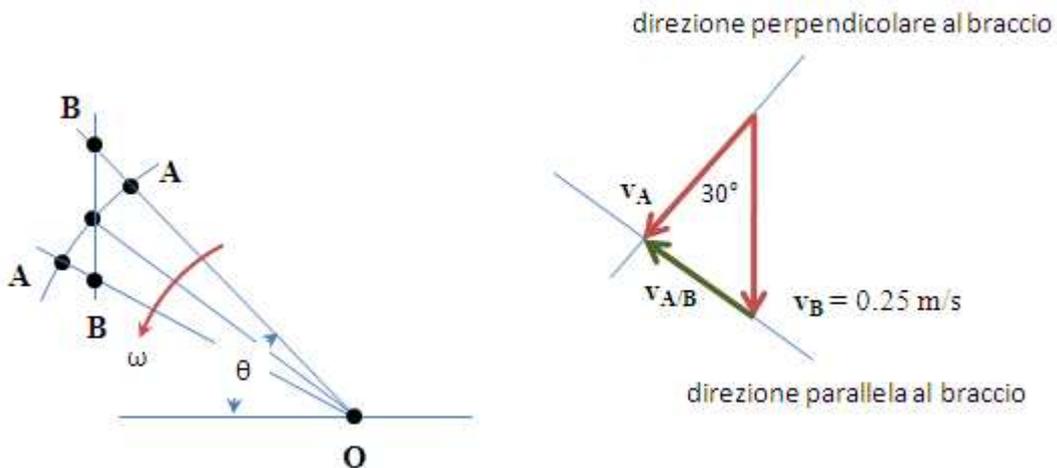
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

\mathbf{v}_B è assegnata dal problema

\mathbf{v}_A nota in direzione (perpendicolare al braccio)

$\mathbf{v}_{A/B}$

Il triangolo delle velocità, come si vede dai grafico di seguito risulta definito.



$$v_A = v_B \cos \theta = 0.25 \cdot \cos 30^\circ \cong 0.217 \text{ m/s}$$

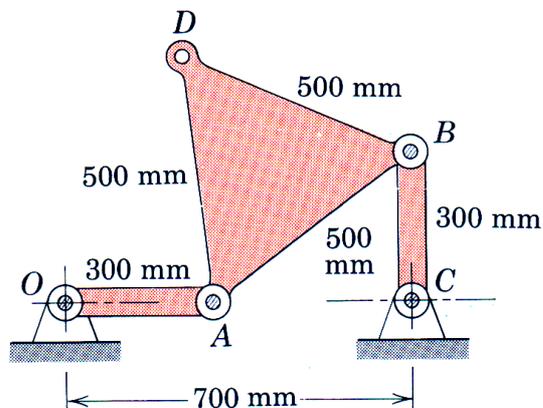
Da cui la velocità angolare incognita vale:

$$\omega = \frac{v_A}{AB} \cong 0.417 \text{ CCW}$$



Esempio 9.9

At the instant represented the triangular plate ABD has a clockwise angular velocity of 3 rad/s. For this instant determine the angular velocity ω_{BC} of link BC.



Consideriamo il segmento materiale AB appartenente al corpo rigido ruotante con velocità angolare assegnata. Scelto A come punto di riferimento, si ha:

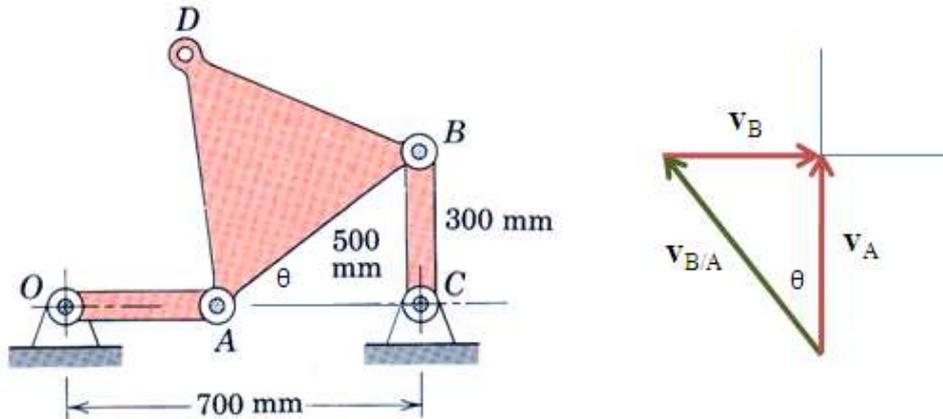
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

\mathbf{v}_A è conosciuta in direzione (perpendicolare ad OA)

\mathbf{v}_B è conosciuta in direzione (perpendicolare a CB)

$\mathbf{v}_{B/A}$ è nota in direzione (perpendicolare ad AB) e in modulo $v_{B/A} = \omega_{ABD} \cdot \overline{AB} = 1.5 \text{ m/s}$

Si hanno gli elementi per tracciare il diagramma delle velocità:

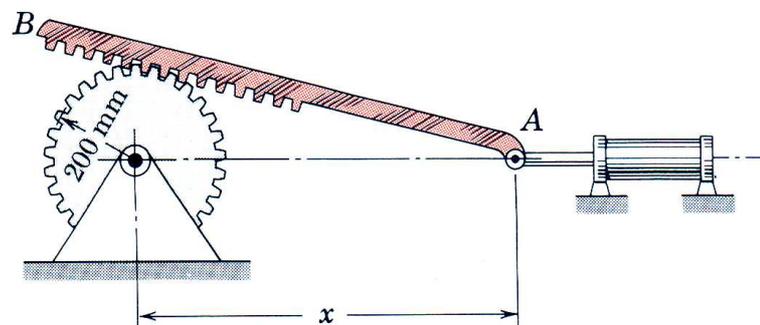


$$v_B = v_{B/A} \cdot \cos \theta = 1.5 \cdot \frac{3}{5} = 0.9 \text{ m/s}$$

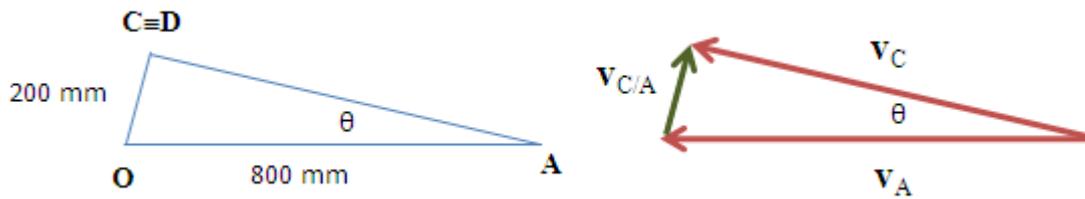
$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{0.9}{0.3} = 3 \text{ rad/s}$$

Esempio 9.10

The rotation of the gear is controlled by the horizontal motion of end A of the rack AB. If the piston rod has a constant velocity of 300 mm/s during a short interval of motion, determine the angular velocity ω_0 of the gear and the angular velocity ω_{AB} of AB at the instant when $x = 800 \text{ mm}$.



Indichiamo con C il punto su AB a contatto con il punto D appartenente alla ruota dentata.



$$v_C = v_A \cdot \cos \theta \cong 0.29 \text{ m/s}$$

$$\omega_o = \frac{v_C}{r} \cong 1.452 \text{ rad/s CW}$$

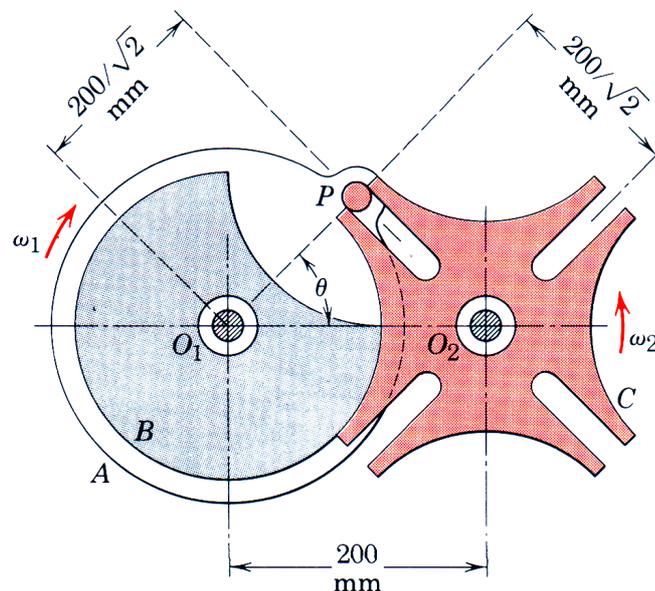
$$v_{C/A} = v_A \cdot \sin \theta \cong 0.075 \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{C/A}}{AC} \cong 0.0968 \text{ rad/s CCW}$$

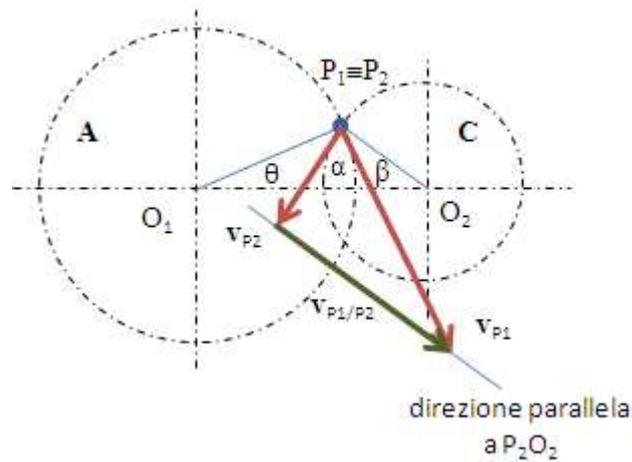


Esempio 9.11

The Geneva wheel is a mechanism¹ for producing intermittent rotation. Pin P in the integral unit of wheel A and locking plate B engages the radial slots in wheel C thus turning wheel C one-fourth of revolution for each revolution of the pin. By relative motion principles determine the angular velocity ω_2 of the wheel C for $\theta = 20^\circ$. Wheel A has a constant clockwise angular velocity $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$.



¹ Geneva wheel = ruota a Croce di Malta.



Sdoppiamo idealmente il punto P in due punti coincidenti P_1 e P_2 solidali rispettivamente alla ruota A e alla croce di Malta C.

Il triangolo O_1PO_2 è definito in quanto conosciamo due lati ($OP = 200/\sqrt{2}$ mm ; $O_1O_2 = 200$ mm) e l'angolo compreso $\theta = 20^\circ$. Pertanto:

$$\beta \cong 35.78^\circ \quad P_2O_2 \cong 82.725 \text{ mm}$$

Da semplici relazioni trigonometriche ricaviamo il valore dell'angolo α , l'angolo compreso tra v_{P_1} e v_{P_2} :

$$\alpha = \theta + \beta \cong 55.78^\circ$$

Dal triangolo delle velocità otteniamo infine:

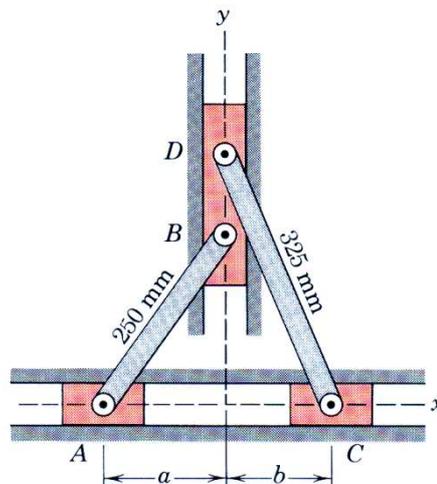
$$v_{P_2} = v_{P_1} \cdot \sin(90 - \alpha) \cong \omega_1 \cdot O_1P_1 \cdot \sin(90 - \alpha) \cong 2 \cdot \frac{200}{\sqrt{2}} 0.562 \cong 159.06 \text{ mm/s}$$

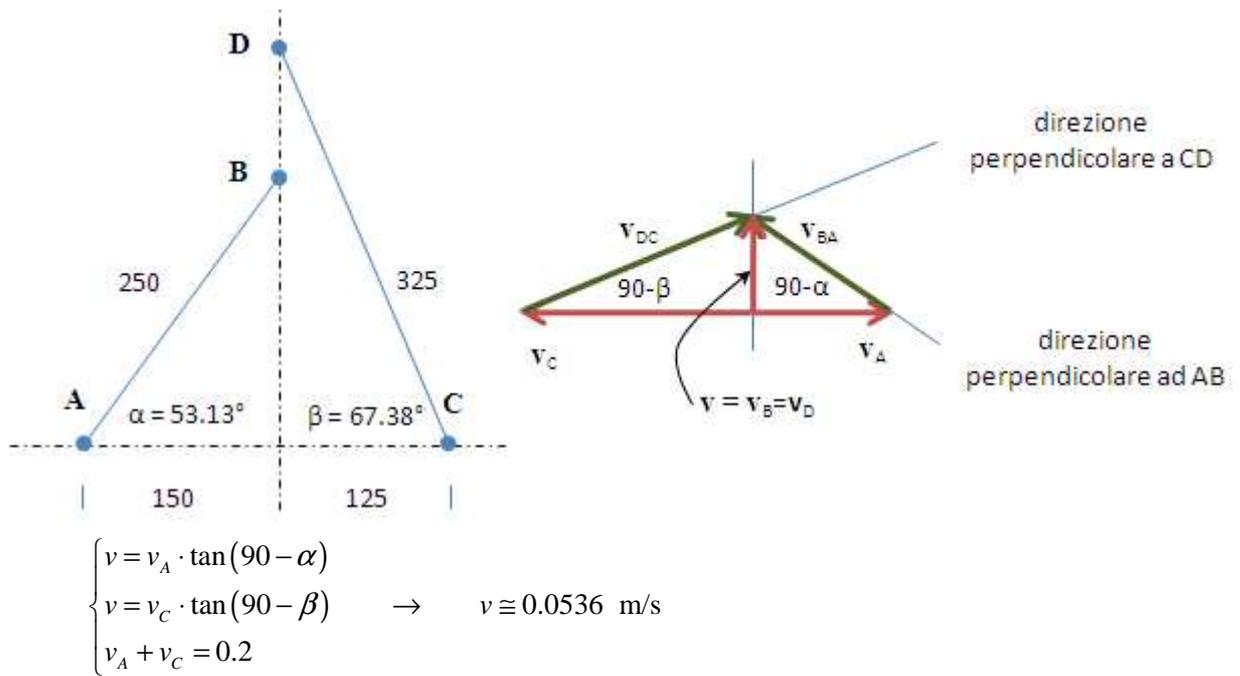
$$\omega_2 = \frac{v_{P_2}}{P_2O_2} \cong 1.923 \text{ rad/s}$$



Esempio 9.12

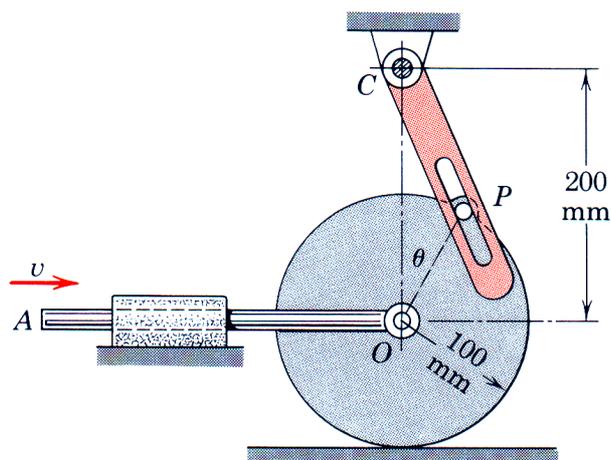
At the instant represented, $a = 150$ mm and $b = 125$ mm, and the distance $a + b$ between A and C is decreasing at the rate of 0.2 m/s. Determine the common velocity v of point B and D for this instant.

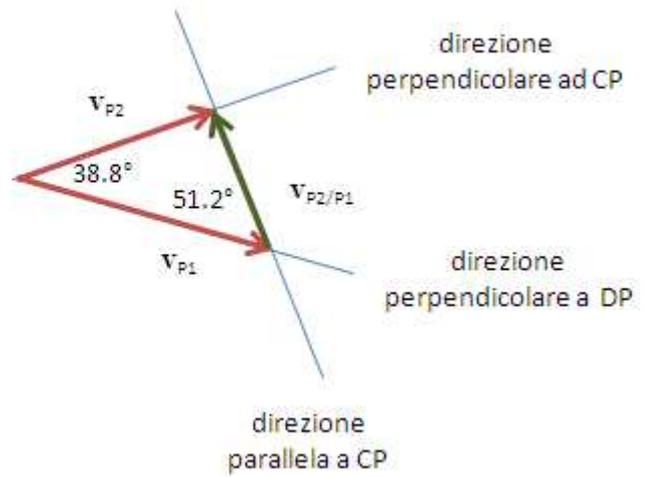
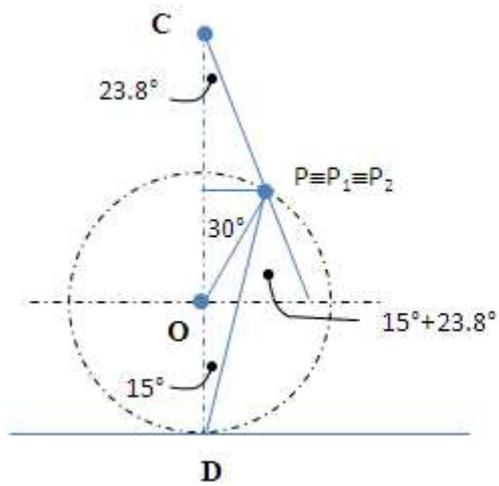




Esempio 9.13

The wheel rolls without slipping. For the instant portrayed, when O is directly under point C, link OA has a velocity $v = 1.5 \text{ m/s}$ to the right and $\theta = 30^\circ$. Determine the angular velocity ω of the slotted link.





$$v_{P1} = \frac{v}{OP} \cdot DP \cong 2.897 \text{ m/s}$$

$$v_{P2} = v_{P1} \cdot \sin 51.2^\circ \cong 2.26 \text{ m/s}$$

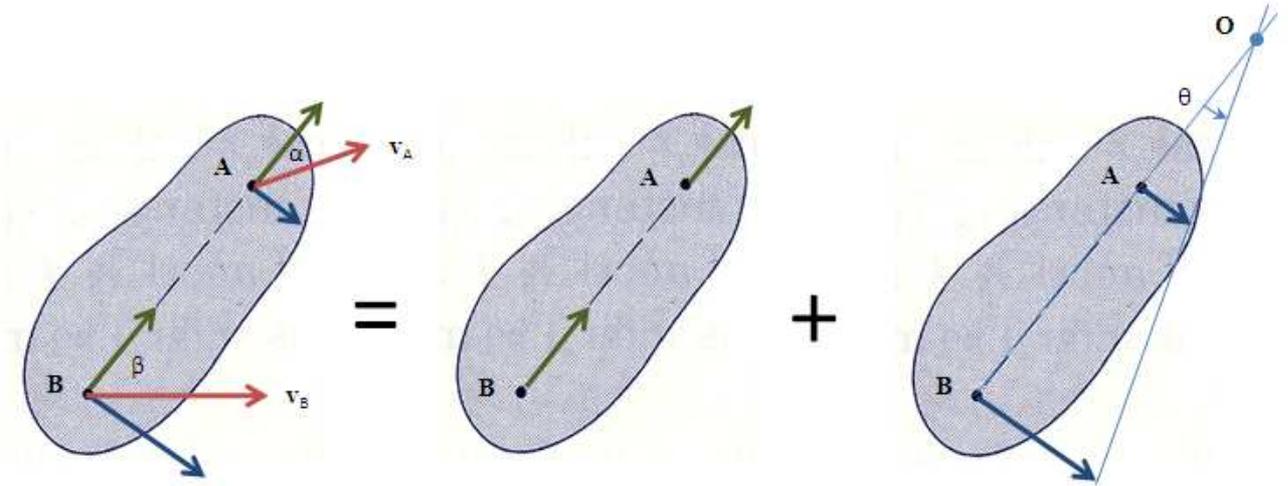
$$\omega = \frac{v_{P2}}{CP} \cong \frac{2.26}{0.124} \cong 18.2 \text{ rad/s} \quad \text{CCW}$$



9.2 Il centro di istantanea rotazione

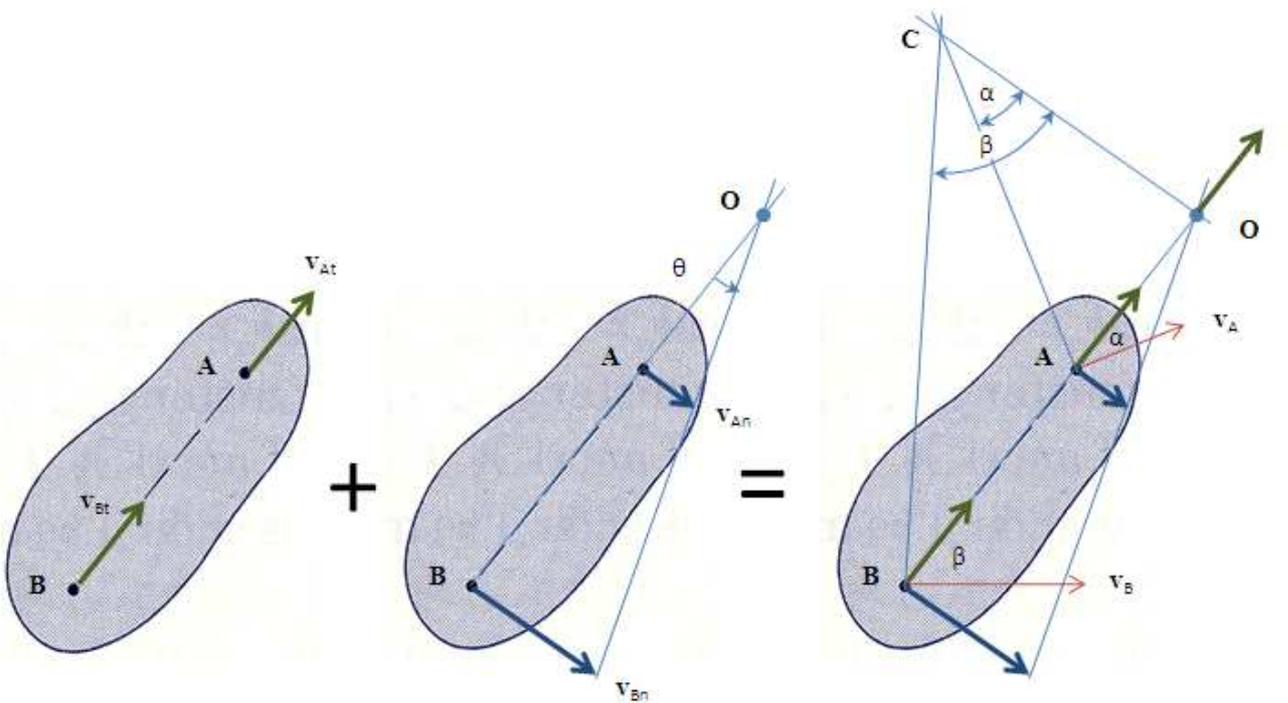
In precedenza abbiamo visto che un moto generico di un corpo rigido può sempre essere scomposto in un moto di traslazione e in moto di rotazione ω attorno ad un punto O .

Fig. 9.2.1



Adesso vediamo se un moto generico, *in un certo istante*, può essere ricondotto ad una rotazione pura ω attorno ad un certo punto C del piano (appartenente o meno al corpo rigido).

Fig. 9.2.2



Se tale punto esiste deve giacere sulla normale ad AB ed avere una distanza da O tale che:

$$v_{At} = \omega \cdot OC \quad (9.2.1)$$

Pertanto

$$OC = \frac{v_{At}}{\omega} = \frac{v_{At}}{v_{An}} \cdot AO = \frac{AO}{\tan \alpha} \quad (9.2.2)$$

Il triangolo AOC (retto in O) ha quindi in C un angolo pari ad α e il segmento CA è perpendicolare a \mathbf{v}_A . Verificheremo ora che l'atto di moto istantaneo, costituito da una rotazione pura ω con centro C, genera le velocità \mathbf{v}_{A^*} e \mathbf{v}_{B^*} coincidenti rispettivamente con le velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B .

$$v_{A^*} = \omega \cdot AC = \frac{v_{At}}{OC} AC = \frac{v_{At}}{\cos \alpha} = v_A \quad (9.2.3)$$

Sempre dalla (9.2.1) si ottiene:

$$OC = \frac{v_{Bt}}{\omega} = \frac{v_{Bt}}{v_{Bn}} \cdot BO = \frac{BO}{\tan \beta} \quad (9.2.4)$$

Il triangolo BOC (retto in O) ha quindi in C un angolo pari ad β e il segmento CB è perpendicolare a \mathbf{v}_B . Pertanto:

$$v_{B^*} = \omega \cdot BC = \frac{v_{Bt}}{OC} BC = \frac{v_{Bt}}{\cos \beta} = v_B$$

Abbiamo quindi dato una giustificazione, anche se non una dimostrazione, del seguente teorema:

Teo 9.2. 1

In ogni istante in cui la velocità angolare di un corpo rigido non sia nulla esiste uno e un solo punto C del sistema, detto centro delle velocità (centro di istantanea rotazione), la cui velocità è nulla.

Se il teorema precedente è vero allora, con riferimento alla costruzione grafica riportata in Fig. 9.2 2, è immediato riconoscere che:

Teo 9.2. 2

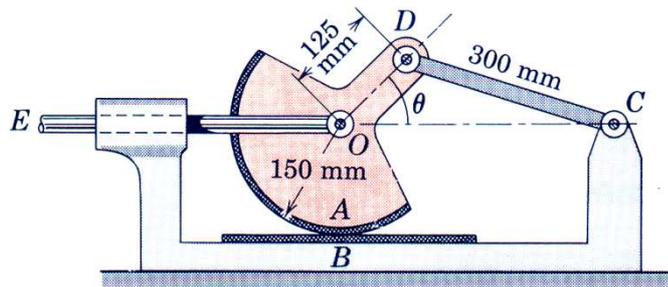
Il centro di istantanea rotazione si trova, in ogni istante, sulle normali alle traiettorie dei punti del sistema. (teorema di Chasles¹)

¹ Michel Chasles (Épernon, 15 novembre 1793 – Parigi, 18 dicembre 1880) dopo brillanti studi superiori entra all'École polytechnique nel 1812 sotto la guida di Siméon Denis Poisson. Nel 1814 viene chiamato alle armi da Napoleone in difesa di Parigi. Poco dopo, finita la guerra, ritorna ai suoi studi di matematica e diventa professore nel 1841. Nel 1846 viene istituita per lui una cattedra di geometria superiore alla Sorbona. Nel 1851 viene eletto membro dell'Accademia delle scienze francese.

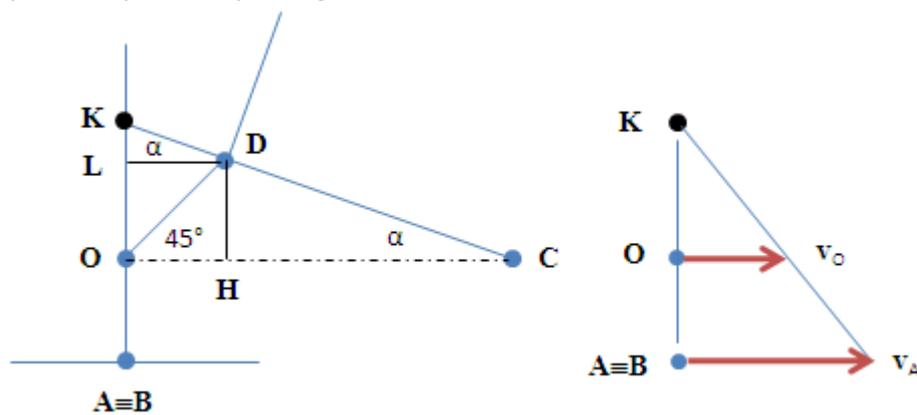
Michel Chasles diventa membro straniero della Royal Society il 15 giugno 1854. I suoi lavori di geometria gli varranno la Medaglia Copley nel 1865.

Esempio 9.14

A device which tests the resistance to wear of two materials A and B is shown. If the link EO has a velocity of 1.2 m/s to the right when $\theta = 45^\circ$, determine the rubbing velocity v_A .



Per prima cosa occorre definire la geometria del sistema nell'istante considerato. Il centro di istantanea rotazione, per il teorema di Chasles, deve trovarsi nell'intersezione tra la perpendicolare passante per A e il prolungamento dell'asta CD.



$$OH = OL = OD \cdot \cos 45^\circ = OD \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 88.39 \text{ mm}$$

Dal triangolo OCD, applicando il teorema dei seni, si ha:

$$\frac{OD}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin 45} \rightarrow \alpha \cong 17.135^\circ$$

Dal triangolo LDK si ha:

$$LK = LD \cdot \tan \alpha \cong 27.25 \text{ mm}$$

Pertanto :

$$AK = AO + OL + LK \cong 265.64 \text{ mm}$$

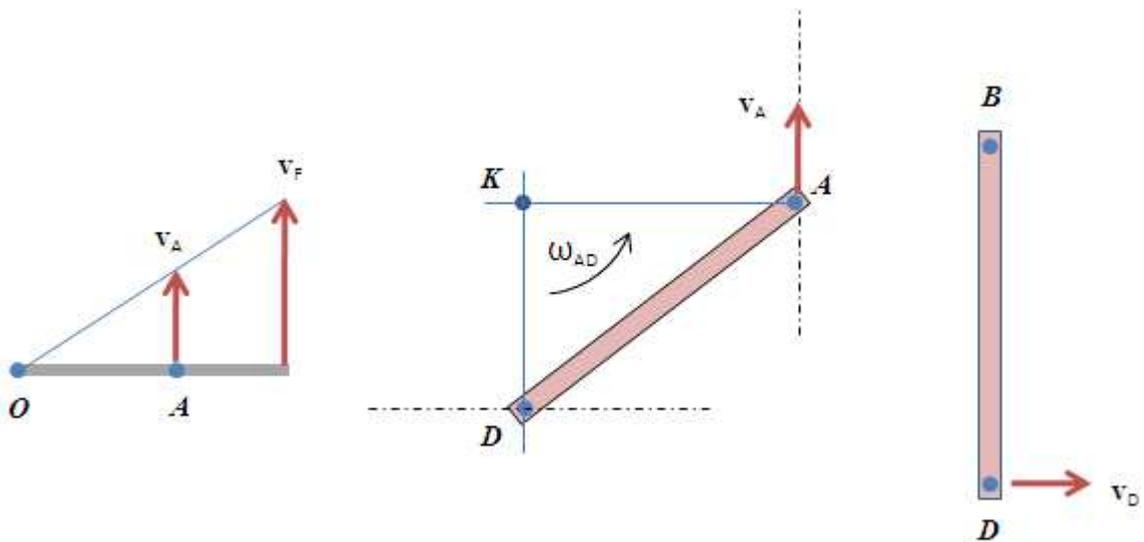
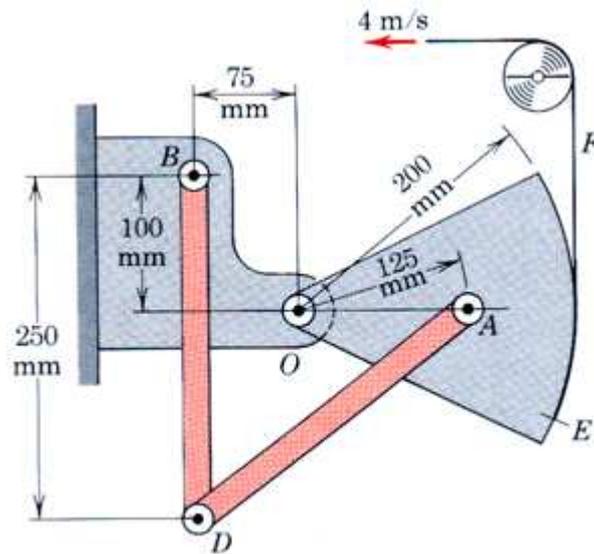
E infine:

$$v_A = v_o \frac{AK}{OK} \cong 2.76 \text{ m/s}$$



Esempio 9.15

The flexible band F is attached at E to the rotating sector and leads over the guide pulley. Determine the angular velocities of AD and BD for the position shown if the band has a velocity of 4 m/s .



$$v_A = v_F \frac{125}{200} = 2.5 \text{ m/s} \quad (\text{centro di istantanea rotazione del settore "triangolare" in O})$$

$$\omega_{OA} = \frac{v_A}{OA} = \frac{2.5}{0.125} = 20 \text{ rad/s CCW}$$

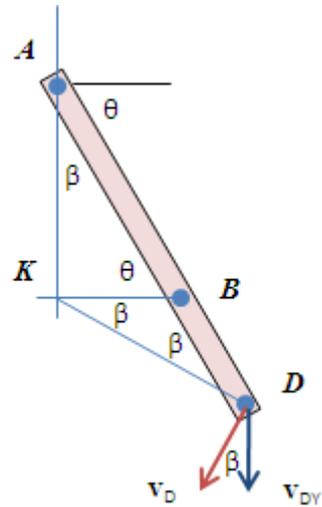
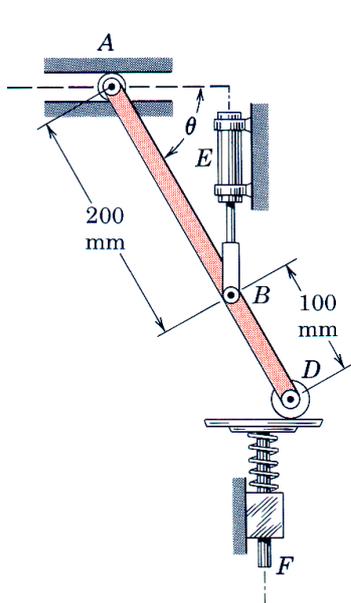
$$\omega_{AD} = \frac{v_A}{KA} = \frac{2.5}{0.2} = 12.5 \text{ rad/s} \quad (\text{centro di istantanea rotazione dell'asta AD in K})$$

$$v_D = \omega_{AD} \cdot KD = 12.5 \cdot 0.150 = 1.875 \text{ m/s}$$

$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{KD} = \frac{1.875}{0.250} = 7.5 \text{ rad/s} \quad (\text{centro di istantanea rotazione dell'asta BD in B})$$

Esempio 9.16

Vertical oscillation of the spring-loaded plunger F is controlled by a periodic change in pressure in the vertical hydraulic cylinder E. For the position $\omega = 60^\circ$, determine the angular velocity of AD and the velocity of the roller A in its horizontal guide if the plunger F has a downward velocity of 2 m/s.



La rotolante A è costretta a muoversi orizzontalmente, il punto B dell'asta AD è vincolato ad un movimento verticale: il centro di istantanea rotazione dell'asta AD è in K.

$$v_D = \frac{v_{Dy}}{\cos \beta} = \frac{2}{\cos 30} \cong 2.31 \text{ m/s}$$

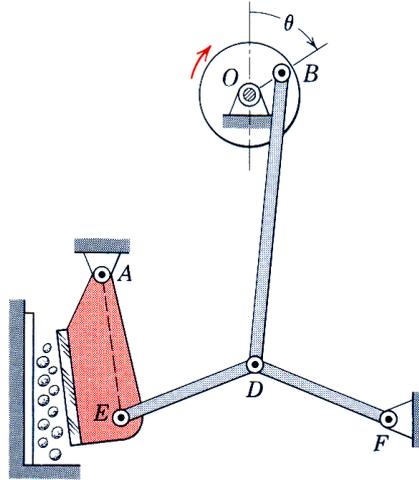
$$\omega_{AD} = \frac{v_D}{KD} \cong \frac{2.31}{2 \cdot 0.1 \cdot \cos 30} \cong 13.33 \text{ rad/s} \quad \text{CCW}$$

$$v_A = \omega_{AD} \cdot KA \cong 13.33 \cdot 0.2 \cdot \sin 60 \cong 2.31 \text{ m/s}$$



Esempio 9.17

Determine the angular velocity ω of the ram head AE of the rock crusher in the position for which $\theta = 60^\circ$. The crank OB has an angular speed of 60 rev/min. When B is at the bottom of its circle, D and E are on horizontal line through F, and lines BD and AE are vertical. The dimensions are $OB = 100$ mm, $BD = 750$ mm, and $AE = ED = DF = 375$ mm.



La distanza OF proiettata orizzontalmente vale 375 mm, mentre proiettata verticalmente vale 850 mm (si ponga, per facilità, B nel punto più basso)

Si ha pertanto:

$$\begin{cases} 100 \cdot \sin 60 - 750 \cdot \cos \alpha + 375 \cdot \cos \beta = 375 \\ -100 \cdot \cos 60 + 750 \cdot \sin \alpha + 375 \cdot \sin \beta = 850 \end{cases}$$

Tramite Mathcad si ottiene

$$x := 0.2 \quad y := 0.2$$

Given

$$86.6 - 750 \cdot \cos(x) + 375 \cdot \cos(y) = 375$$

$$-50 + 750 \cdot \sin(x) + 375 \cdot \sin(y) = 850$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 1.498 \\ 0.417 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\alpha \cong 85.83^\circ \quad \beta \cong 23.9^\circ$$

La distanza OA proiettata orizzontalmente vale 375 mm, mentre proiettata verticalmente vale 450 mm (si ponga, per facilità, B nel punto più basso)

Si ha pertanto:

$$\begin{cases} 375 \cdot \cos \theta + 375 \cdot \cos \gamma + 750 \cdot \cos \alpha - 100 \cdot \sin 60 = 375 \\ -375 \cdot \sin \theta + 375 \cdot \sin \gamma + 750 \cdot \sin \alpha - 100 \cdot \cos 60 = 475 \end{cases}$$

Tramite Mathcad si ottiene:

$$x := 0.2 \quad y := 0.2$$

Given

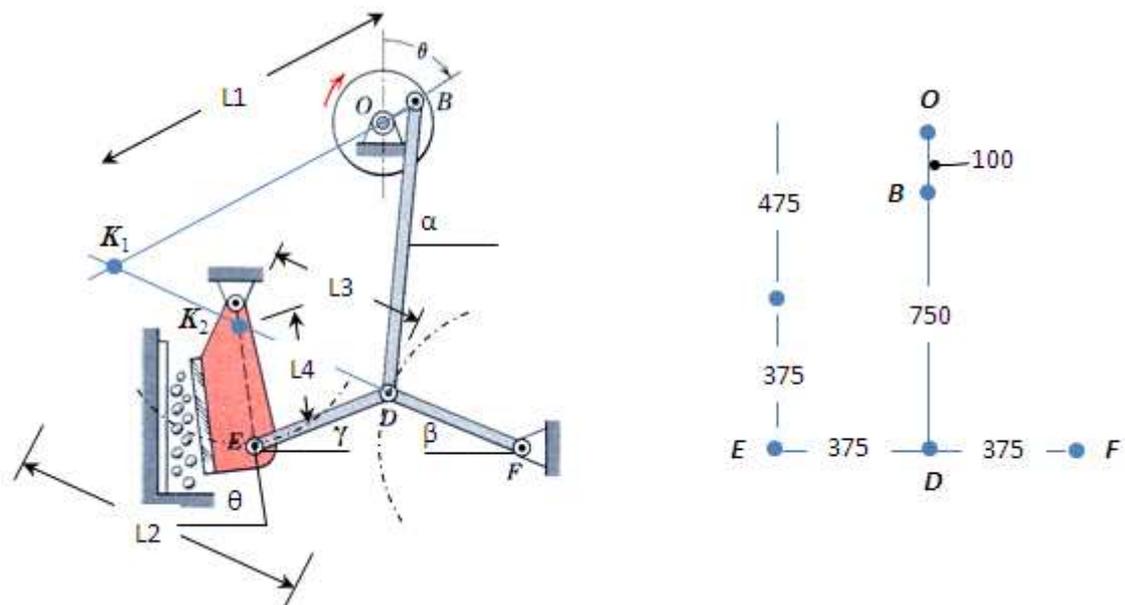
$$375 \cdot \cos(x) + 375 \cdot \cos(y) = 407.06$$

$$-375 \cdot \sin(x) + 375 \cdot \sin(y) = -223$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 1.405 \\ 0.402 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\theta \cong 81.1^\circ \quad \gamma \cong 23.2^\circ$$



Proiettando verticalmente e orizzontalmente il segmento K_1O si ottiene:

$$\begin{cases} L_1 \cdot \sin 30 = -100 \cdot \cos 60 + 750 \sin \alpha - L_2 \cdot \sin \beta \\ L_1 \cdot \cos 30 = L_2 \cos \beta + 750 \cdot \cos \alpha - 100 \cdot \sin 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 773.6 \text{ mm} \\ L_2 = 768.2 \text{ mm} \end{cases}$$

Proiettando verticalmente e orizzontalmente il segmento K_2O si ottiene:

$$\begin{cases} L_3 \cdot \cos \beta = L_4 \cdot \cos \theta + 375 \cdot \cos \gamma \\ L_4 \cdot \sin \beta = L_4 \cdot \sin \theta - 375 \cdot \sin \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_3 = 435.8 \text{ mm} \\ L_4 = 317.8 \text{ mm} \end{cases}$$

Una volta posizionati i centri di istantanea rotazione, le velocità incognite sono facilmente determinabili.

$$\omega_{BD} = \frac{v_B}{K_1B} \cong 6.9 \text{ rpm} \quad \text{CW}$$

$$\omega_{DE} = \omega_{DB} \frac{L_2}{L_3} \cong 12.2 \text{ rpm} \quad \text{CW}$$

$$\omega_{AE} = \omega_{DE} \frac{L_4}{AE} \cong 10.3 \text{ rpm} \quad \text{CW}$$

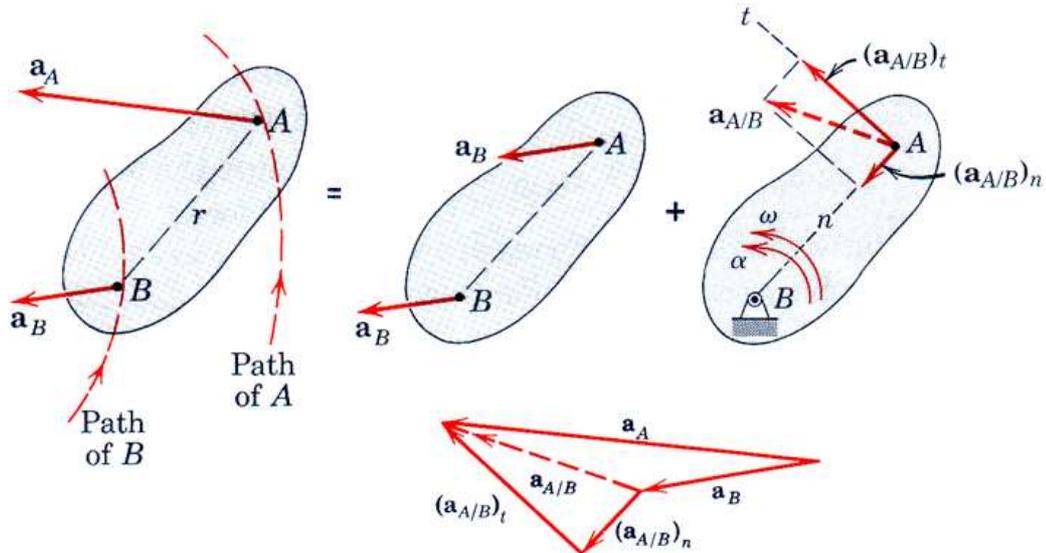


9.3 Accelerazione relativa

L'accelerazione di un punto A, appartenente ad un corpo rigido dotato di moto piano, ricordando che ogni moto può essere scomposto in una traslazione e una rotazione, è uguale all'accelerazione del punto B (appartenente allo stesso corpo rigido) più l'accelerazione che un osservatore, non rotante, solidale con B assegna ad A. In altri termini¹:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \quad (9.3.1)$$

Fig.9.3. 1



L'osservatore non rotante solidale con B (vedi **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**) "vede" il punto A muoversi lungo una traiettoria circolare pertanto è in grado di assegnargli un'accelerazione tangenziale (tangente alla circonferenza descritta da A nel suo moto rispetto a B) e un'accelerazione radiale centripeta, ovvero diretta da A a B.

La (9.3.1) può pertanto essere riscritta come segue:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad (9.3.2)$$

Dove i moduli delle componenti dell'accelerazione relativa valgono:

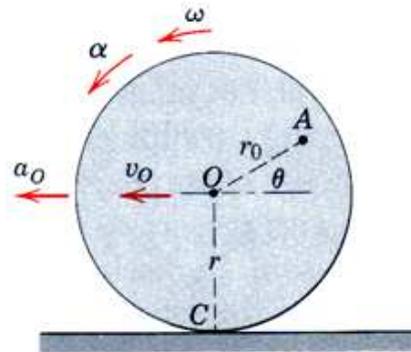
$$\begin{cases} (a_{A/B})_n = \frac{v_{A/B}^2}{r} \\ (a_{A/B})_t = r \cdot \alpha \end{cases} \quad (9.3.3)$$

Dalle (9.3.3) risulta evidente che per riuscire a determinare l'accelerazione incognita si dovrà, in generale, calcolare preliminarmente $v_{A/B}$.

¹ La (9.3.1) può essere ottenuta derivando la (9.1.4)

Esempio 9.18

The wheel of radius r rolls to the left without slipping and, at the instant considered, the center O has a velocity v_0 and an acceleration a_0 to the left. Determine the acceleration of points A and C on the wheel for the instant considered.



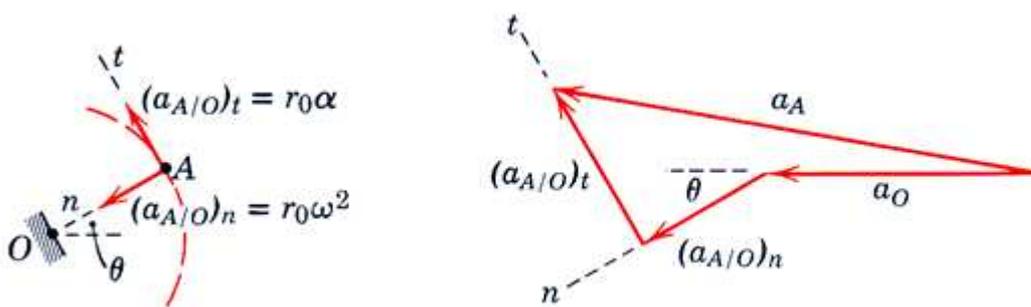
Scriviamo l'espressione dell'accelerazione di A in funzione dell'accelerazione assegnata del punto O .

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O} = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{A/O})_n + (\mathbf{a}_{A/O})_t$$

I moduli delle componenti normale e tangenziale dell'accelerazione relativa valgono:

$$\begin{cases} (a_{A/O})_n = r_0 \cdot \omega^2 = r_0 \left(\frac{v_0^2}{r} \right) \\ (a_{A/O})_t = r_0 \cdot \alpha = r_0 \left(\frac{\alpha_0}{r} \right) \end{cases}$$

Da cui la soluzione grafica sotto riportata.



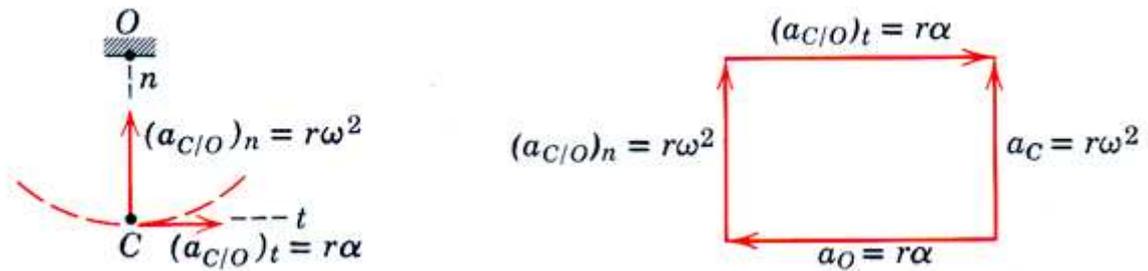
Il modulo del vettore \mathbf{a}_A può essere calcolato facilmente anche per via algebrica.

$$a_A = \sqrt{(a_A)_n^2 + (a_A)_t^2} = \sqrt{(a_0 \cdot \cos \theta + (a_{A/O})_n)^2 + (a_0 \cdot \sin \theta + (a_{A/O})_t)^2}$$

L'accelerazione del centro di istantanea rotazione C (ovviamente con velocità nulla) si trova in modo del tutto analogo esprimendola in funzione della accelerazione di C relativa ad O.

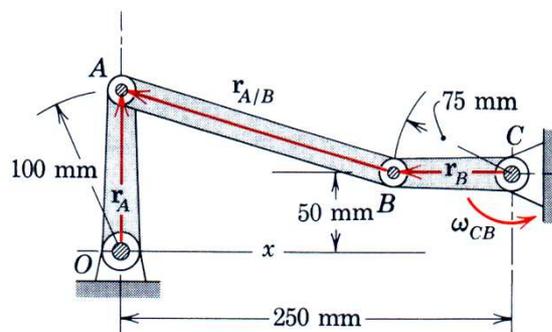
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{C/O} = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{C/O})_n + (\mathbf{a}_{C/O})_t$$

Da cui la soluzione grafica sotto riportata.



Esempio 9.19

The linkage of Esempio 9.6 is repeated here. Crank CB has a constant counterclockwise angular velocity of 2 rad/s in the position shown during a short interval of its motion. Determine the angular acceleration of links AB and OA for this position.

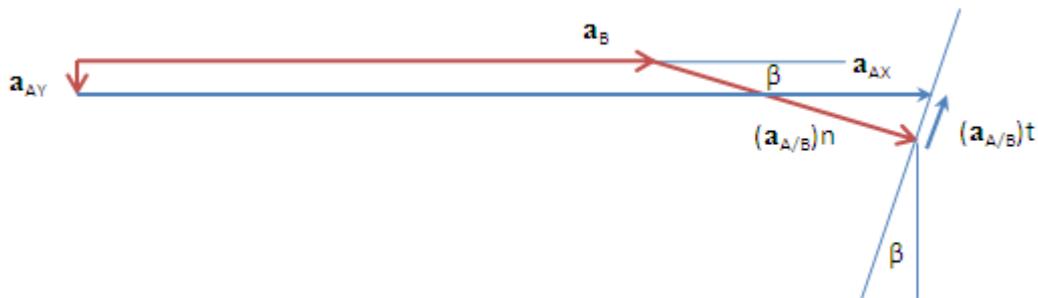


Dall'Esempio 9.6 sappiamo che:

$$\omega_{AB} = -6/7 \text{ rad/s} \quad \omega_{OA} = -3/7 \text{ rad/s}$$

(il segno negativo identifica una rotazione oraria)

Di seguito riportiamo lo schema grafico risolutivo



$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{50}{175}\right)$$

$$a_B = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 300 \text{ mm/s}^2$$

$$(a_{A/B})_n = \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \sqrt{(50^2 + 175^2)} = 133.72 \text{ mm/s}^2$$

$$a_{Ay} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 100 = 18.37 \text{ mm/s}^2$$

Con due proiezioni sugli assi x e y si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{Ay} = (a_{A/B})_n \cdot \sin \beta - \alpha_{AB} \cdot AB \cdot \cos \beta \\ a_{Ax} = a_B + (a_{A/B})_n \cdot \cos \beta + \alpha_{AB} \cdot AB \cdot \sin \beta \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:

$$\alpha_{AB} = 0.1049 \quad \alpha_{OA} = 4.3372$$

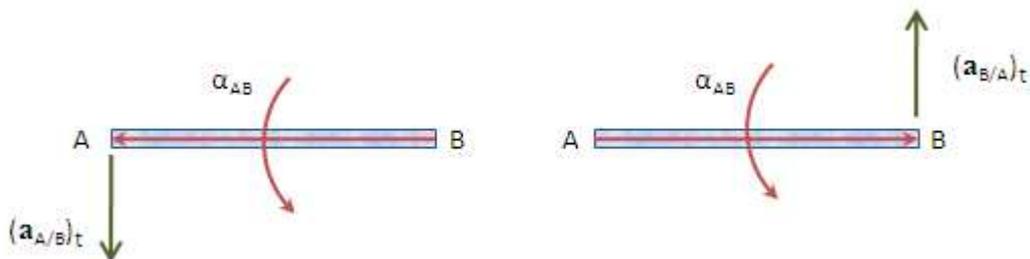
e per come si sono stabiliti i versi dei vettori entrambe le accelerazioni sono orarie¹.



¹ Si noti in particolare che la direzione e il verso del vettore $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ implica una accelerazione α_{AB} oraria che risulta confermata dalla corrispondente soluzione positiva. Un modo semplice per determinare il verso di una generica accelerazione relativa tangenziale è il seguente:

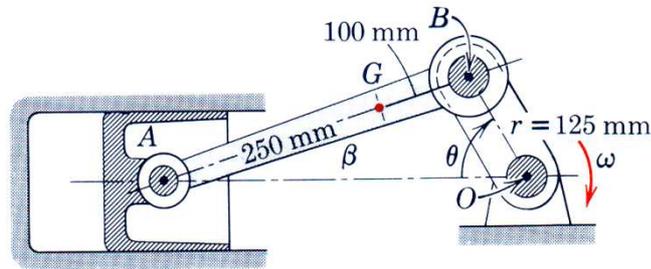
- 1) Nell'ipotesi di determinare l'accelerazione relativa tangenziale di A rispetto a B, si tracci un segmento orientato da B verso A.
- 2) Il verso dall'accelerazione cercata è individuata dal movimento della punta della freccia in conseguenza della accelerazione angolare α_{AB}

N.B. L'accelerazione tangenziale relativa di B rispetto ad A è opposta alla precedente.



Esempio 9.20

The crank OB, of a slider-crank mechanism, has a constant clockwise angular speed of 1500 rev/min. For the instant when the crank angle is 60° , determine the acceleration of the piston A and the angular acceleration of the connecting rod AB.



Nell'Esempio 9.7 abbiamo in precedenza trovato che, nella posizione considerata, la velocità angolare della biella AB vale:

$$\omega_{AB} = 29.5 \text{ rad/s}$$

L'accelerazione dello spinotto A può esprimersi in funzione dell'accelerazione del bottone di manovella B.

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

L'accelerazione di B, considerato appartenente alla manovella è diretta da B verso O ed ha modulo pari a:

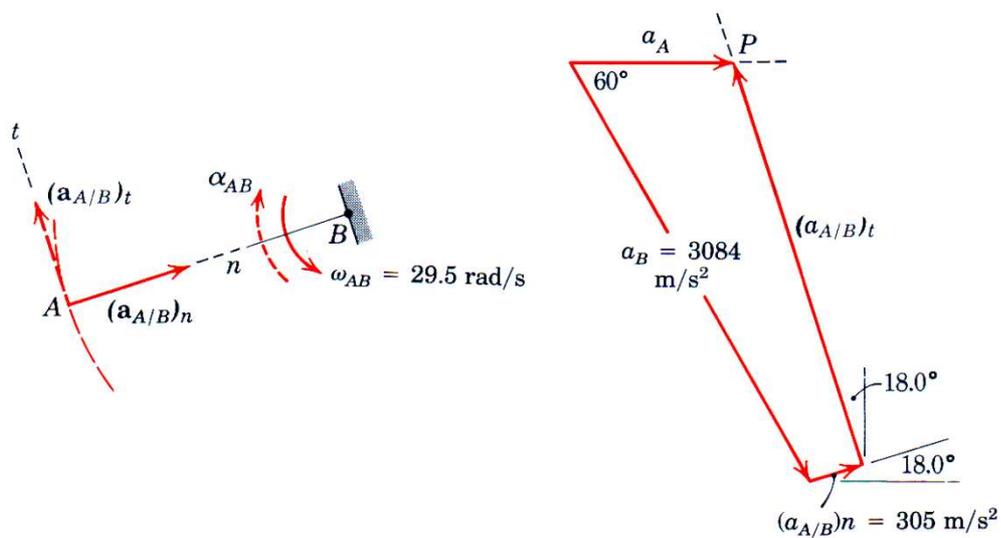
$$a_B = \omega^2 \cdot OB \cong 3084 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione $(\mathbf{a}_{A/B})_n$, diretta da A verso B, ha modulo pari a:

$$(\mathbf{a}_{A/B})_n = \omega_{A/B} \cdot AB^2 \cong 305 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ è conosciuta solo in direzione (perpendicolare ad AB) poiché il suo modulo dipende dall'accelerazione incognita di AB.

Poiché conosciamo la direzione di \mathbf{a}_A (orizzontale), il grafico delle accelerazioni può completarsi come di seguito riportato.



I moduli delle accelerazioni incognite si possono determinare analiticamente scrivendo due equazioni di proiezione, orizzontale e verticale.

$$\begin{cases} a_A = 3084 \cdot \cos 60 + 305 \cdot \cos 18 - (a_{A/B})_t \cdot \sin 18 \\ 0 = 3084 \cdot \sin 60 - 305 \cdot \sin 18 - (a_{A/B})_t \cdot \cos 18 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema lineare sono:

$$(a_{A/B})_t = 2710 \text{ m/s}^2 \quad a_A = 994 \text{ m/s}^2$$

Pertanto il modulo di α_{AB} vale:

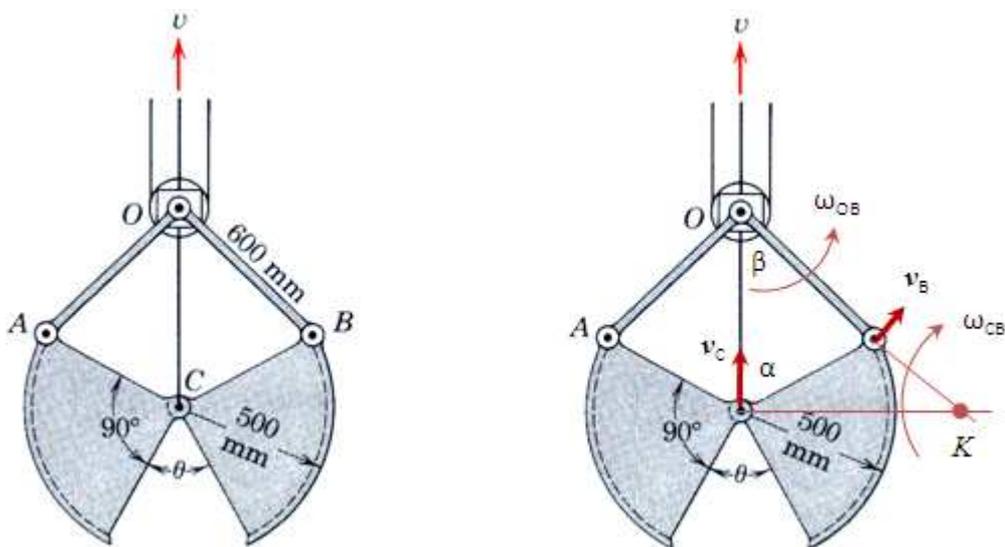
$$\alpha_{AB} = \frac{(a_{A/B})_t}{AB} \cong 7743 \text{ rad/s}^2$$

Dal grafico delle accelerazioni è immediato riconoscere che α_{AB} è diretta in senso antiorario.



Esempio 9.21

A simplified clam-shell bucket is shown in the figure. With the block at O considered fixed and with the constant velocity of the control cable at C equal to 0.5 m/s, determine the angular acceleration α of the right-hand bucket jaw when $\theta = 45^\circ$ as the bucket jaws are closing.



Analisi delle velocità

L'angolo BOC vale 67.5° , l'angolo BOC si determina dal triangolo OBC applicando il teorema dei seni.

Pertanto:

$$\begin{aligned} \alpha &= 67.5^\circ & \beta &= 50.35^\circ \\ CO &= 600 \cdot \cos \beta + 500 \cdot \cos \alpha = 574.2 \text{ mm} \\ CK &= CO \cdot \tan \beta \cong 692.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\omega_{CB} = \frac{v_C}{CK} \cong 0.722 \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

$$v_B = \omega_{CB} \cdot \left(\frac{CK}{\sin \beta} - 0.6 \right) \cong 0.2165 \text{ m/s}$$

$$\omega_{BO} = \frac{v_B}{OB} \cong 0.361 \text{ rad/s} \quad \text{CCW}$$

Analisi delle accelerazioni

Esprimiamo l'accelerazione di B relativamente all'accelerazione di C.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{B/C}$$

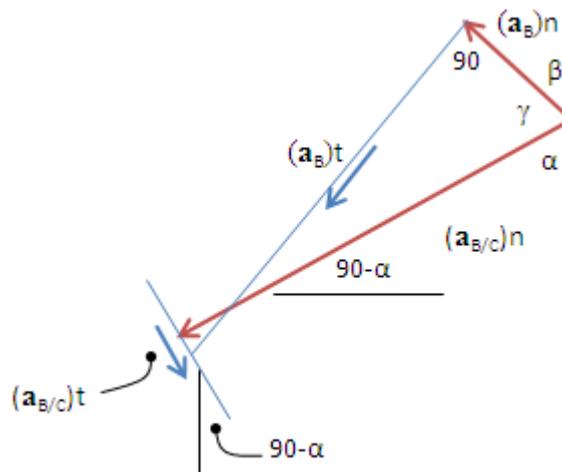
Poiché il punto C si muove con velocità costante si ha:

$$(\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = (\mathbf{a}_{B/C})_n + (\mathbf{a}_{B/C})_t$$

$$(a_B)_n = \omega_{BO}^2 \cdot OB \cong 0.0782 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{B/C})_n = \omega_{CB}^2 \cdot CB \cong 0.2606 \text{ m/s}^2$$

E' possibile pertanto costruire il diagramma delle accelerazioni.



Scriviamo ora due equazioni di proiezione in modo da ottenere un sistema lineare nelle incognite $(a_{B/C})_t$ e $(a_B)_t$.

$$\begin{cases} (a_{B/C})_n \cdot \cos(90 - \alpha) - (a_{B/C})_t \cdot \sin(90 - \alpha) = (a_B)_n \cdot \sin \beta + (a_B)_t \cdot \cos \beta \\ (a_{B/C})_n \cdot \sin(90 - \alpha) + (a_{B/C})_t \cdot \cos(90 - \alpha) = -(a_B)_n \cdot \cos \beta + (a_B)_t \cdot \sin \beta \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:

$$(a_{B/C})_t = 0.049 \text{ m/s}^2 \quad (a_B)_t = 0.253 \text{ m/s}^2$$

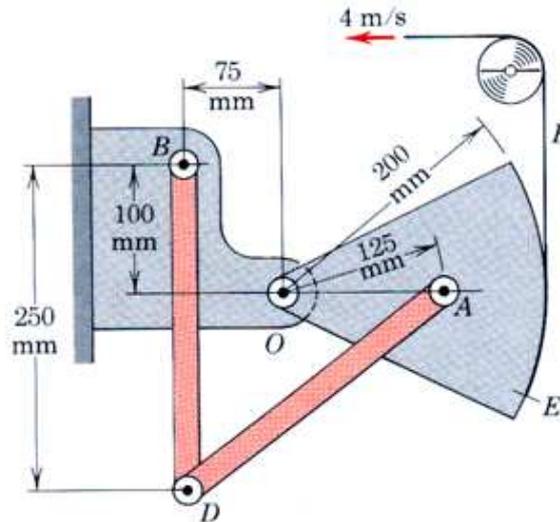
Da cui:

$$\alpha_{BC} = \frac{(a_{B/C})_t}{CB} \cong 0.098 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CW}$$



Esempio 9.22

The mechanism of Esempio 9.15 is repeated here where the flexible band F attached to the sector at E is given a constant velocity of 4 m/s as shown. For the instant when BD is perpendicular to OA, determine the angular acceleration of BD.



Dall'Esempio 9.15 sappiamo che:

$$\omega_{OA} = 20 \text{ rad/s CCW} \quad \omega_{BD} = 7.5 \text{ rad/s CCW} \quad \omega_{AD} = 12.5 \text{ rad/s CCW}$$

Esprimiamo ora l'accelerazione di D relativa ad A

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{D/A}$$

Dato che la fune si muove con velocità costante, l'accelerazione angolare del settore ad essa solidale è nulla. Pertanto l'accelerazione di A, essendo priva della componente tangenziale, è diretta da A verso O.

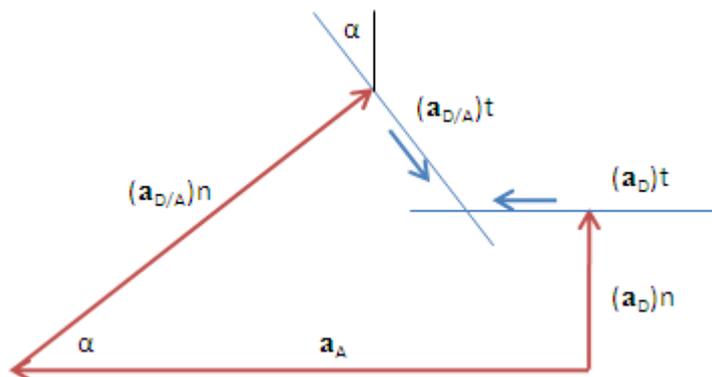
E' facile riconoscere che:

$$a_A = 0.125 \cdot \omega_{OA}^2 = 50 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{D/A})_n = 0.25 \cdot \omega_{AD}^2 \cong 39.06 \text{ m/s}^2$$

$$(a_D)_n = 0.25 \cdot \omega_{BD}^2 \cong 14.06 \text{ m/s}^2$$

Siamo pertanto in grado di costruire il diagramma delle accelerazioni.



Dalla proiezione verticale si ottiene:

$$(a_{D/A})_t \cdot \cos \alpha = (a_{D/A})_n \cdot \sin \alpha - (a_D)_n \rightarrow (a_{D/A})_t \cong 11.72 \text{ m/s}^2$$

Dalla proiezione orizzontale ottiene:

$$(a_D)_n = a_A - (a_{D/A})_n \cdot \cos \alpha - (a_{D/A})_t \cdot \sin \alpha \rightarrow (a_D)_n \cong 11.72 \text{ m/s}^2$$

Le accelerazioni angolari incognite valgono quindi:

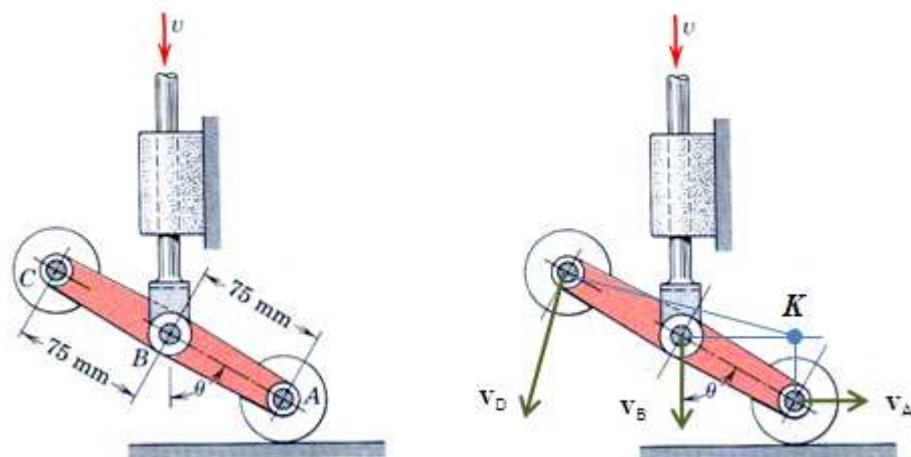
$$\alpha_{AD} = \frac{(a_{D/A})_t}{0.25} \cong 46.9 \text{ rad/s}^2 \text{ CCW}$$

$$\alpha_{BD} = \frac{(a_D)_t}{0.25} \cong 46.9 \text{ rad/s}^2 \text{ CW}$$



Esempio 9.23

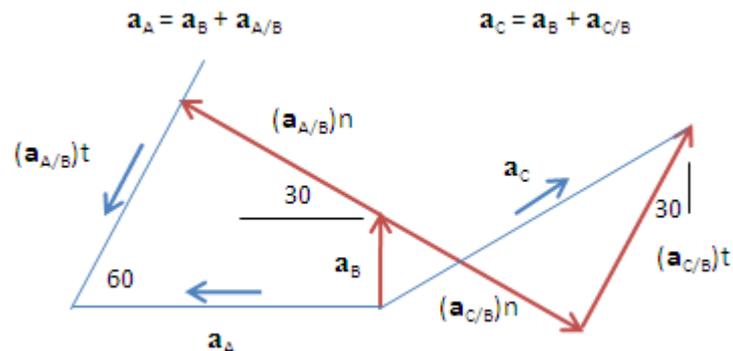
Elements of the switching are shown in the figure. If the velocity v of the control rod is 0.9 m/s and is slowing down at the rate of 6 m/s² when $\theta = 60^\circ$, determine the magnitude of the acceleration of C.



Analisi delle velocità

$$\omega_{AC} = \frac{v_B}{KB} = \frac{0.9}{AB \cdot \cos 30} \cong 13.856 \text{ rad/s} \text{ CCW}$$

Analisi delle accelerazioni



Esprimiamo l'accelerazione di A relativamente a B.

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$

$$a_B = 6 \text{ m/s}^2 \text{ (diretta verticalmente verso l'alto)}$$

$$(a_{A/B})_n = \omega_{AB}^2 \cdot 0.075 \cong 14.4 \text{ m/s}^2 \text{ (diretta da A verso B)}$$

$$(a_{A/B})_t \text{ (diretta perpendicolarmente ad AB)}$$

$$a_A \text{ (diretta orizzontalmente)}$$

Con questi dati siamo in grado di costruire la prima parte del grafico delle accelerazioni.

Scriviamo ora due equazioni di proiezione:

$$\begin{cases} a_A = 14.4 \cdot \cos 30 + (a_{A/B})_t \cdot \cos 60 \\ 6 + 14.4 \cdot \sin 30 - (a_{A/B})_t \cdot \sin 60 = 0 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono:

$$(a_{A/B})_t = 15.242 \text{ m/s}^2 \quad a_A = 20.09 \text{ m/s}^2$$

Da cui:

$$\alpha_{AB} = \frac{(a_{A/B})_t}{AB} \cong 203.227 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CW}$$

Esprimiamo ora l'accelerazione di C relativamente a B

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$$

$$(a_{C/B})_t = 15.242 \text{ m/s}^2 \quad (a_{C/B})_n = 14.4 \text{ m/s}^2$$

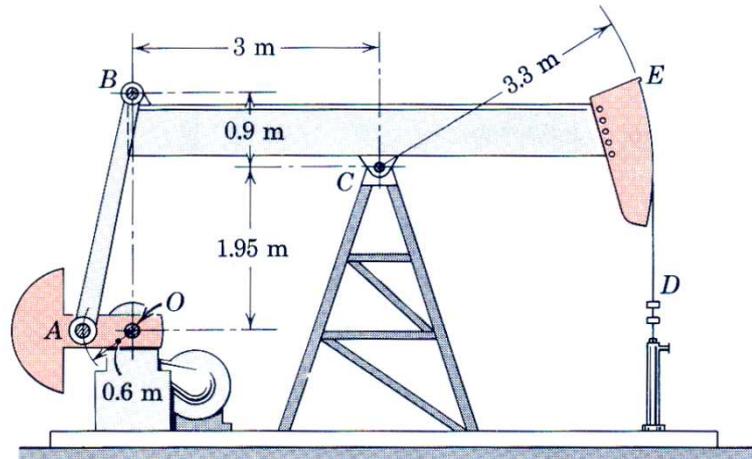
Scrivendo due equazioni di proiezione e risolvendo il sistema associato si ottiene infine:

$$a_C = 23.4 \text{ m/s}^2$$



Esempio 9.24

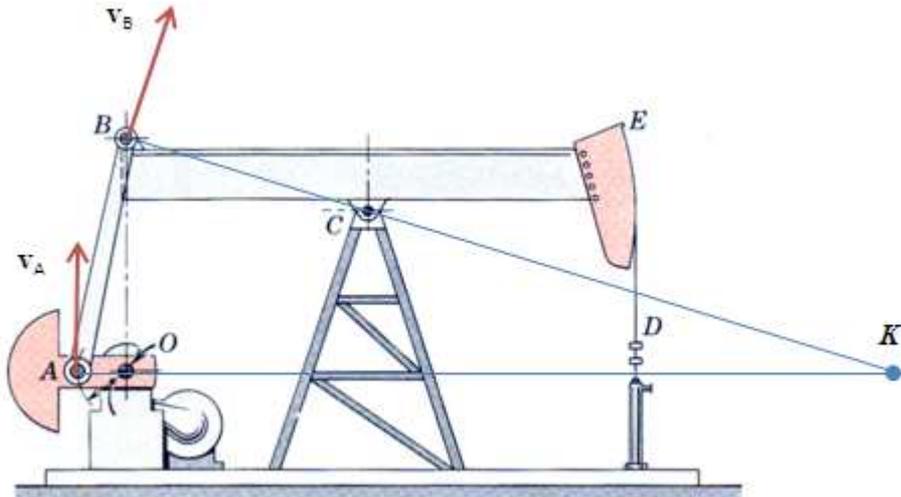
An oil pumping rig is shown in the figure. The flexible pump rod D is fastened to the sector at E and is always vertical as it enters the fitting below D. The link AB causes the beam BCE to oscillate as the weighted crank OA revolves. If OA has a constant clockwise speed of 1 rev every 3 s, determine the acceleration of the pump rod when the beam and the crank OA are both in the horizontal position shown.



Analisi delle velocità

$$\omega_{OA} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

Le velocità angolari dell'asta AB e dell'asta BCE si determinano facilmente una volta definita la posizione del centro di istantanea rotazione K dell'asta AB.



$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0.4 \cdot \pi \text{ m/s}$$

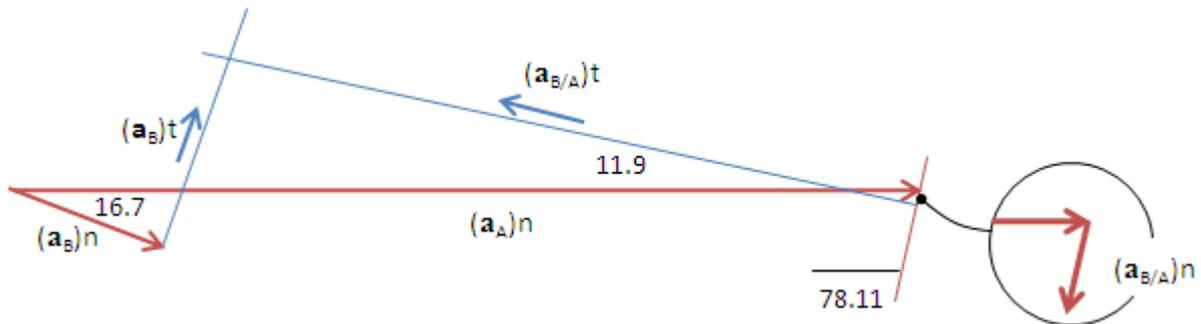
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AK} \cong \frac{0.4\pi}{10.1} \cong 0.04\pi \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

$$\omega_{CE} = \frac{\omega_{AB} \cdot BK}{BC} \cong \frac{0.04\pi \cdot 9.92}{3.132} \cong 0.398 \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

Analisi delle accelerazioni

Esprimiamo l'accelerazione di B relativamente ad A.

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$



$$(a_B)_n = \omega_{CE}^2 \cdot BC \cong 0.496 \text{ m/s}^2$$

$$(a_A)_n = \omega_{OA}^2 \cdot OA \cong 2.63 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{B/A})_n = \omega_{AB}^2 \cdot AB \cong 0.046 \text{ m/s}^2$$

Scrivendo due equazioni di proiezione e risolvendo il sistema associato si ottiene:

$$(a_{B/A})_t \cong 2.036 \text{ m/s}^2 \quad (a_B)_t \cong 0.54 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione angolare della trave BCE vale:

$$\alpha_{CE} = \frac{(a_B)_t}{BC} \cong 0.1724 \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

Conseguentemente l'accelerazione lineare della fune risulta:

$$a_D = \alpha_{CE} \cdot CE \cong 0.1724 \cdot 3.3 \cong 0.569 \text{ m/s}^2 \quad (\text{diretta verticalmente verso il basso})$$



Bibliografia

Gettys WE, Keller FJ, Skove MJ
Halliday D, Resnick R
Hannah J, Stephens RC
Meriam JL, Kraige LG
Serway RA, Jewett JW
Timoshenko S, Young DH

Fisica classica e moderna
Fisica generale I
Mechanics of Machines
Engineering Mechanics Dynamics
Physics for Scientists and Engineers
Meccanica Applicata

McGraw-Hill
Ambrosiana
Arnold
Wiley
Brooks Cole
Boringhieri