

ELEMENTI DI STATICA

1. Premesse

La forza

Def.1. 1

La *forza* è una grandezza fisica sulla quale si fondano la dinamica e la statica. Essa viene definita come l'agente fisico capace di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo (dinamica) o capace di produrre una deformazione (statica).

Ad esempio un qualsiasi oggetto risulta accelerato se su di esso agisce un sistema di forze con risultante non nulla, mentre una trave si flette quando viene caricata ovvero quando su di essa agiscono delle forze. Per la verità l'idea di forza nasce innanzitutto dalla sensazione di sforzo muscolare per poi assumere una formulazione più generale nella meccanica appunto come l'insieme delle influenze che un elemento di materia, anche puntiforme, esercita su un altro in modo da alterarne lo stato di quiete o di moto oppure di provocare deformazioni. In altre parole la forza è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.

Va notato come spesso quando si parla di forze si crede, anche se a torto, che debba esserci la necessaria presenza di contatto tra due o più corpi perché esse possano trasmettersi. Tuttavia l'esperienza quotidiana offre un gran numero di situazioni in cui ciò viene smentito. Se infatti per sollevare una valigia o spingere un'automobile bisogna certamente toccarle, è anche vero che una calamita è in grado di attrarne o respingerne un'altra ben prima che vi sia contatto e analogo discorso vale per i piccoli pezzetti di carta attirati per induzione elettrostatica da una penna di plastica in precedenza vigorosamente strofinata su di un panno di lana. Del resto l'esempio più lampante di forze a distanza, come esse vengono chiamate, lo offre la forza di attrazione gravitazionale, responsabile della caduta al suolo degli oggetti e della danza dei pianeti intorno al sole (per la verità questo è il modo di vedere la gravità dal punto di vista della meccanica classica, dato che nella relatività generale le cose sono nettamente diverse).

Un'analisi più accurata mette poi in luce svariati casi in cui una forza può essere costante o dipendere invece da qualche variabile (il tempo, le coordinate del punto di applicazione, la velocità del corpo) e soprattutto che ad essa vanno assegnati un modulo (intensità), una direzione, un verso e un punto di applicazione ovvero, in altri termini, che la forza ha un carattere vettoriale, non essendo sufficiente, a differenza di una grandezza scalare, un solo numero per caratterizzarla.

Da un punto di vista generale le forze si dividono in:

- *elettriche*, quando avvengono tra cariche elementari, particelle o corpi carichi;
- *magnetiche*, se si verificano tra cariche magnetiche, tra cariche elettriche immerse in un campo magnetico o tra elementi di circuiti elettrici attraversati da corrente;
- *gravitazionali*, quando si realizzano tra masse;
- *nucleari*, se hanno luogo tra le particelle dei nuclei atomici;
- *intermolecolari*, quando presenti tra le molecole di un corpo.

Corpo rigido

Def.1. 2

Si definisce *corpo rigido* un particolare sistema di punti materiali in cui le distanze, tra due qualunque dei suoi punti, non variano nel tempo.

Osservazioni:

- un corpo rigido non subisce alcuna deformazione anche se sottoposto a sollecitazioni estremamente elevate. Il corpo rigido conserva la sua forma.
- il corpo rigido è un'astrazione: in natura non ci saranno mai corpi perfettamente rigidi.
- ci saranno corpi il cui comportamento, in particolari condizioni, può essere descritto come quello di un corpo rigido.

Grado di libertà

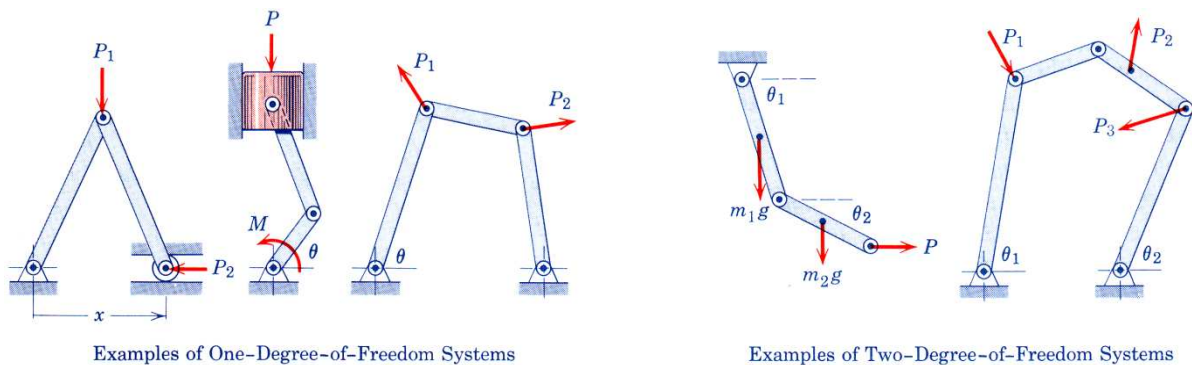
Def.1. 3

Dicesi grado di libertà il numero di parametri cinematici necessari a caratterizzare il moto o l'atto di moto di un corpo o di un sistema di corpi. (Fig.1. 1)

Osservazioni:

- un corpo rigido nello spazio tridimensionale ha 6 gradi di libertà (3 alla traslazione e 3 alla rotazione). Nel problema piano, il corpo rigido ha 3 gradi di libertà (due alla traslazione e una alla rotazione). Nel seguito ci occuperemo soltanto di sistemi piani.
- la cinematica di un sistema composto da n corpi rigidi è definita dalla cinematica di ogni corpo del sistema. Il suo grado di libertà è la somma quindi dei gradi di libertà delle sue parti.
- il grado di libertà di un sistema eguaglia il numero di equazioni scalari necessarie ad imporre l'equilibrio.

Fig.1. 1



I movimenti di un corpo rigido

Un corpo rigido può avere due tipi di movimento:

1. moto di traslazione
2. moto di rotazione

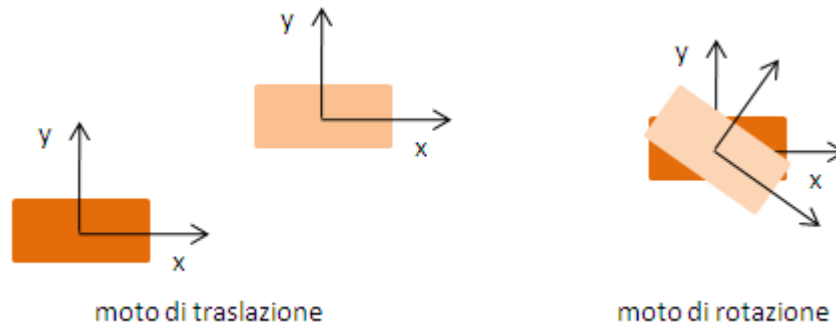
Def.1. 4

Un *moto di traslazione* è un moto in cui tutti i punti di un corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nel medesimo intervallo di tempo. (Fig.1. 2)

Osservazioni:

- tutti i punti del corpo rigido, in un moto di traslazione, hanno lo stesso spostamento di quello subito dal centro di massa;
- tutti i punti di un corpo rigido, in un moto di traslazione, sono fermi rispetto al centro di massa.

Fig.1. 2



Def.1. 5

Un corpo rigido è soggetto ad un moto di rotazione quando tutti i suoi punti si muovono lungo traiettorie circolari con centro comune detto centro di rotazione. (Fig.1. 2)

Osservazioni:

- il piano delle traiettorie è complanare con il centro di rotazione;
- tutti i punti di un corpo rigido, soggetto a rotazione, subiscono lo stesso spostamento angolare nello stesso intervallo di tempo.

I vincoli

Def.1. 6

Si dice vincolo una qualunque condizione imposta ad un sistema materiale che ne impedisce di assumere una generica posizione e/o atto di moto.

Osservazione:

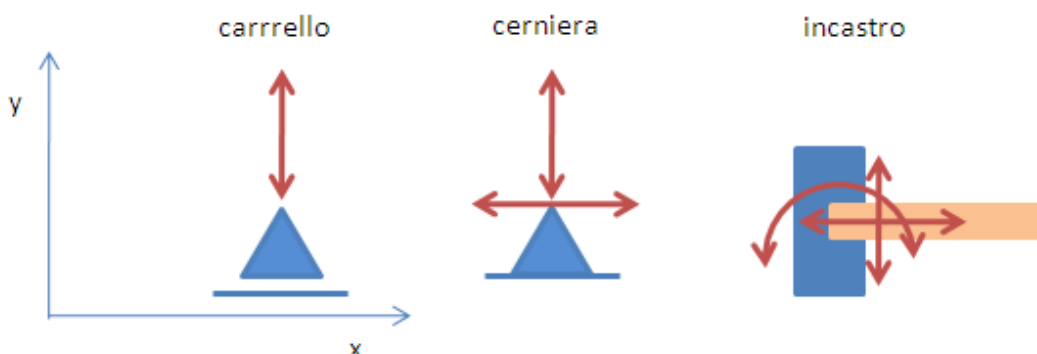
In meccanica, essendo solo le forze capaci di modificare lo stato di quiete o di moto di un sistema, l'azione dei vincoli si esplica attraverso un insieme di forze dette forze vincolari o reazioni vincolari che agiscono sui punti del sistema, limitandone il moto.

Tipi di vincoli

Considereremo soltanto tre vincoli:

1. il carrello: impedisce movimento lungo una direzione perpendicolare alla base. Assorbe un grado di libertà (in Fig.1. 3 blocca il movimento lungo l'asse y)
2. cerniera: impedisce il movimento di traslazione nel piano, ma non si oppone ad una eventuale rotazione. Assorbe due gradi di libertà (in Fig.1. 3 blocca il movimento lungo y e lungo x)
3. incastro: impedisce ogni movimento nel piano. Assorbe tre gradi di libertà (in Fig.1. 3 la traslazione lungo y e lungo x e la rotazione)

Fig.1. 3



Sistema isostatico e iperstatico

Def.1. 7

Un corpo rigido, nel piano, si definisce *isostatico* quando è costretto con vincoli che assorbono esattamente i suoi tre gradi di libertà.

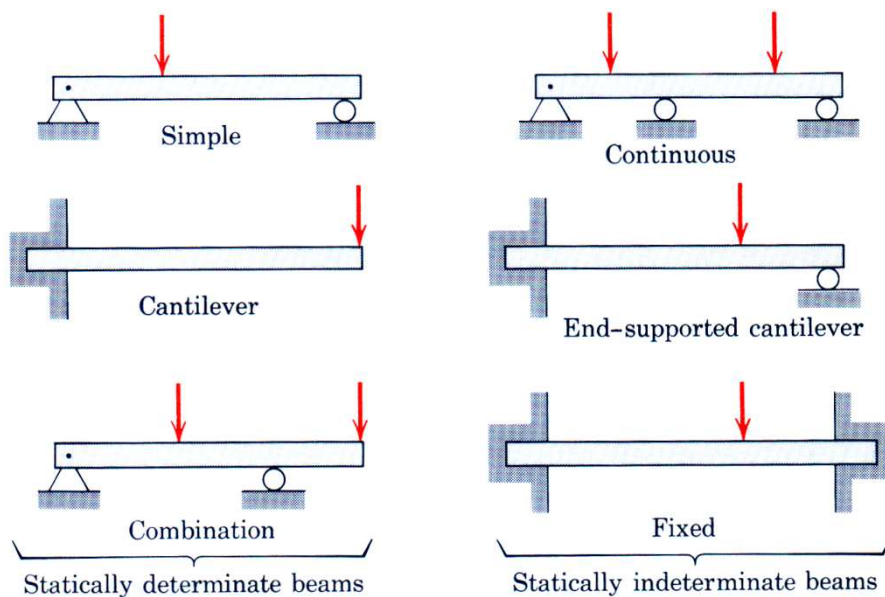
Def.1. 8

Un corpo rigido, nel piano, si definisce *iperstatico* quando è costretto con vincoli che assorbono più dei suoi tre gradi di libertà.

Def.1. 9

Si definisce *grado di iperstaticità* di un corpo rigido nel piano il numero di gradi di libertà assorbiti dai vincoli meno tre (i gradi di libertà di un corpo rigido nel piano)

Fig.1. 4



Braccio di una forza

Def.1. 10

Il braccio di una forza F rispetto ad un punto A è la distanza della direzione di F rispetto ad A . (Fig.1. 5)

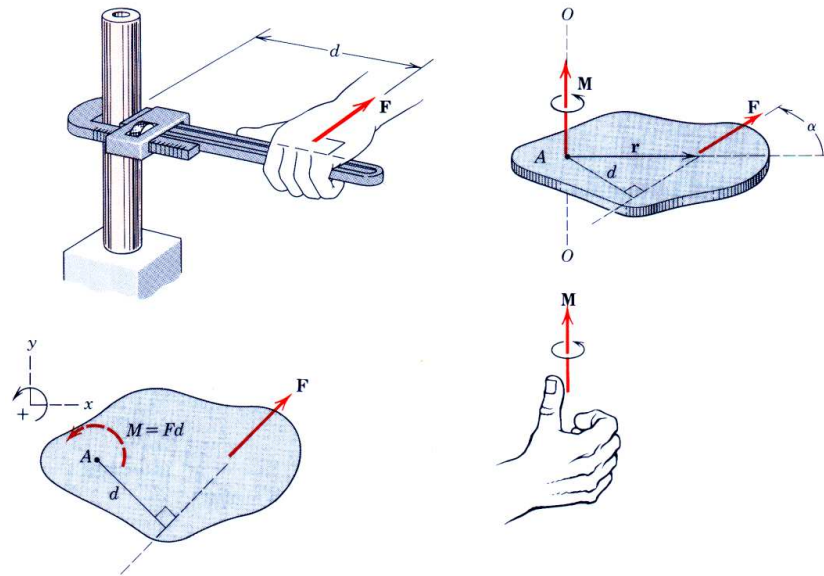
Momento di una forza

Il momento di una forza rispetto ad un punto esprime la tendenza della forza a far ruotare il corpo rispetto al punto

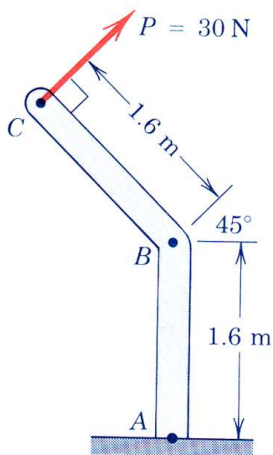
Def.1. 11

Il *momento di una forza* rispetto ad un punto A è un vettore di modulo pari al modulo della forza moltiplicato per il suo braccio rispetto ad A , perpendicolare al piano a cui appartengono F ed A e con verso determinato dalla cosiddetta regola della mano destra.

Fig.1. 5



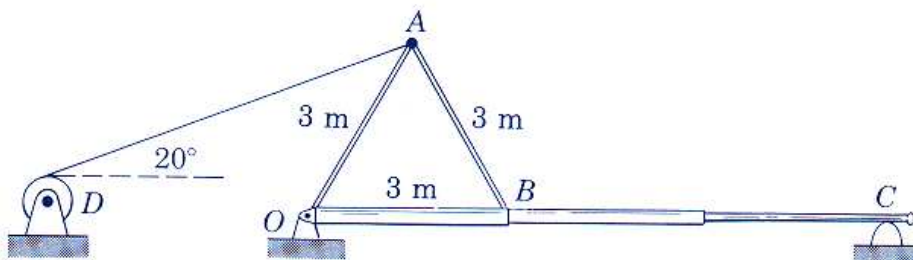
Esempio 1.1



The 30-N force P is applied perpendicular to the portion BC of the bent bar. Determine the moment of P about point B and about point A .
 (Ans. $M_B = 48 \text{ Nm CW}$; $M_A = 81.94 \text{ Nm CW}$)

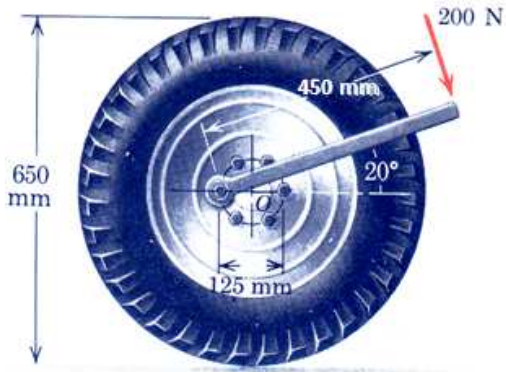
Esempio 1.2

In order to raise the flagpole OC , a light frame OAB is attached to the pole and the tension of 3.2 kN is developed in the hoisting cable by the power winch D . Calculate the moment M_O of this tension about the hinge point O



(Ans. $M_O = 6.17 \text{ kNm CCW}$)

Esempio 1.3



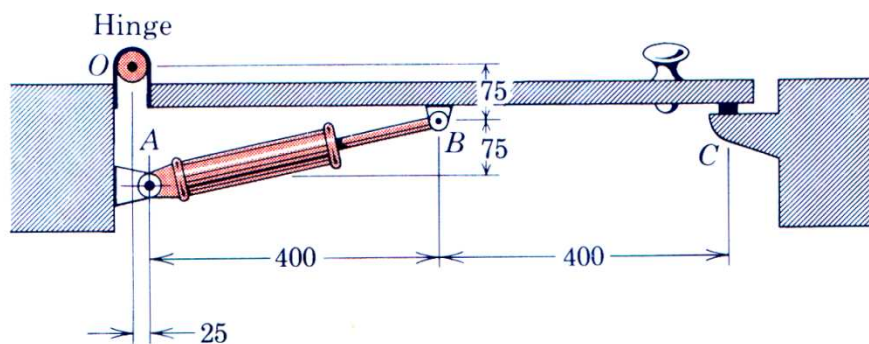
A force of 200 N is applied the end of the wrench to tighten a flange bolt which holds the wheel to the axle. Determine the moment M produced by this force about the center O of the wheel for the position of the wrench shown

(Ans. $M_o = 78.25 \text{ Nm CW}$)



Esempio 1.4

The force exerted by the plunger of cylinder AB on the door is 40 N directed along the line AB, and this force tends to keep the door closed. Compute the moment of this force about the hinge O. What force F_c normal to the plane of the door must the door stop at C exert on the door so that the combined moment about O of the two forces is zero?



(Ans. $M_o = 6.08 \text{ Nm CW}$; $F_c = 7.4 \text{ N}$)



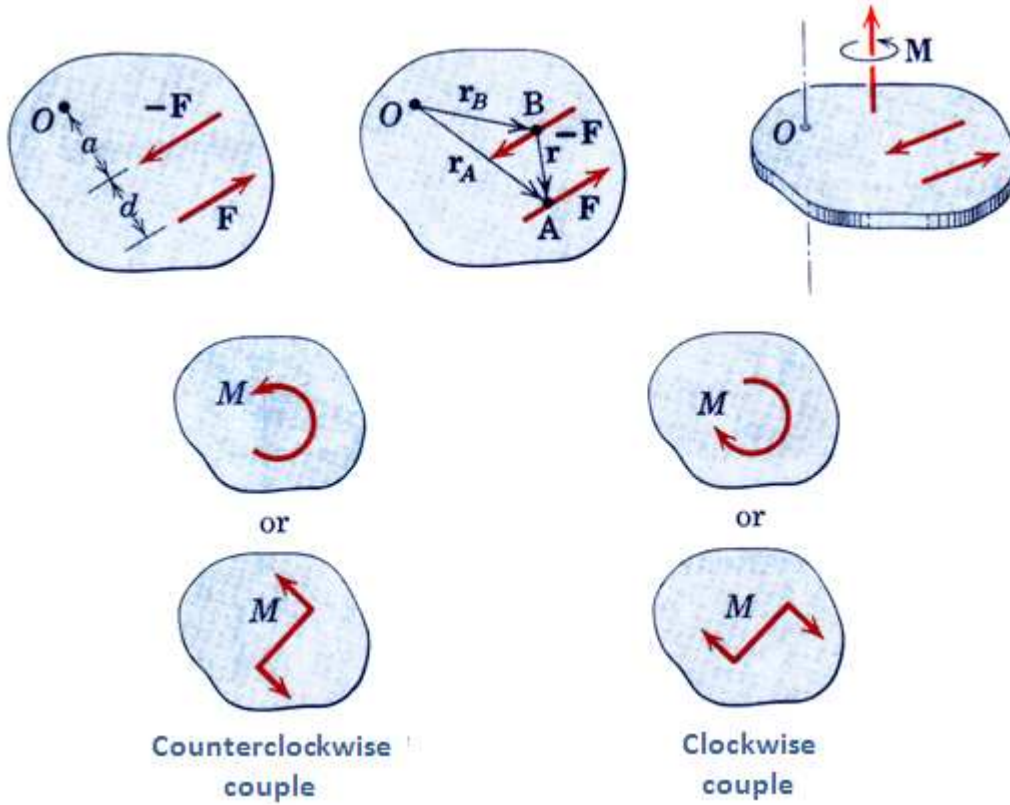
Coppia

Def.1. 12

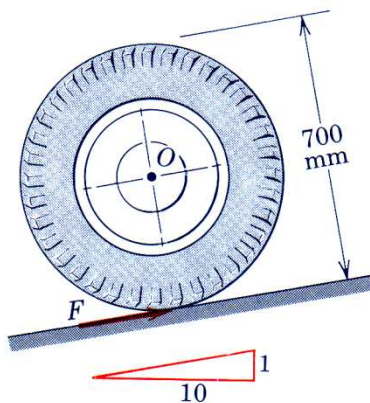
La coppia è costituita da due forze uguali e opposte e non collineari.

Osservazione:

- il momento di una coppia è lo stesso per ogni punto del piano ed è pari al prodotto dell'intensità delle forze per la loro distanza.



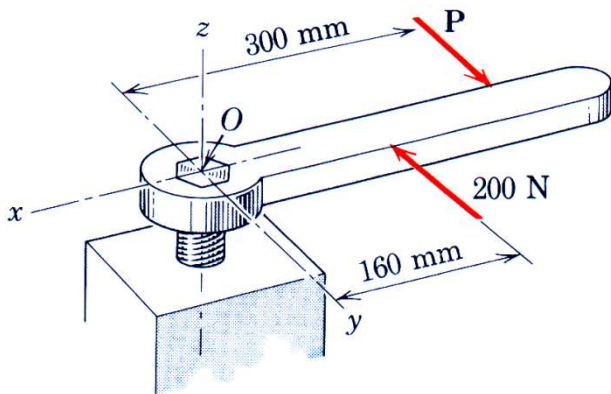
Esempio 1.5



During the motion of a car at constant speed up a 10 percent incline, a torque (couple) of 260 Nm is exerted on each rear wheel by the drivetrain (not shown). If the combined moment about O due to the drive train and the friction force F is to be zero, determine F .

(Ans. $F = 743\text{ N}$)

Esempio 1.6



The wrench is subjected to the 200 N force and the force P as shown. If the equivalent of the two forces is a force R at O and a couple $M = + 20\text{Nm}$, determine the magnitude of P .
(Ans. $P = 40\text{ N}$)



Sistema di forze

Def.1. 13

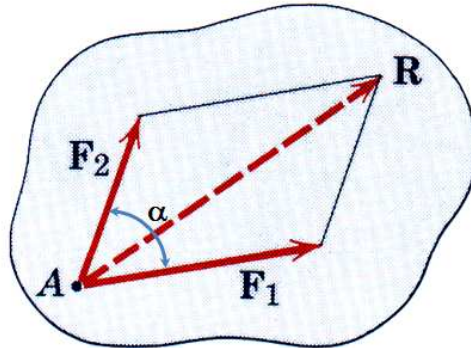
Si definisce *sistema di forze*, un insieme di diverse forze, di varia intensità e direzione agenti su di un corpo.

Parallelogrammo delle forze

Primo principio della statica

Se due forze F_1 ed F_2 , agenti sotto un angolo α , sono applicate ad un corpo nel punto A , la loro azione è equivalente all'azione di una forza R ottenuta come diagonale del parallelogrammo costruito su F_1 e F_2 come indicato in Fig.1. 6

Fig.1. 6



Teorema di Lazare Carnot¹

In un triangolo qualunque, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto di questi due per il coseno dell'angolo opposto al primo lato.

Con riferimento alla Fig.1. 6, noto il teorema di Lazare Carnot, è immediato determinare il modulo di R , una volta noti i moduli di F_1 e F_2 e l'angolo α fra loro compreso.

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos \alpha} \quad (1.1)$$

La (1.1) è in accordo con il secondo principio della statica

¹ Lazare Nicolas Marguerite Carnot (Nolay, 13 maggio 1753 – Magdeburgo, 2 agosto 1823) è stato un generale, matematico, fisico e politico francese. Padre del fisico Nicolas Léonard Sadi Carnot e del politico Lazare Hippolyte Carnot. Nonno del futuro Presidente Marie François Sadi Carnot e del chimico Marie Adolphe Carnot.

Secondo principio della statica

Due forze possono essere in equilibrio soltanto quando esse hanno uguale intensità, sono opposte e hanno la stessa retta d'azione.

Sovrapposizione e trasporto

Terzo principio della statica

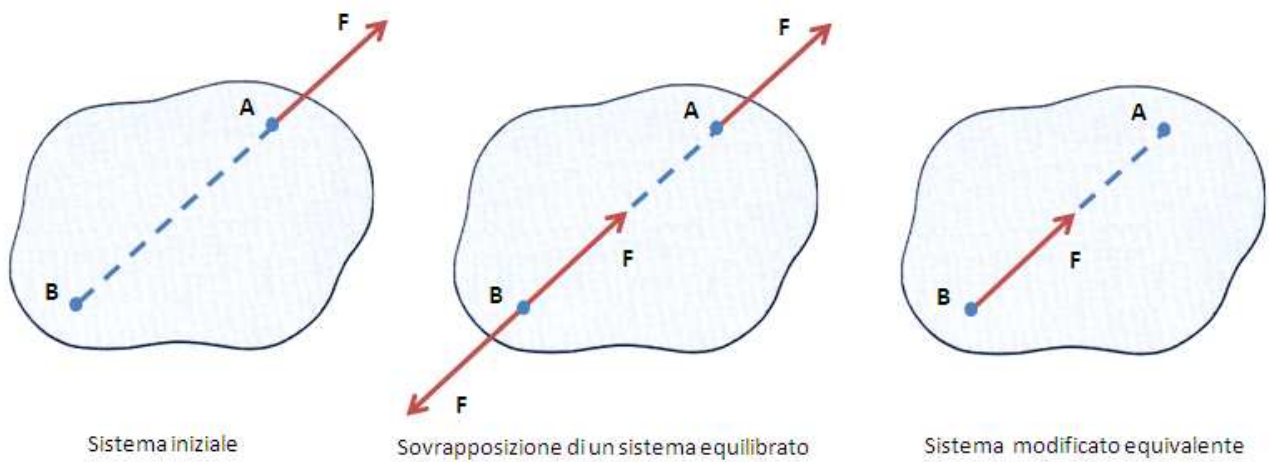
L'azione di un dato sistema di forze non varia se gli si somma o sottrae un altro sistema di forze in equilibrio.

Dal secondo e terzo principio della statica si ottiene il cosiddetto teorema del trasporto delle forze.

Teo 1. 1

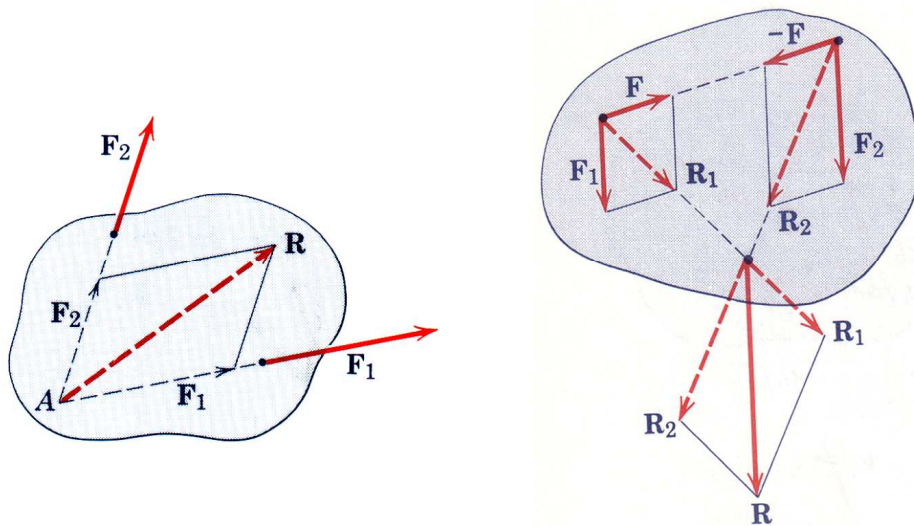
Teorema del trasporto delle forze: l'azione di una forza non muta se si trasporta la forza stessa lungo la propria direzione. (Fig.1. 7)

Fig.1. 7



Siamo pertanto ora in grado di giustificare le composizioni di forze riportate in Fig.1. 8

Fig.1. 8



Equazioni cardinali della statica

Un corpo è in equilibrio se e solo sono verificate le seguenti condizioni¹:

1. la risultante \mathbf{R} di tutte le forze agenti (esterne e vincolari) deve essere nulla;
2. il momento delle forze agenti sul sistema deve essere nullo rispetto ad un polo O qualsiasi .

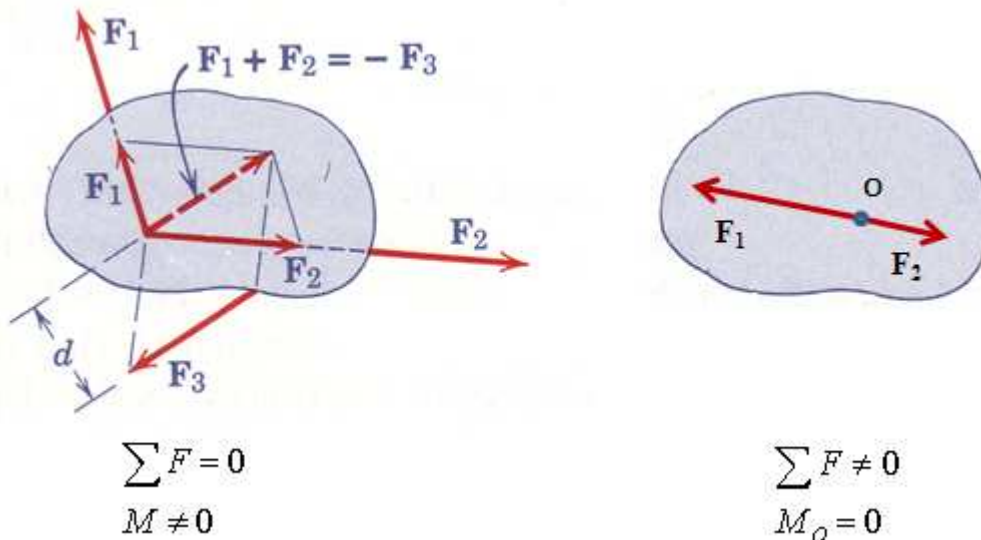
Le condizioni di equilibrio illustrate in precedenza si possono esprimere con due equazioni vettoriali, che nel piano x - y , si riducono a tre equazioni scalari.

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F} = \mathbf{R} = 0 \\ \mathbf{M}_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ M_0 = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Osservazione

Poiché la prima condizione di equilibrio impone che \mathbf{R} sia nullo, se il momento è nullo rispetto al polo O deve risultare nullo anche per ogni punto del piano.

Fig.1. 9



In Fig.1. 9 vediamo due situazioni in cui una delle due condizioni di equilibrio è violata. I corpi raffigurati non sono pertanto in equilibrio.

Determinazione delle reazioni vincolari

Assegnato un corpo rigido vincolato isostaticamente e caricato con forze e momenti, è utile determinare le reazioni vincolari in condizioni di equilibrio, ovvero le reazioni vincolari che soddisfano le condizioni (1.2).

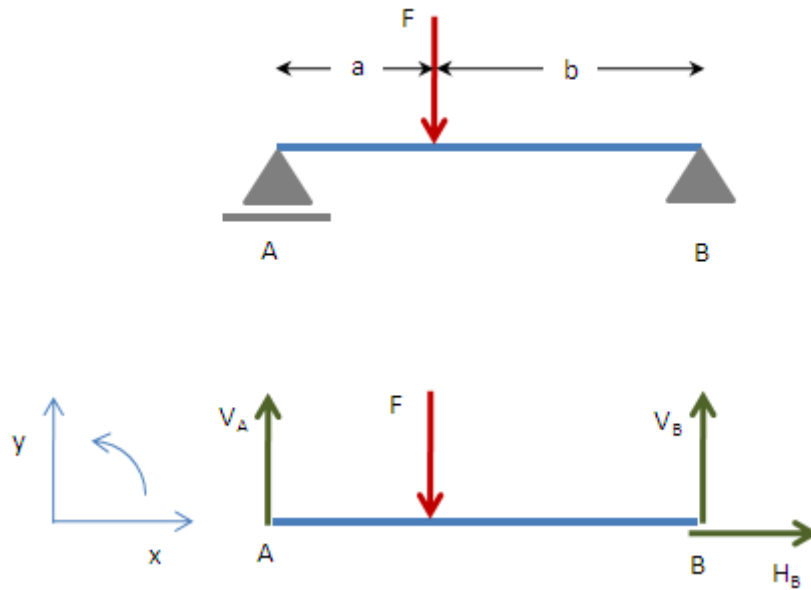
Come si procede

1. si introduce un piano cartesiano x - y complanare con il corpo rigido;
2. si definisce la convenzione di segno per le forze e il momento;
3. si rappresentano, sul corpo rigido, le reazioni vincolari;
4. si determinano le reazioni vincolari in grado di soddisfare le tre equazioni scalari (1.2)

¹ Più precisamente dovremmo dire: "un corpo rigido inizialmente in equilibrio permane in tale stato se e solo se le forze ad esso successivamente applicate soddisfano le seguenti condizioni...."

Esempio 1.7

Determinare le reazioni vincolari della seguente travatura isostatica.



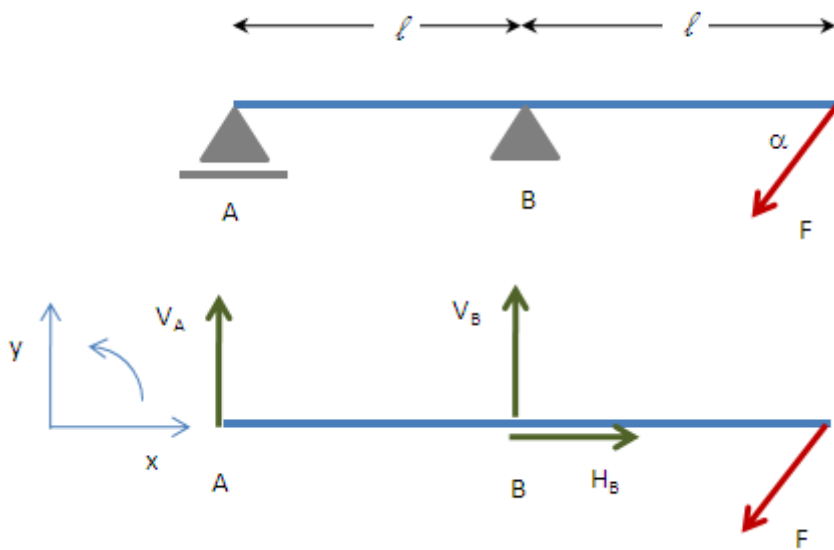
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \rightarrow H_B = 0 \\ \sum F_y = 0 & \rightarrow -F + V_A + V_B = 0 \\ M_A = 0 & \rightarrow V_B(a+b) - F \cdot a = 0 \end{cases}$$

$$V_B = F \frac{a}{a+b}; \quad V_A = F \frac{b}{a+b}$$



Esempio 1.8

Determinare le reazioni vincolari della seguente travatura isostatica.

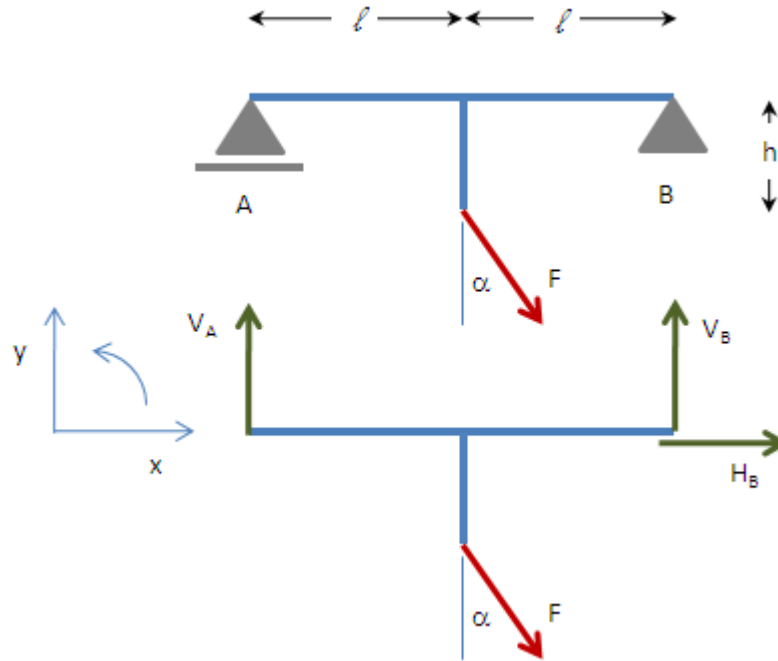


$$\begin{cases} H_B - F \cos \alpha = 0 & \rightarrow H_B = F \cos \alpha \\ V_A + V_B - F \sin \alpha = 0 & \rightarrow V_B = 2F \sin \alpha \\ -V_A \cdot l - F \sin \alpha \cdot l = 0 & \rightarrow V_A = -F \sin \alpha \end{cases}$$



Esempio 1.9

Determinare le reazioni vincolari della seguente travatura isostatica.

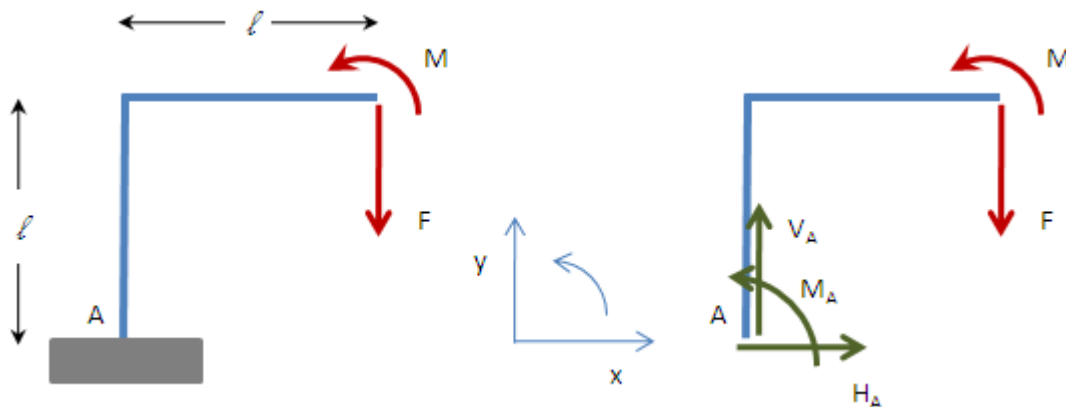


$$\begin{cases} H_B - F \sin \alpha = 0 & \rightarrow H_B = F \sin \alpha \\ V_A + V_B - F \cos \alpha = 0 & \rightarrow V_B = \frac{F \sin \alpha \cdot h + F \cos \alpha \cdot l}{2l} \\ -V_B \cdot 2l + F \sin \alpha \cdot h - F \cos \alpha \cdot l = 0 & \rightarrow V_B = \frac{-F \sin \alpha \cdot h + F \cos \alpha \cdot l}{2l} \end{cases}$$



Esempio 1.10

Determinare le reazioni vincolari della seguente travatura isostatica.

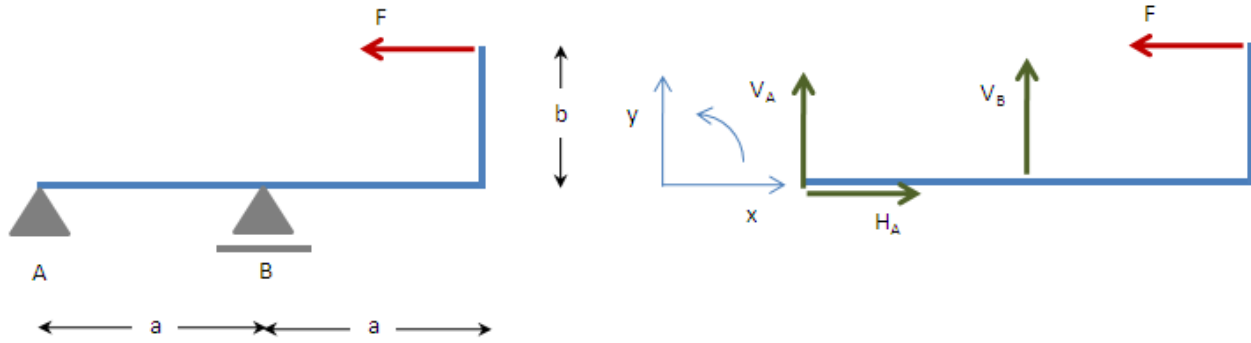


$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F = 0 \\ M_A + M - F \cdot l = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A = F \\ M_A = F \cdot l - M \end{cases}$$



Esempio 1.11

Determinare le reazioni vincolari della seguente travatura isostatica.

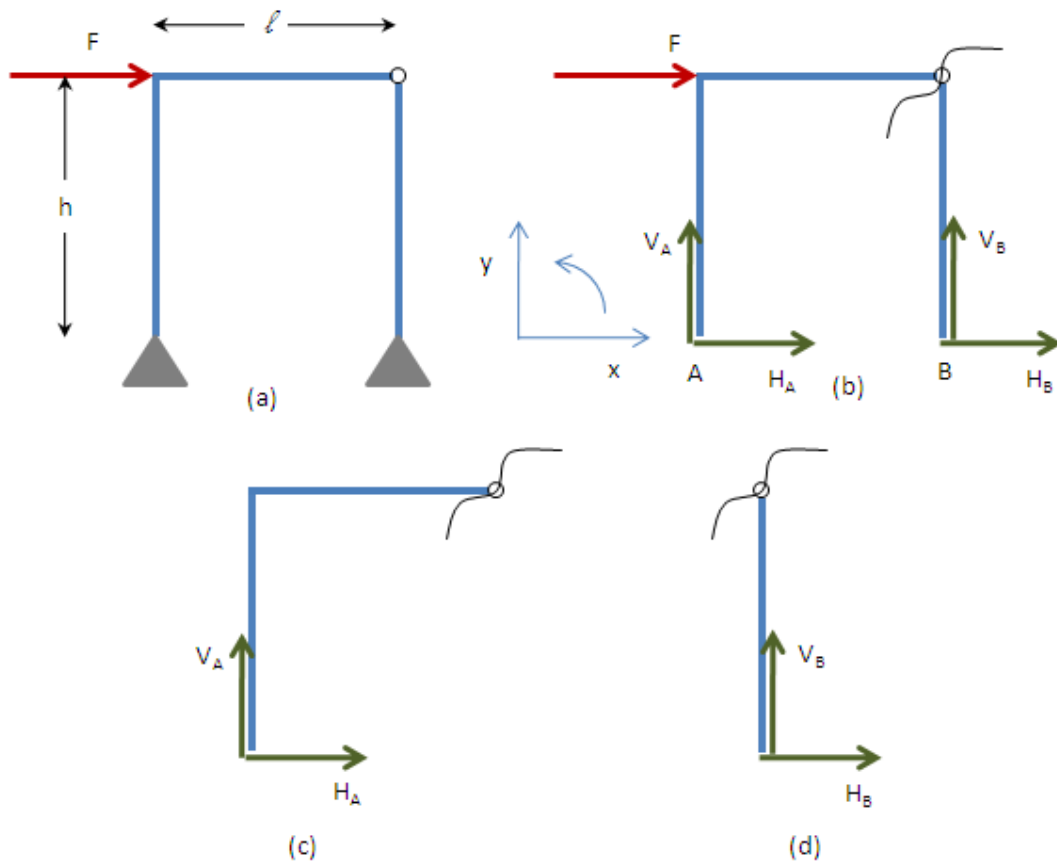


$$\begin{cases} H_A - F = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ V_B \cdot a + F \cdot b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = F \\ V_A = F \frac{b}{a} \\ V_B = -F \frac{b}{a} \end{cases}$$



Esempio 1.12

Determinare le reazioni vincolari del seguente portale isostatico.



Con riferimento alla figura (b) scriviamo le tre equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \rightarrow F + H_A + H_B = 0 \\ \sum F_y = 0 & \rightarrow V_A + V_B = 0 \\ \sum M = 0 & \rightarrow \sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - F \cdot l = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Come è facile riconoscere, siamo in presenza di un sistema lineare di tre equazioni e quattro incognite.

Per determinare le reazioni vincolari occorrerà pertanto smembrare idealmente la struttura in corrispondenza della cerniera e studiare l'equilibrio dei due tronchi (c) e/o (d).

Con riferimento al tronco (d) imponiamo l'equilibrio alla rotazione annullando i momenti rispetto alla cerniera. Si ha quindi:

$$\sum M = 0 \rightarrow H_B = 0 \quad (1.4)$$

Abbiamo ora ottenuto un sistema di quattro equazioni lineari in quattro incognite:

$$\begin{cases} F + H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ V_B \cdot l - F \cdot l = 0 \\ H_B = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$V_B = F; \quad V_A = -F; \quad H_B = 0; \quad H_A = -F$$

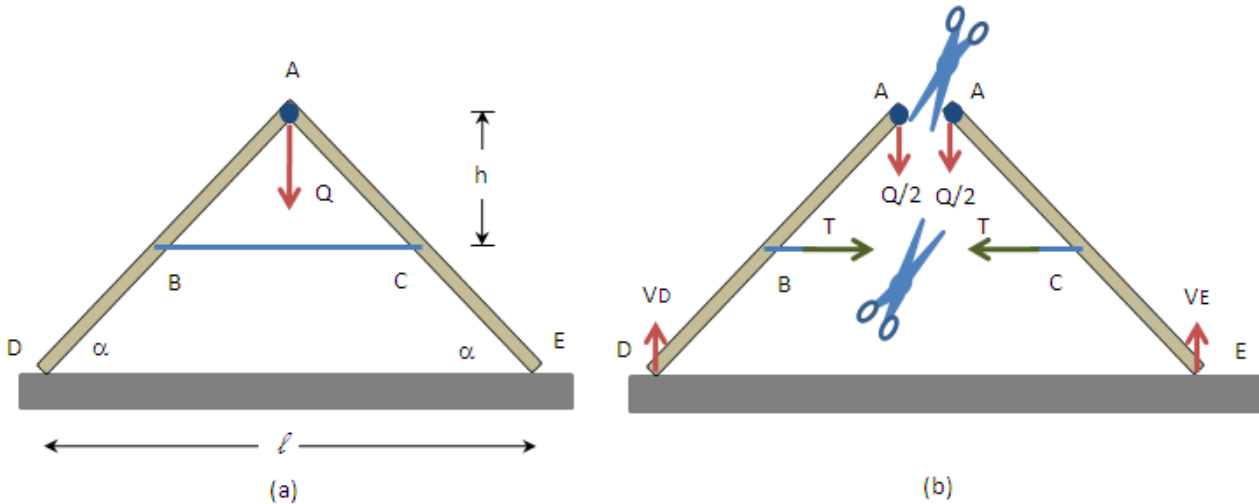
N.B. quando si effettua un taglio, si liberano contestualmente le sollecitazioni interne (nel piano tali sollecitazioni sono F_x , F_y ed M). Quando il taglio viene effettuato in corrispondenza di una cerniera il momento, in corrispondenza di tale taglio, è nullo: la cerniera infatti permette la libera rotazione nel piano.



Esercizio 1.13

Due aste incernierate in A e collegate da un filo BC sono appoggiate su di un piano orizzontale liscio. Determinare la tensione T prodotta nel filo BC dal carico verticale Q applicato in A.

Fig.1. 10



Per ragioni di simmetria è evidente che:

$$V_D = V_E = Q/2$$

Smembriamo la struttura con i due tagli come evidenziato in Fig.1. 10 (b).

Dall'equilibrio alla rotazione del tronco di destra si ottiene (A come polo dei momenti):

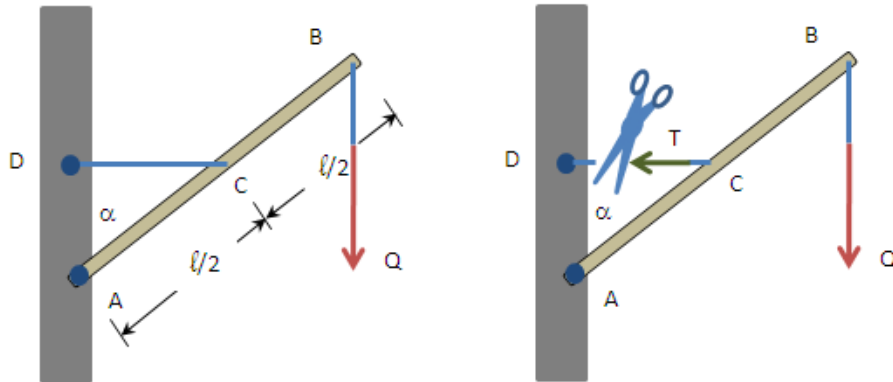
$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_E \frac{l}{2} - T \cdot h = 0 \rightarrow T = \frac{Q \cdot l}{4h}$$



Esercizio 1.14

Un'asta AB è vincolata a un piano verticale e porta un carico Q all'estremo libero. Trascurando il peso proprio dell'asta, valutare l'intensità della tensione T prodotta nel filo orizzontale CD dal carico Q .

Fig.1. 11



Dall'equilibrio alla rotazione (cerniera A come polo dei momenti) si ottiene:

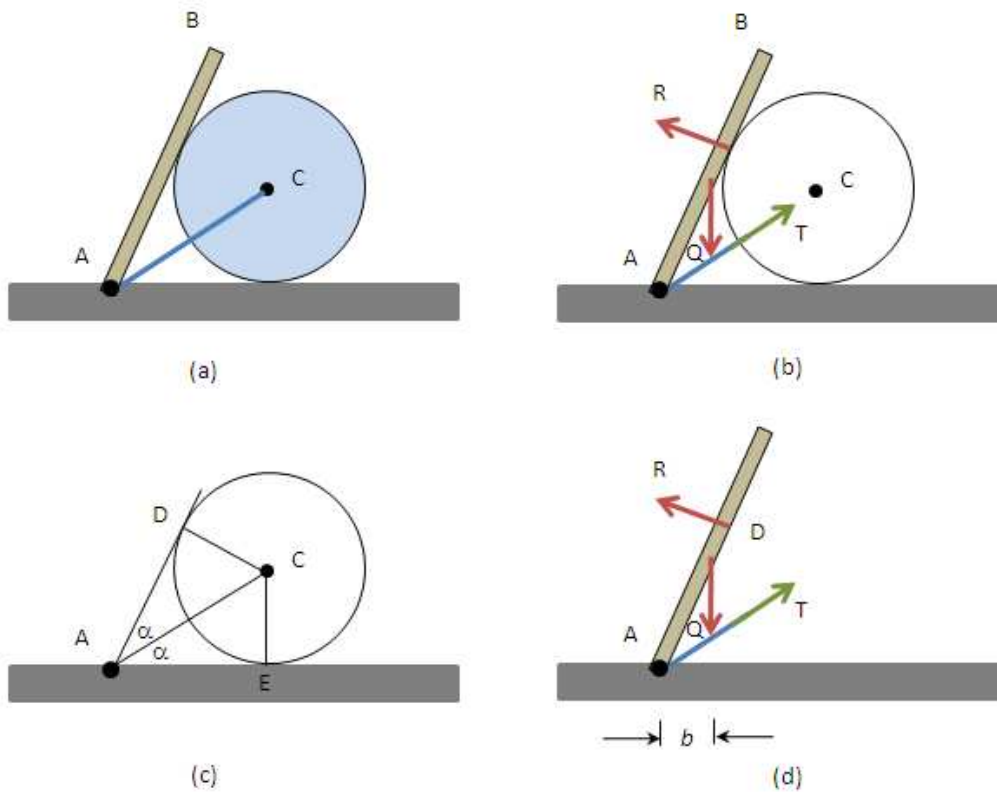
$$\sum M_A = 0 \rightarrow -Q \cdot l \cdot \sin \alpha + T \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \rightarrow T = 2Q \tan \alpha$$



Esercizio 1.15

Un cilindro circolare retto di raggio r è appoggiato al piano orizzontale liscio, e un filo AC di lunghezza $2r$ ne impedisce il rotolamento. Un'asta AB di lunghezza $3r$ e di peso Q è incernierata in A e appoggiata al cilindro. Determinare la tensione T nel filo AC .

Fig.1. 12



Dalla Fig.1. 12 (c) si ottiene:

1. i triangoli AEE ed ADC sono congruenti
2. $AC = 2CE \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
3. $AD = r\sqrt{3}$

Dalla Fig.1. 12 (d), imponendo l'equilibrio alla rotazione (cerniera A come polo dei momenti) si ottiene:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R \cdot r\sqrt{3} - Q \cdot b = 0 \rightarrow R \cdot r \cdot \sqrt{3} - Q \cdot \frac{3}{4}r\sqrt{3} = 0 \rightarrow R = \frac{3}{4}Q$$

Sempre con riferimento alla Fig.1. 12 (b), imponendo l'equilibrio delle forze orizzontali si ottiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T \cdot \cos \alpha - R \cdot \cos(2\alpha) \rightarrow T \frac{\sqrt{3}}{2} = R \frac{1}{2} \rightarrow T = \frac{R}{\sqrt{3}} \rightarrow T = \frac{3}{4\sqrt{3}}Q = \frac{\sqrt{3}}{4}Q$$



2. LE MACCHINE SEMPLICI

Def. 2.1

Per macchina semplice si intende un dispositivo che permette di equilibrare una determinata forza (la cosiddetta *resistenza*) con un'altra forza (la cosiddetta *potenza*).

Noi considereremo nel seguito le seguenti macchine semplici: la leva, la carrucola o puleggia, l'argano, il verricello, il piano inclinato, il cuneo e la vite.

La leva

Def.2 1

Una leva è una macchina semplice composta da due bracci solidali fra loro incernierati ad un'estremità in un fulcro, attorno al quale sono liberi di ruotare.

Le condizioni di equilibrio delle leve si trovano semplicemente imponendo l'annullamento dei momenti rispetto al fulcro.

Fig. 2. 1

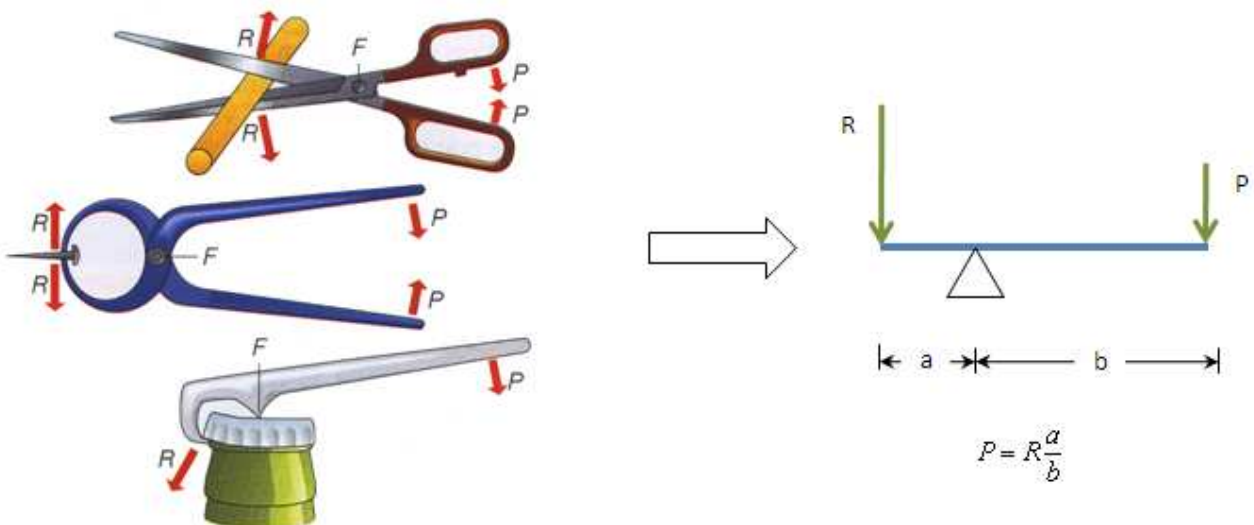


Fig. 2. 2

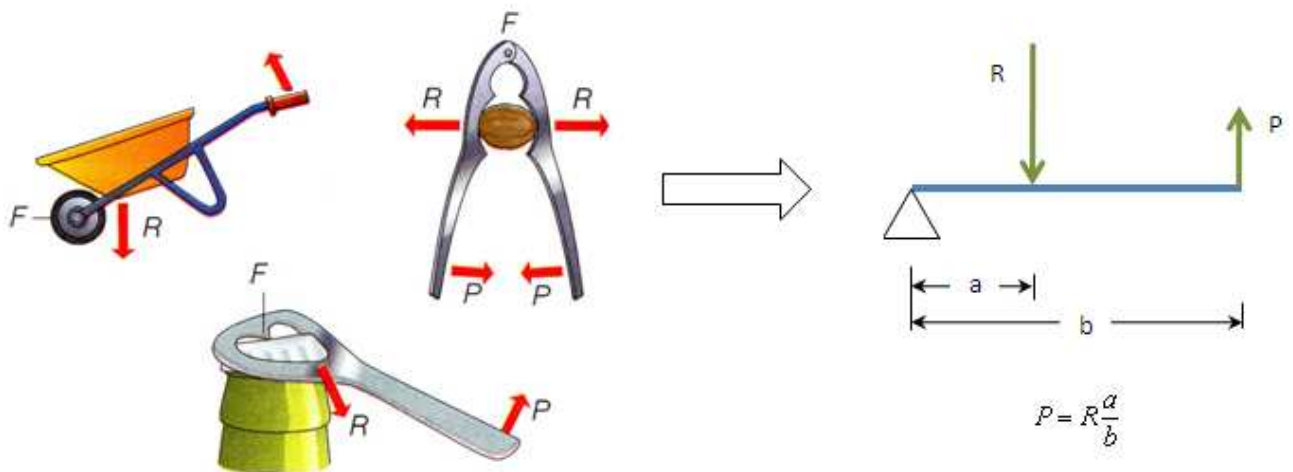
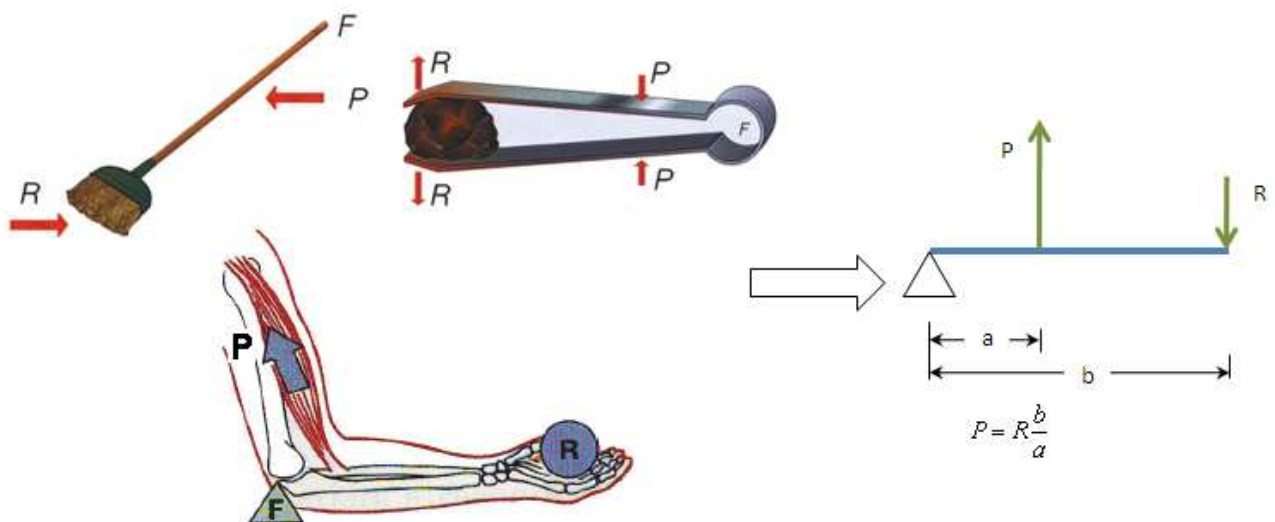


Fig. 2. 3



La carrucola

Def.2 2

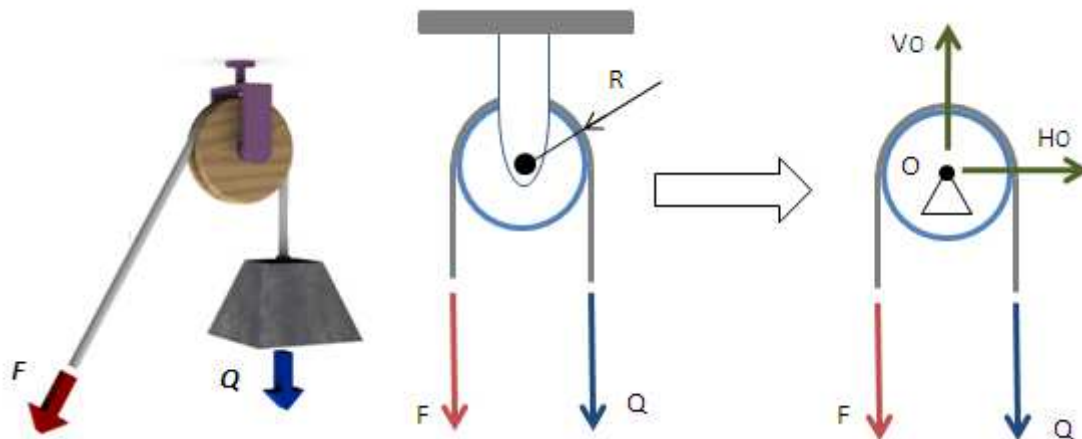
La carrucola è una macchina costituita da una ruota girevole attorno ad un perno fissato ad una staffa e recante alla periferia una scanalatura entro cui scorre un organo flessibile di trasmissione, come una fune, una cinghia, ecc.

La carrucola si dice:

1. fissa o semplice se la staffa è solidale ad un supporto fisso;
2. mobile: quando il peso da sollevare è attaccato alla staffa.

Carrucola fissa (semplice)

Fig. 2. 4

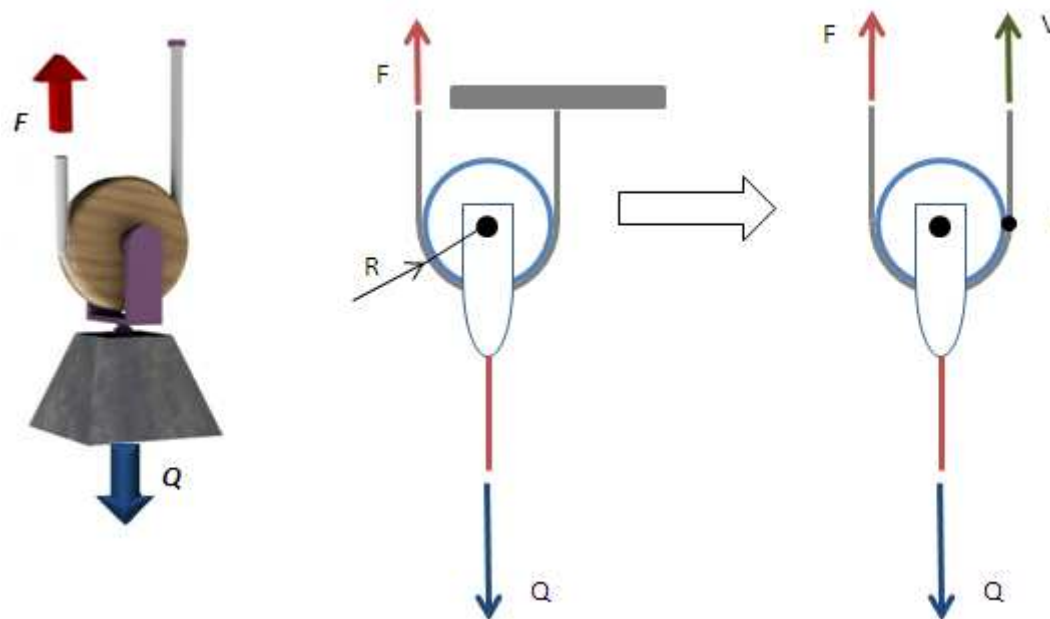


La condizione di equilibrio si trova imponendo l'annullamento dei momenti rispetto alla cerniera O.

$$\sum M_o = 0 \rightarrow Q \cdot R - F \cdot R = 0 \rightarrow Q = F \quad (1.5)$$

Carrucola mobile

Fig. 2. 5



La condizione di equilibrio si trova imponendo l'annullamento dei momenti rispetto al punto I.

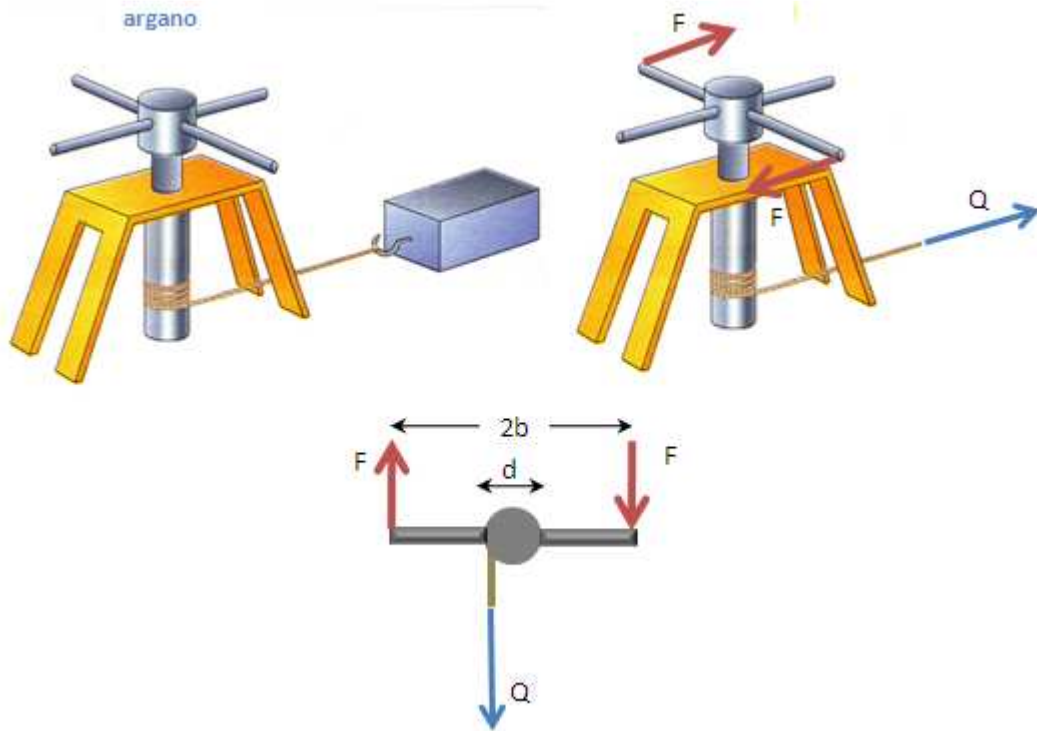
$$\sum M_I = 0 \rightarrow Q \cdot R - F \cdot 2R = 0 \rightarrow Q = F/2 \quad (1.6)$$

L'argano e il verricello

Def.2 3

L'argano è una macchina costituita da un tamburo mosso a mano o a motore utilizzato per la trazione di cavi o catene. Per verricello si intende generalmente un piccolo argano con asse del tamburo disposto orizzontalmente.

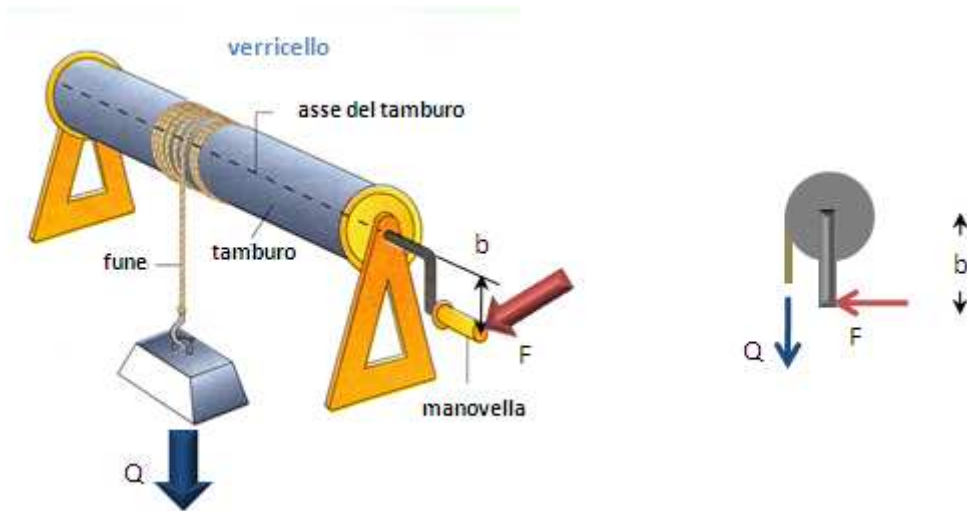
Fig. 2. 6



Per l'equilibrio alla rotazione si ha immediatamente:

$$-F \cdot b + Q \cdot d/2 - F \cdot b = 0 \rightarrow F = Q \frac{d}{4b}$$

Fig. 2. 7



Per l'equilibrio alla rotazione si ha immediatamente:

$$-F \cdot b + Q \cdot d/2 = 0 \rightarrow F = Q \frac{d}{2b}$$

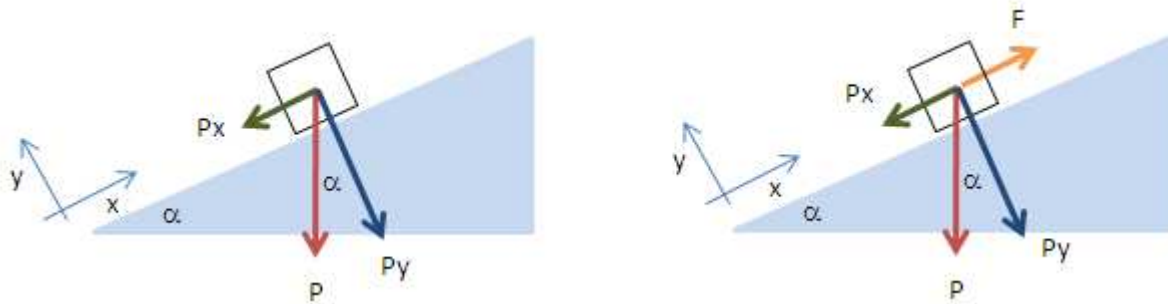
Il piano inclinato

Def.2 4

Il piano inclinato è un piano rigido inclinato di un angolo α rispetto al piano orizzontale.

Nel seguito, trascurando ogni fenomeno passivo, studieremo come equilibrare un corpo di peso P , appoggiato al piano inclinato, e sottoposto all'azione di una forza F diretta secondo il piano inclinato (Fig. 2. 8), oppure orizzontalmente (Fig. 2. 9).

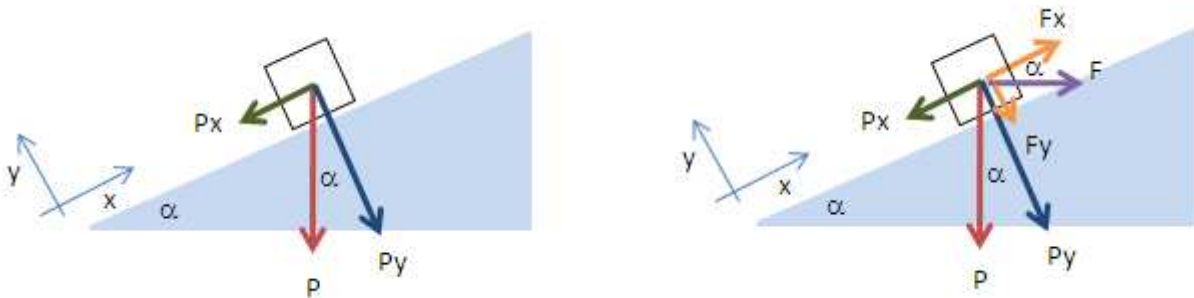
Fig. 2. 8



Ponendo uguale a zero la somma delle forze dirette lungo il piano inclinato si ha:

$$F - P_x = 0 \rightarrow F - P \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F = P \cdot \sin \alpha \quad (1.7)$$

Fig. 2. 9



Ponendo uguale a zero la somma delle forze dirette lungo il piano inclinato si ha:

$$F_x - P_x = 0 \rightarrow F \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F = P \cdot \tan \alpha$$

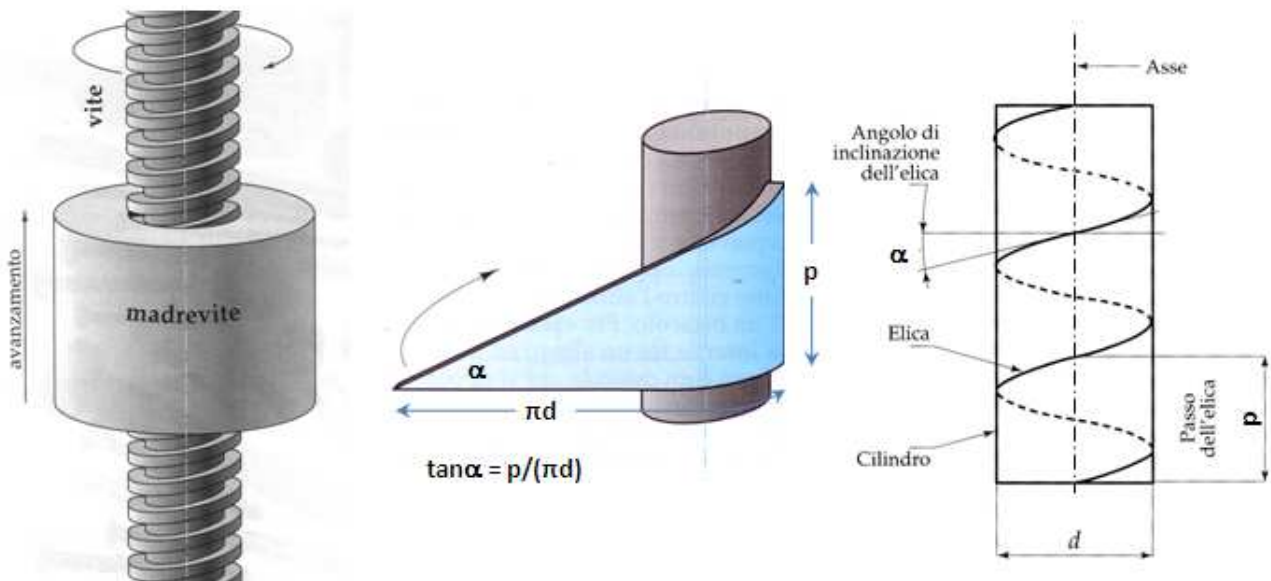
La vite

Def.2 5

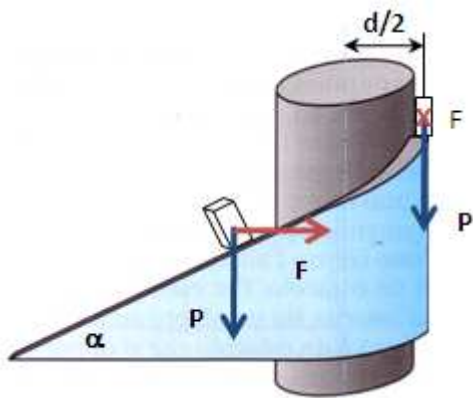
Si definisce vite un elemento cilindrico o conico sulla cui superficie esterna si avvolge ad elica un risalto a sezione costante (filetto)

Per ottenere un'elica cilindrica, si può avvolgere su di un cilindro un triangolo rettangolo avente per base la circonferenza del cilindro e per altezza il passo. L'ipotenusa di tale triangolo si disporrà sulla superficie cilindrica secondo un'elica come in Fig. 2. 10.

Fig. 2. 10



L'equilibrio della vite, sempre trascurando ogni fenomeno passivo, si può studiare facendo riferimento al piano inclinato dal cui avvolgimento si può immaginare realizzato il filetto.



$$F = P \cdot \tan \alpha \rightarrow F \frac{d}{2} = P \frac{d}{2} \tan \alpha$$

Un momento M applicato al fusto di diametro d della vite induce una forza assiale P tale che:

$$M = P \frac{d}{2} \tan \alpha \quad (1.8)$$

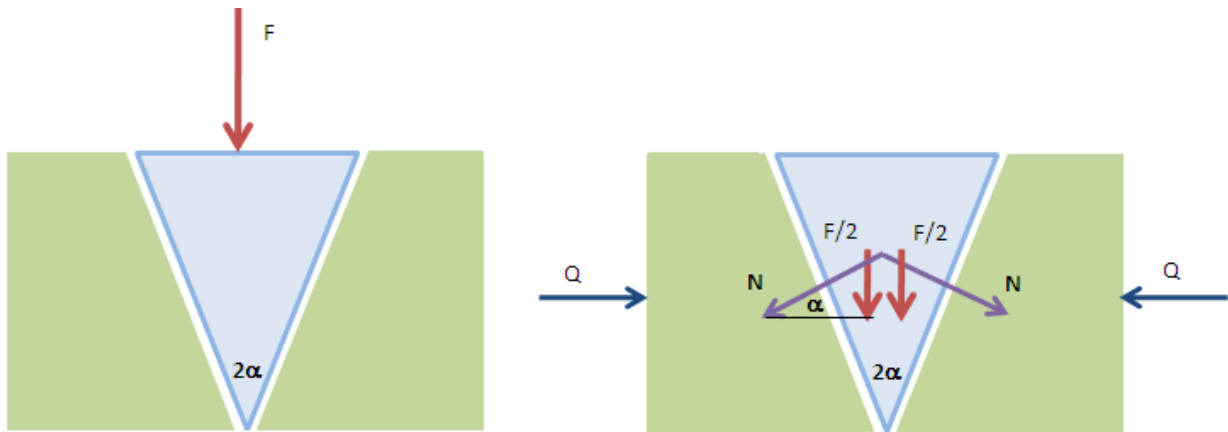
Il cuneo

Def.2 6

Si definisce cuneo una macchina semplice formata da due piani inclinati (fianchi) uniti per la base. In esso, in assenza di attriti, la resistenza è applicata perpendicolarmente ai fianchi, mentre la potenza viene applicata alla testa (il terzo lato).

L'angolo di apertura del cuneo determina il rapporto tra potenza e resistenza: tanto minore è questo angolo tanto maggiore è la resistenza che può venire equilibrata da una data potenza. Il cuneo si utilizza normalmente per causare la separazione di due parti di un corpo. Sfruttano il principio del cuneo tutti gli oggetti che servono per tagliare o penetrare (le lame dei coltelli, le asce, i chiodi ecc.).

Fig. 2. 11



La condizione di equilibrio del cuneo si ottiene determinando la forza N perpendicolare a fianchi del cuneo ed uguagliando Q alla componente orizzontale di N .

$$\begin{cases} N = \frac{F}{2 \sin \alpha} \\ Q = N \cdot \cos \alpha \end{cases} \rightarrow Q = \frac{F}{2 \cdot \tan \alpha}$$

Macchine complesse

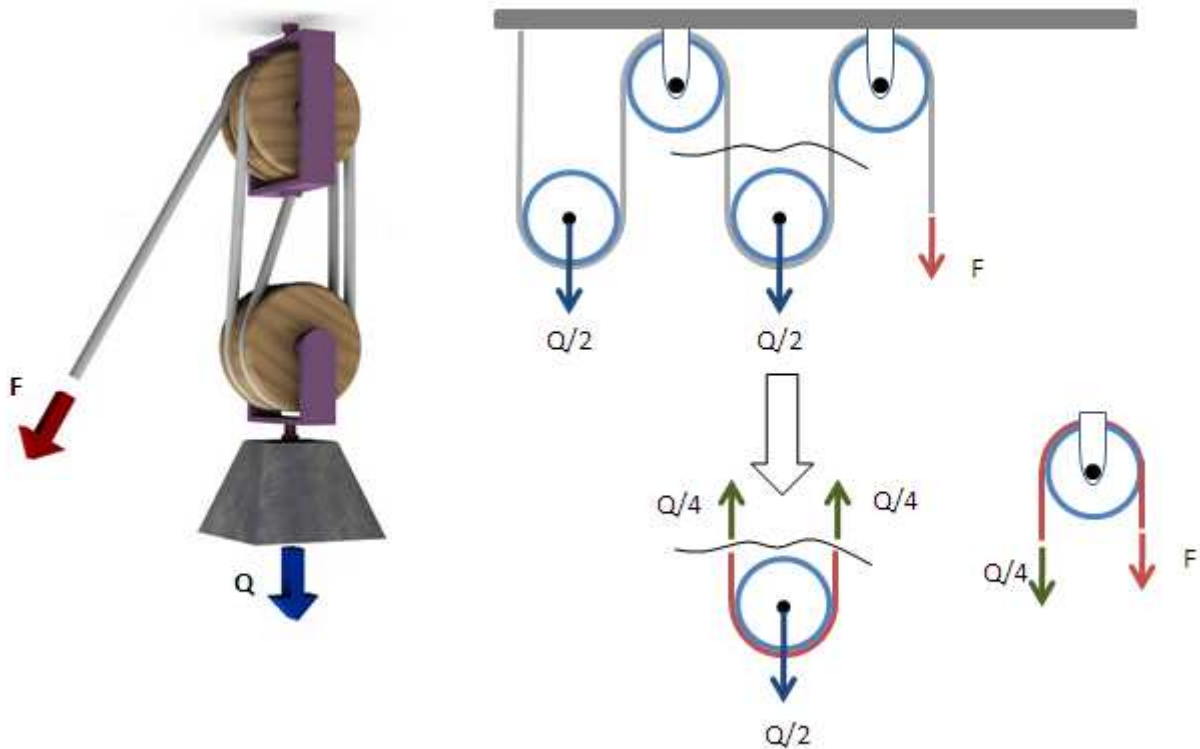
Def.2 7

Si definisce macchina complessa ogni macchina che può essere scomposta in più macchine semplici.

Esempio 2.1

Determinare le condizioni di equilibrio di una macchina complessa costituita da due carrucole fisse e due carrucole mobili accoppiate come di seguito riportato.

Fig. 2. 12



In conseguenza dell'assemblaggio realizzato è corretto ipotizzare che su ogni carrucola mobile sia applicato un carico pari a $Q/2$.

D'altra parte la tensione della fune avvolta su di una carrucola mobile, come già visto in precedenza, è pari alla metà del carico applicato alla carrucola stessa.

Si ha pertanto:

$$F = Q/4$$

Il ragionamento sviluppato in precedenza, relativamente a due carrucole mobili, può essere generalizzato ad una macchina, assemblata in modo identico, ma costituita da n carrucole mobili ed n carrucole fisse.

In tal caso si ha:

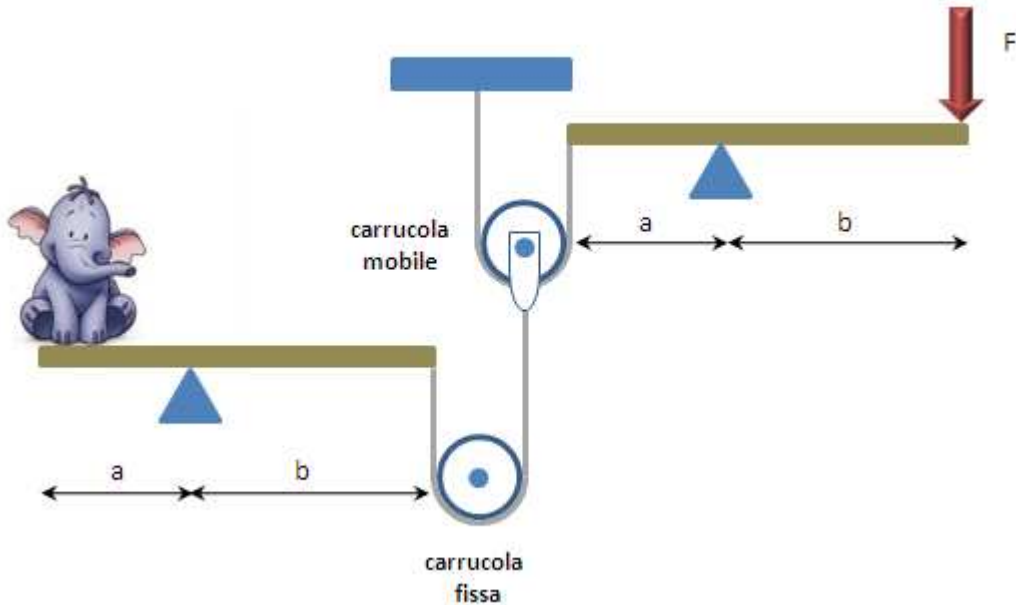
$$F = \frac{Q}{2n}$$



Esempio 2.2

Consideriamo l'equilibrio di una macchina, atta al sollevamento di un elefante, che venne proposta da Peter Crazy nel lontano 10 ottobre 1582!

Fig. 2. 13



Peso elefante $P = 50000 \text{ N}$; $a = 3 \text{ m}$; $b = 6 \text{ m}$

Dall'equilibrio della leva di destra, su cui è posizionato l'elefante, si ricava che la tensione della fune che si avvolge sulla carrucola fissa vale:

$$T_1 = P \frac{a}{b}$$

Dall'equilibrio della carrucola mobile si ricava la tensione T_2 della fune su di essa avvolta:

$$T_2 = T_1 / 2$$

Infine dall'equilibrio della leva di sinistra si ottiene il valore della forza F in grado di equilibrare, con la macchina in esame, il peso dell'elefante.

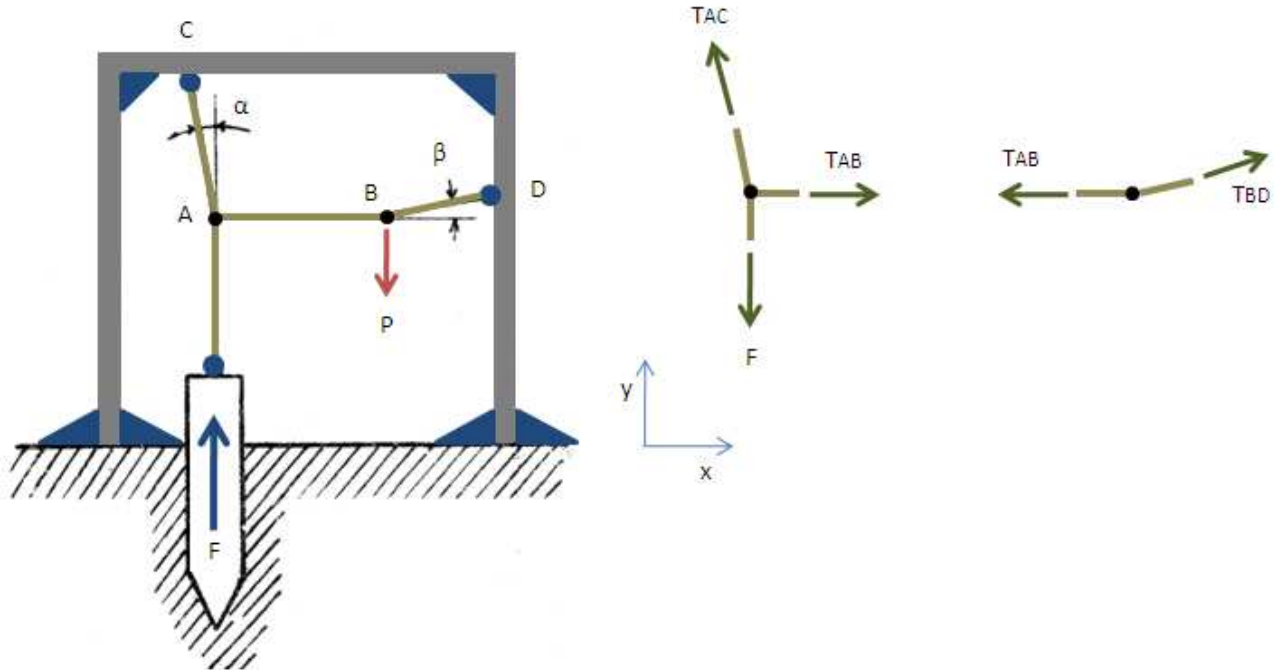
$$F = T_2 \frac{a}{b} = P \frac{a^2}{2b^2} = 6250 \text{ N}$$



Esempio 2.3

Per svellere un palo conficcato nel terreno occorre applicare lungo il suo asse una forza F pari a 70000 N. Ci si serve allo scopo dell'attrezzatura di seguito schematizzata, costituita da un sistema di cavi d'acciaio articolati in A, B ed ancorati in C, D al telaio rigido di sostegno.

Determinare lo sforzo P che si deve esercitare per iniziare il sollevamento del palo.



Dall'equilibrio del nodo A si ha¹:

$$\begin{cases} \sum F_x = -T_{AC} \cdot \sin \alpha + T_{AB} = 0 \\ \sum F_y = -F + T_{AC} \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow T_{AB} = F \cdot \tan \alpha \quad (1.9)$$

Dall'equilibrio del nodo B si ha:

$$\begin{cases} \sum F_x = T_{BD} \cdot \cos \beta - T_{BA} = 0 \\ \sum F_y = -P + T_{BD} \cdot \sin \beta = 0 \end{cases} \rightarrow P = T_{BA} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad (1.10)$$

Sostituendo la (1.9) nella (1.10) si ottiene infine:

$$P = F \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta$$



¹ Un sistema di forze concorrenti in un punto è in equilibrio se la loro risultante è nulla.

3. IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

In questo capitolo esporremo dapprima la sostanza del principio dei lavori virtuali, compiutamente formulato da Johann Bernoulli nel 1717, e considereremo la sua applicazione alla risoluzione di alcuni problemi di statica in cui tale principio si dimostra particolarmente utile.

Prima di definire l'enunciato del principio dei lavori virtuali dobbiamo introdurre alcuni concetti come lo spostamento e il lavoro di una forza.

Espressione dei vettori nel piano cartesiano ortogonale

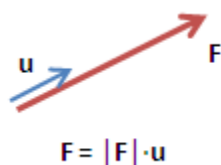
Def.3. 1

Si definisce versore \mathbf{u} di un vettore \mathbf{F} un vettore di modulo unitario avente la stessa direzione di \mathbf{F} .

Osservazioni

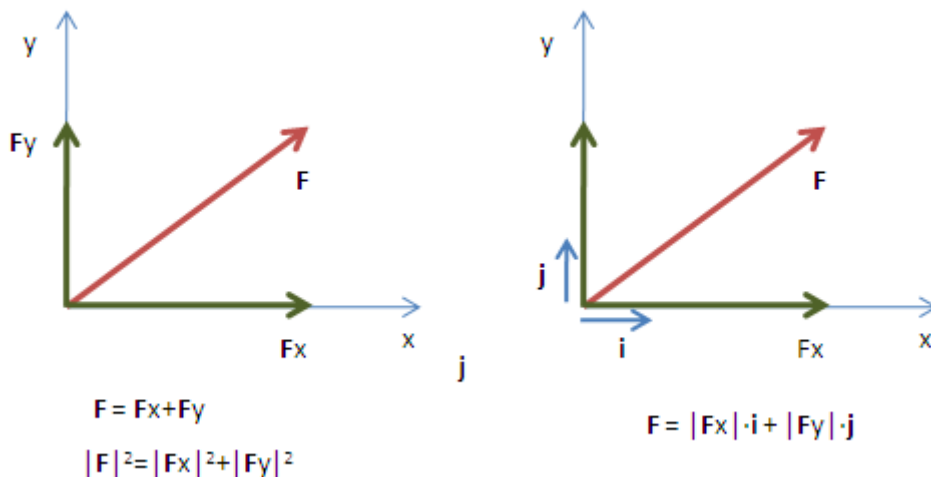
Un vettore \mathbf{F} può essere sempre espresso come prodotto del proprio modulo per il versore associato.

Fig.3. 1



Ogni vettore, nel piano cartesiano ortogonale¹, può essere espresso in funzione delle sue componenti parallele agli assi di detto piano.

Fig.3. 2



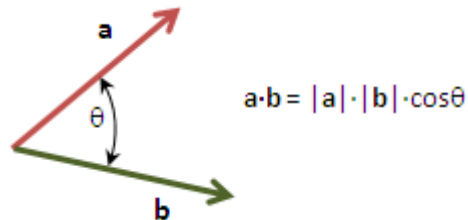
¹ Nel seguito il piano cartesiano ortogonale sarà denominato semplicemente piano cartesiano ritenendo implicita, se non altrimenti specificato, la sua ortogonalità.

Prodotto scalare

Def.2 8

Dati due vettori **a** e **b** complanari e aventi il medesimo punto di applicazione, si definisce prodotto scalare (e lo indicheremo con **a·b**) la grandezza *scalare* ottenuta moltiplicando i moduli dei due vettori per l'angolo fra di essi compreso.

Fig.3. 3



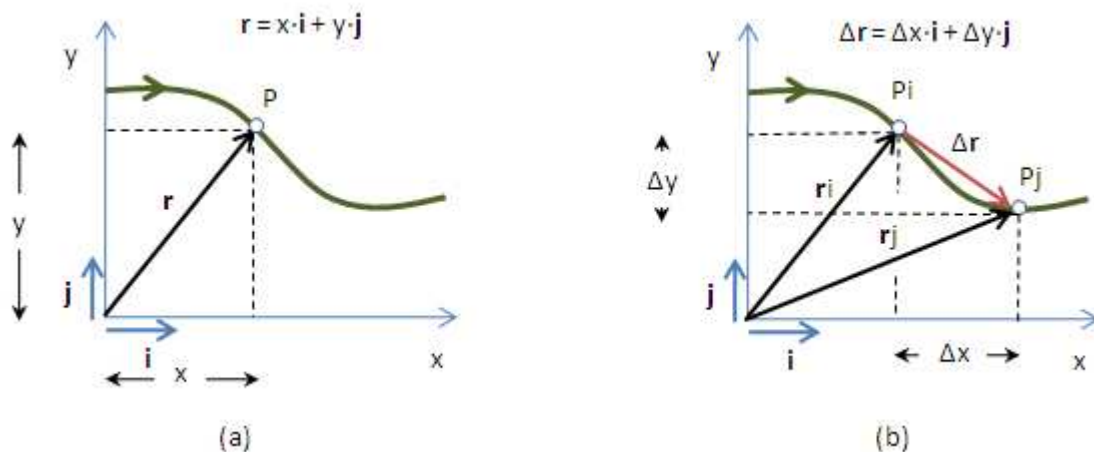
Osservazione

E' immediato riconoscere che il prodotto scalare di due vettori ortogonali è sempre nullo.

Il vettore posizione

Il vettore posizione di un punto P è il segmento orientato condotto dall'origine del sistema di riferimento al punto stesso P.

Fig.3. 4



Il vettore posizione **r**, nel piano, può essere espresso in funzione delle coordinate x,y del punto secondo quanto indicato in Fig.3. 4a.

Il vettore spostamento

Def.2 9

Si definisce spostamento, nel tempo $(t_j - t_i)$, il vettore ottenuto come differenza tra i vettori posizione rispettivamente al tempo t_j e t_i .

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$$

Il vettore spostamento, come risulta dalla Fig.3. 4b, è diretto dalla posizione iniziale alla posizione finale di un punto.

Il lavoro

Def.3. 2

Il lavoro dL compiuto da una forza **F** per effetto di un suo spostamento infinitesimo ds è il prodotto scalare della forza **F** per lo spostamento ds (Fig.3. 5a).

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

Osservazioni

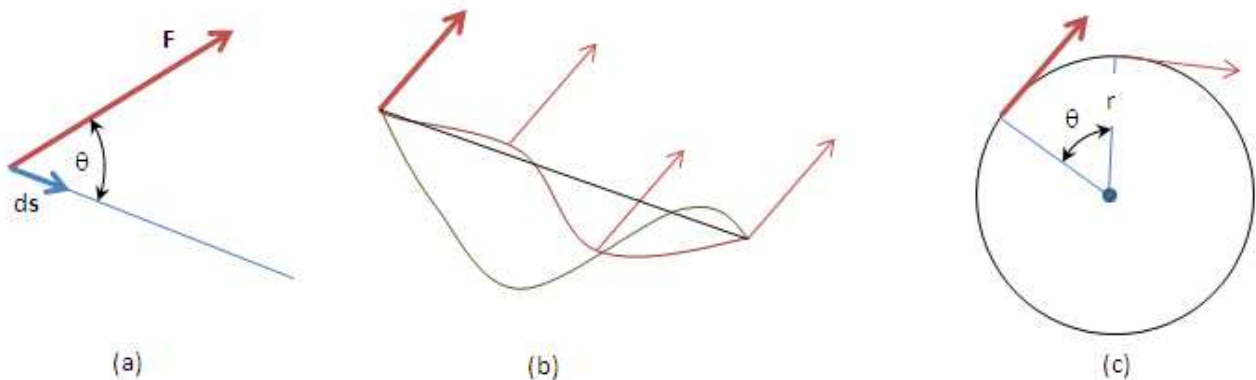
Quando le direzioni della forza \mathbf{F} e del vettore spostamento $d\mathbf{s}$ sono perpendicolari il lavoro è nullo.

Se il punto di applicazione della forza \mathbf{F} subisce uno spostamento finito \mathbf{s} , il lavoro totale si può ottenere dividendo lo spostamento \mathbf{s} in elementi infinitesimi $d\mathbf{s}$ e sommando le espressioni (3.1) per tutti questi elementi.

Se una forza si muove lungo una traiettoria mantenendosi sempre parallela a se stessa, il lavoro compiuto sarà indipendente dal percorso seguito, ma dipenderà solamente dalle condizioni iniziali e finali (Fig.3. 5b).

Il lavoro di una forza che si muove mantenendosi tangente ad una circonferenza è pari al modulo della forza per l'arco percorso. Da quest'ultima osservazione si deduce anche che: "il lavoro di una coppia è pari al modulo della coppia per l'angolo da essa percorso" (Fig.3. 5c).

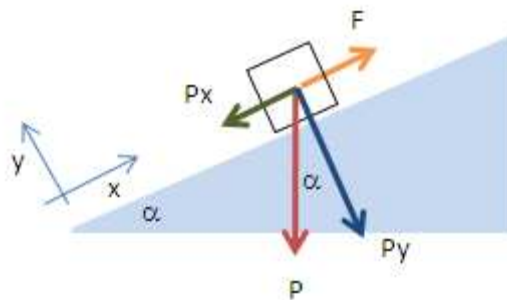
Fig.3. 5



Spostamenti virtuali

Consideriamo un corpo di peso \mathbf{P} appoggiato su di un piano inclinato liscio e mantenuto nella sua posizione tramite l'azione di una forza \mathbf{F} come indicato in Fig.3. 6

Fig.3. 6



Il corpo di peso \mathbf{P} ha un solo grado di libertà: può muoversi infatti solamente lungo il piano. In altri termini, tutti gli eventuali spostamenti del corpo dovranno giacere lungo l'asse x .

Se il sistema è in equilibrio, il corpo non si sposta dalla sua posizione iniziale, quindi non è soggetto *realmente* ad alcuno spostamento.

Ora immaginiamo idealmente di modificare impercettibilmente la posizione di equilibrio del corpo imponendo ad esso uno spostamento infinitesimo coerente con i vincoli ovvero uno spostamento diretto secondo l'asse x : uno spostamento di questo tipo è definito *spostamento virtuale*. Pertanto:

Def.3. 3

Si definisce *spostamento virtuale* qualsiasi spostamento infinitesimo del tutto arbitrario ma compatibile con i vincoli del sistema.

Lavoro virtuale

Il lavoro δL compiuto da una forza \mathbf{F} per effetto di un suo spostamento virtuale $\delta \mathbf{s}$ è il prodotto scalare della forza \mathbf{F} per lo spostamento $\delta \mathbf{s}$

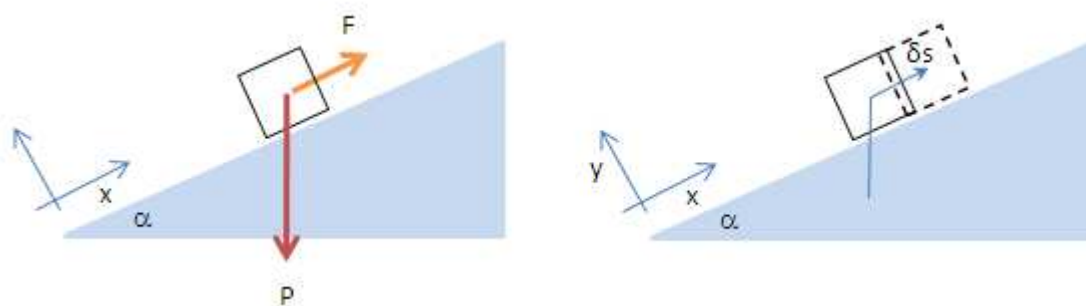
Il principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali sancisce che:

“ il lavoro virtuale, compiuto dalle forze esterne su di un sistema meccanico ideale in equilibrio, deve essere nullo per qualsiasi spostamento virtuale compatibile con i vincoli”.

Esempio 3.1

Mediante l'applicazione del principio dei lavori virtuali, trovare, in condizioni di equilibrio, la relazione tra la forze \mathbf{F} e il peso \mathbf{P} di un corpo appoggiato su di un piano inclinato liscio.



Imponiamo al corpo uno spostamento virtuale $\delta \mathbf{s}$ compatibile con il vincolo ($\delta \mathbf{s}$ qualunque spostamento infinitesimo lungo l'asse x).

Per effetto di tale spostamento le forze attive \mathbf{P} ed \mathbf{F} produrranno i seguenti lavori virtuali:

$$\delta L_p = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{s} = |\mathbf{P}| \cdot |\delta \mathbf{s}| \cdot \cos(90 + \alpha) = -|\mathbf{P}| \cdot |\delta \mathbf{s}| \cdot \sin \alpha$$

$$\delta L_f = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\delta \mathbf{s}| \cdot \cos(0) = |\mathbf{F}| \cdot |\delta \mathbf{s}|$$

Il lavoro virtuale totale δL è pari alla somma dei lavori virtuali compiuti dalle singole forze, pertanto:

$$\delta L = \delta L_p + \delta L_f = -|\mathbf{P}| \cdot |\delta \mathbf{s}| \cdot \sin \alpha + |\mathbf{F}| \cdot |\delta \mathbf{s}|$$

Poiché il principio dei lavori virtuali stabilisce che in condizione di equilibrio il lavoro virtuale δL deve essere nullo, si ha:

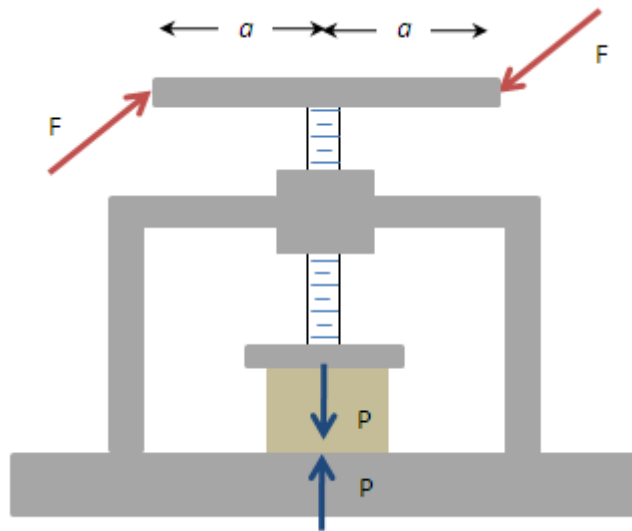
$$\delta L = -|\mathbf{P}| \cdot |\delta \mathbf{s}| \cdot \sin \alpha + |\mathbf{F}| \cdot |\delta \mathbf{s}| = 0 \rightarrow |\mathbf{F}| = |\mathbf{P}| \cdot \sin \alpha$$

in accordo con la (1.7)



Esempio 3.2

Si consideri il torchio a vite illustrato in figura e, trascurando ogni attrito, si determini, con il principio dei lavori virtuali si determini, in condizioni di equilibrio la relazione tra F e P.



Immaginiamo di sostituire il corpo compresso con le forze P che esso esercita sulla vite e sul telaio.

Queste forze devono essere considerate come forze attive per il sistema ideale rappresentato dal telaio e dalla vite, che supporremo perfettamente rigidi.

Uno spostamento virtuale di questo sistema, compatibile con i vincoli, sarà una rotazione infinitesima della vite di un angolo $\delta\theta$. Il lavoro compiuto dalla coppia $2Fa$ sarà allora:

$$\delta L_F = 2Fa \cdot \delta\theta.$$

Indicando con h il passo della vite, il corrispondente spostamento virtuale dell'estremo della vite vale:

$$\text{spostamento virtuale dell'estremo della vite} = \frac{h \cdot \delta\theta}{2\pi}$$

e il lavoro virtuale compiuto dalla forza P, applicata all'estremo della vite vale:

$$\delta L_P = -\frac{P \cdot h \cdot \delta\theta}{2\pi}$$

La forza P applicata al telaio, supposto perfettamente rigido, non compie lavoro, pertanto, per il principio dei lavori virtuali, in condizione di equilibrio, deve essere:

$$\delta L_F + \delta L_P = 2Fa \cdot \delta\theta - \frac{P \cdot h \cdot \delta\theta}{2\pi} = 0 \rightarrow F = \frac{P \cdot h}{4\pi \cdot a} \quad (3.2)$$

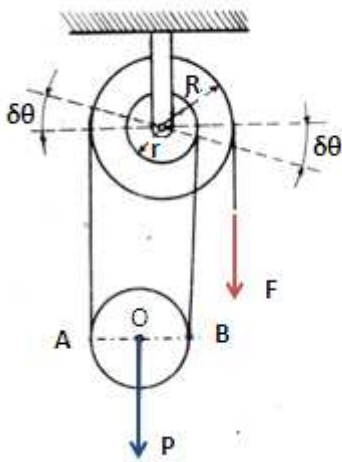
Posto $M = 2F \cdot a$ e d il diametro della vite, e ricordando che l'angolo α di inclinazione dell'elica è pari a:

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{\pi d}\right)$ è immediato riconoscere che la (3.2) è in accordo con la (1.8) ricavata in precedenza.



Esercizio 3.3

Con riferimento al verricello differenziale sotto raffigurato, si determini, in condizione di equilibrio e trascurando ogni attrito, la relazione tra la forza F e la resistenza P .



In questo caso lo spostamento virtuale è costituito da una rotazione infinitesima $\delta\theta$ intorno all'asse dei due tamburi superiori.

Lo spostamento δs (supposto verso il basso) della forza F è pari a:

$$\delta s = R \cdot \delta\theta$$

Il lavoro virtuale compiuto dalla forza F vale:

$$\delta L_F = F \cdot \delta s = F \cdot R \cdot \delta\theta$$

Gli spostamenti dei punti A e B della puleggia mobile, espressi in funzione dello spostamento virtuale $\delta\theta$ valgono:

$$\delta s_A = R \cdot \delta\theta \qquad \delta s_B = -r \delta\theta \text{ (spostamento verso il basso)}$$

Dalla rigidità della puleggia mobile si ricava lo spostamento virtuale del centro O che corrisponde allo spostamento virtuale del punto di applicazione della resistenza P.

$$\delta s_O = \frac{\delta s_A + \delta s_B}{2}$$

Pertanto il lavoro virtuale compiuto dalla forza P per effetto dello spostamento virtuale $\delta\theta$ vale:

$$\delta L_P = -P \frac{(R-r)}{2} \delta\theta$$

E per il principio dei lavori virtuali deve essere:

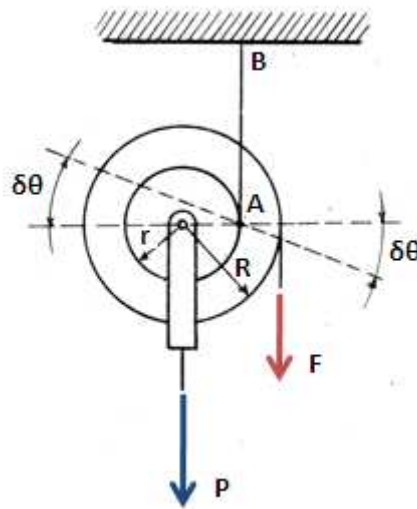
$$\delta L = \delta L_F + \delta L_P = 0 \rightarrow F \cdot R \cdot \delta\theta - P \frac{R-r}{2} \delta\theta = 0$$

$$F = P \frac{R-r}{2R}$$



Esempio 3.4

Determinare, in condizioni di equilibrio e in assenza di ogni attrito, la relazione tra la forze **F** e **P** nel sistema di carrucole sotto riportato.



Uno spostamento virtuale è costituito da una rotazione infinitesima $\delta\theta$ intorno al punto fisso A (fisso nell'istante considerato).

I lavori virtuali compiuti dalle forze F e P per effetto dello spostamento virtuale $\delta\theta$ definito in precedenza valgono:

$$\delta L_F = F \cdot (R - r) \cdot \delta\theta$$

$$\delta L_P = -P \cdot r \cdot \delta\theta$$

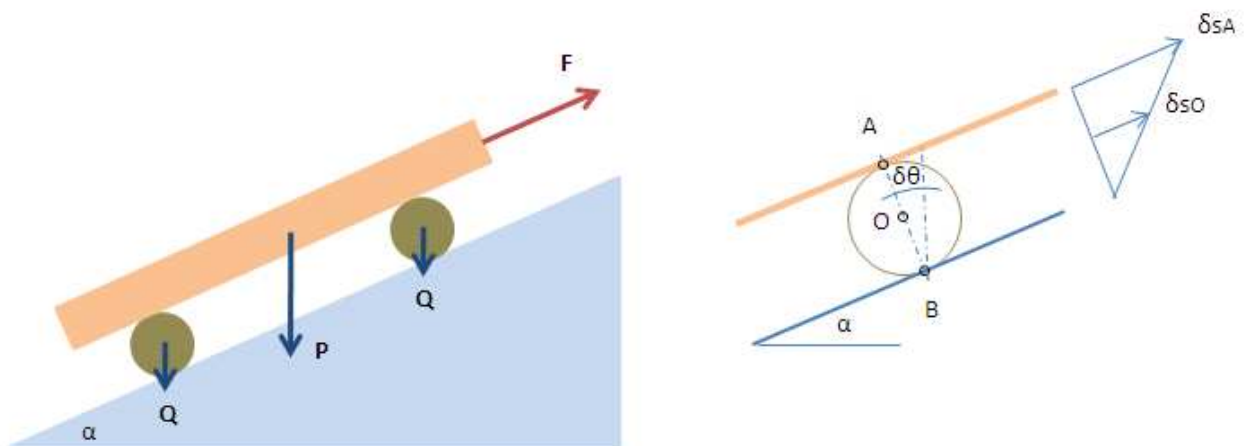
E, applicando il principio dei lavori virtuali, si ha:

$$\delta L = \delta L_F + \delta L_P = F(R - r) \cdot \delta\theta - P \cdot r \cdot \delta\theta = 0 \rightarrow F = P \frac{r}{R - r}$$



Esempio 3.5

Una zattera di peso **P** viene fatta scorrere, tramite l'azione di una forza **F**, su di un piano inclinato. Tra la zattera e il piano vengono interposti due rulli di raggio **r** e di peso **Q**. Supposto che l'angolo di inclinazione del piano sia α , che la forza F sia diretta parallelamente al piano inclinato e trascurando ogni fenomeno dissipativo si chiede di determinare, in condizione di equilibrio, il valore di **F**.



Imponiamo alla zattera uno spostamento virtuale δs_A . Tale spostamento può essere considerato come l'effetto di una rotazione virtuale $\delta\theta$ dei punti A (punti di contatto zattera-rulli) rispetto ai punti B (punti di contatto rulli-piano). I centri dei rulli saranno pertanto soggetti ad una traslazione δs_O diretta lungo il piano e pari alla metà di δs_A .

Determiniamo ora i lavori virtuali delle forze agenti sul sistema:

Lavoro virtuale della forza F

$$\delta L_F = F \cdot \delta s_A$$

Lavoro virtuale del peso P

$$\delta L_P = -P \cdot \delta s_A \cdot \sin \alpha$$

Lavoro virtuale delle forze Q

$$\delta L_Q = -2Q \cdot \delta s_O \cdot \sin \alpha = -Q \cdot \delta s_A \cdot \sin \alpha$$

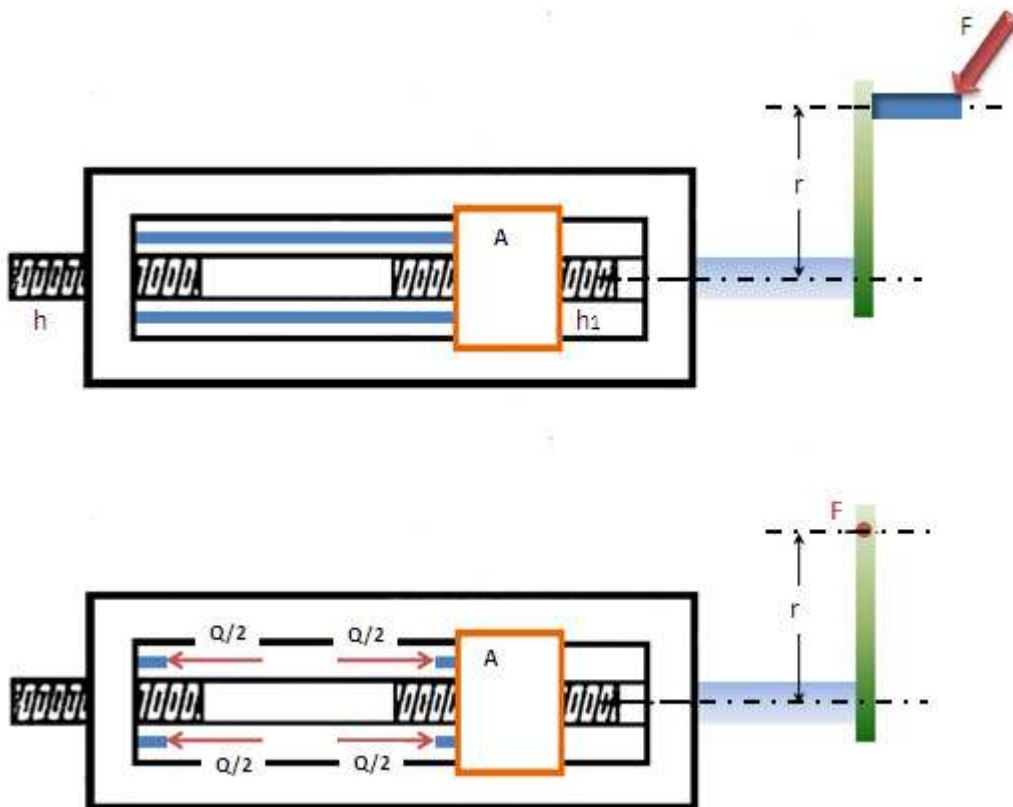
Per il principio dei lavori virtuali si ha quindi:

$$\delta L = F \cdot \delta s_A - P \cdot \delta s_A \cdot \sin \alpha - Q \cdot \delta s_A \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F = (P + Q) \cdot \sin \alpha$$



Esempio 3.6

Un tubo cilindrico è compresso per mezzo del meccanismo a vite differenziale di seguito illustrato. Trascurando ogni fenomeno passivo, determinare, in condizione di equilibrio la relazione tra la forza Q comprimente il tubo e la forza F applicata perpendicolarmente alla manovella in un piano normale all'asse delle viti rispettivamente di passo h_1 e h.



Immaginiamo di sostituire il tubo compresso con la forza **Q** che esso esercita sul cursore A e sul telaio.

Quando la manovella ruota di un angolo $\delta\theta$ la vite ad essa solidale si avvita sul telaio ed avanza verso dx di una quantità δs . Il cursore A, accoppiato prismaticamente al telaio, per effetto della rotazione della vite scorre verso sx di una quantità δs_1

Si tratta ora di esprimere, noti i passi delle viti, i valori di δs e δs_1 in funzione della rotazione virtuale $\delta\theta$.

Come già visto in precedenza, si ha:

$$\delta s = h \frac{\delta\theta}{2\pi} \quad \delta s_1 = h_1 \frac{\delta\theta}{2\pi}$$

I lavori virtuali compiuti dalle forze attive sono pertanto:

$$\delta L_F = F \cdot r \cdot \delta\theta \quad \delta L_Q = -Q(\delta s - \delta s_1) = -Q(h - h_1) \frac{\delta\theta}{2\pi}$$

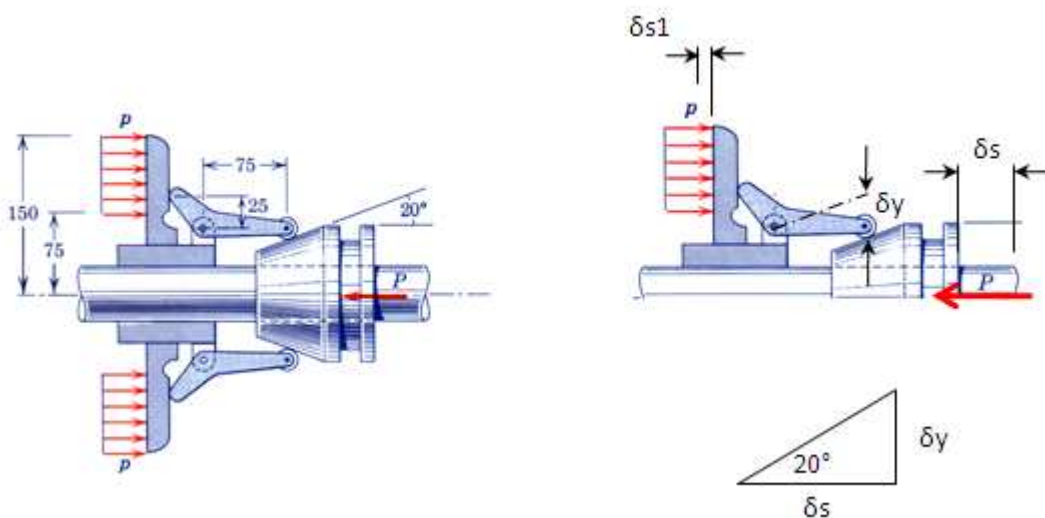
Per il principio dei lavori virtuali, in condizione di equilibrio, deve essere:

$$\delta L = \delta L_F + \delta L_Q = F \cdot r \cdot \delta\theta - Q(h - h_1) \frac{\delta\theta}{2\pi} = 0 \rightarrow F = Q \frac{h - h_1}{2\pi r}$$



Esempio 3.7

The figure shows a sectional view of a mechanism for engaging a marine clutch. The position of the conical collar on the shaft is controlled by the engaging force P , and a slight movement to the left causes the two levers to bears against the back side of the clutch plate, which generates a uniform pressure p over the contact area of the plate. This area is that of a circular ring with 150-mm outside and 75-mm inside radii. Determine the force P required to generate a clutch-plate pressure of 200 kPa. The clutch plate is free to slide along the collar to which the levers are pivoted.



Imponiamo uno spostamento virtuale δs al collare conico come illustrato in figura.

$$\delta y = \delta s \cdot \tan 20^\circ \rightarrow \delta s_1 = \delta y \frac{25}{75} = \delta s \cdot \tan 20^\circ \frac{25}{75}$$

Sul disco di frizione, per effetto della pressione p , agirà una forza Q pari a:

$$Q = p \cdot \pi (150^2 - 75^2)$$

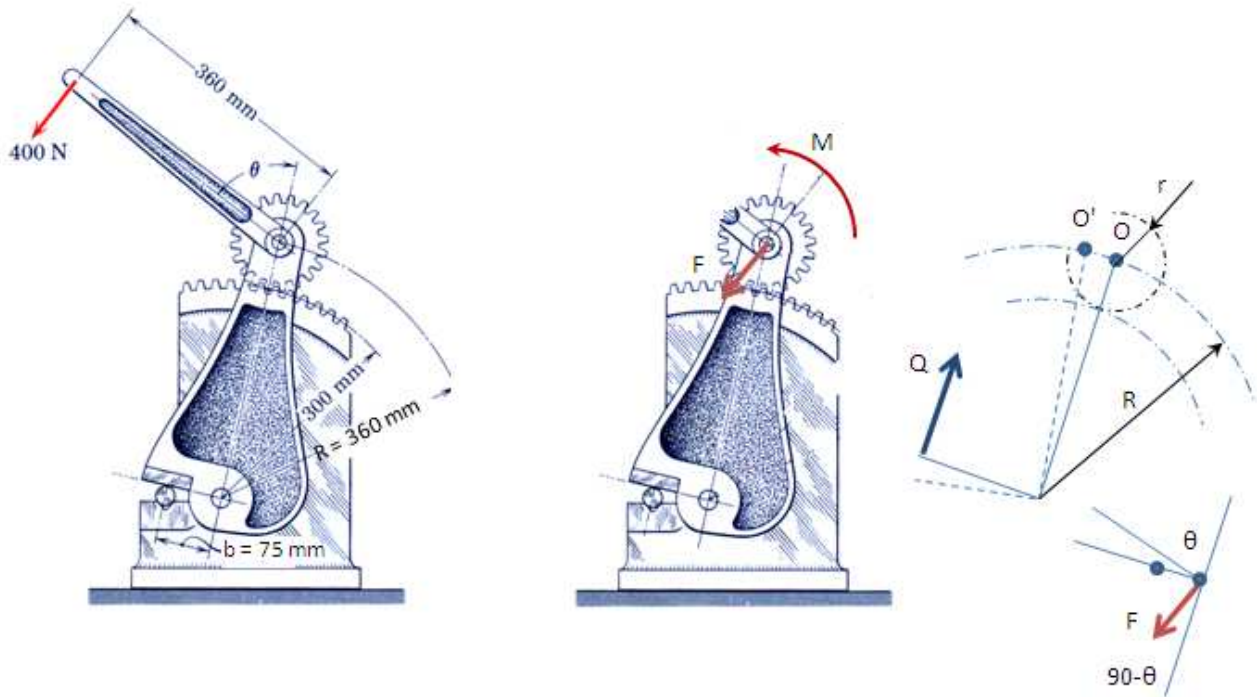
In condizioni di equilibrio, il principio dei lavori virtuali impone che:

$$P \cdot \delta s = Q \cdot \delta s_1 \rightarrow P = p \cdot \pi (150^2 - 75^2) \cdot \tan 20^\circ \frac{25}{75} = 1.286 \text{ kN}$$



Esempio 3.8

Determine the shearing force Q applied to the bar if a 400-N force is applied to the handle for $\theta = 30^\circ$.



Sostituiamo la forza da 400 N con una forza F (di modulo 400 N) applicata all'asse del rocchetto e con un momento M pari a 144 Nm.

Imponiamo ora al rocchetto, di raggio r , uno spostamento virtuale angolare $\delta\theta$.

Per effetto di tale rotazione virtuale il centro del rocchetto subisce, a sua volta, uno spostamento virtuale pari a:

$$\delta s = \widehat{OO'} = r\delta\theta$$

Poiché il centro del rocchetto è solidale con l'estremità del braccio tagliante, quest'ultimo subirà una rotazione virtuale pari a:

$$\delta\alpha = \frac{\delta s}{R}$$

La Q è quindi soggetta ad uno spostamento virtuale δh pari a:

$$\delta h = \delta\alpha \cdot b$$

Il principio dei lavori virtuali, in condizione di equilibrio, impone che:

$$Q\delta h = M \cdot \delta\theta + F \cdot \delta s \cdot \cos\theta$$

$$Q \cdot \delta\theta \frac{r}{R} \cdot b = M \cdot \delta\theta + F \cdot r \cdot \delta\theta \cdot \cos\theta$$

$$Q = 13182 \text{ N}$$



4. L'ATTRITO RADENTE

Def.4. 1

Si definisce attrito radente¹ tra due superficie a contatto la resistenza che si oppone al loro mutuo scorrimento.

Osservazioni

La resistenza d'attrito si assume indipendente dall'estensione delle superficie a contatto.

La resistenza d'attrito è proporzionale al carico agente normalmente alle superficie a contatto.

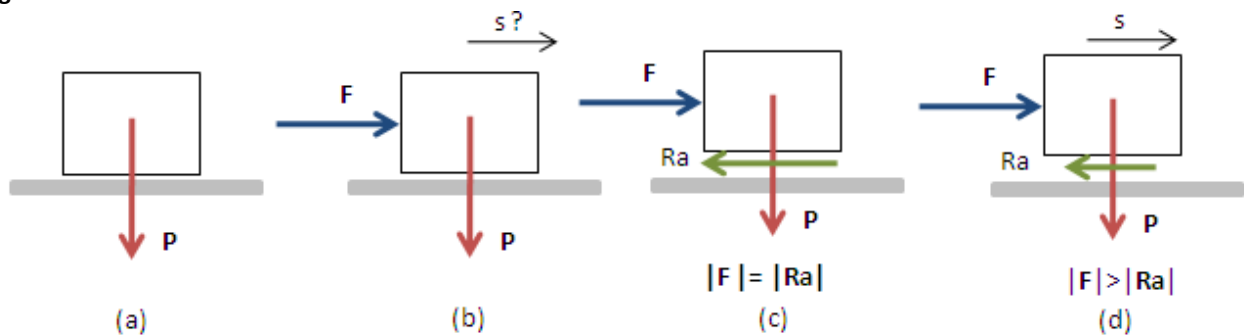
Il coefficiente di proporzionalità dipende dalla natura della superficie a contatto

Per basse velocità di strisciamento la resistenza d'attrito è indipendente dalla velocità stessa.

All'inizio del movimento la resistenza d'attrito è sensibilmente superiore².

Consideriamo ora un corpo di peso **P** appoggiato su di una superficie piana scabra.

Fig.4. 1



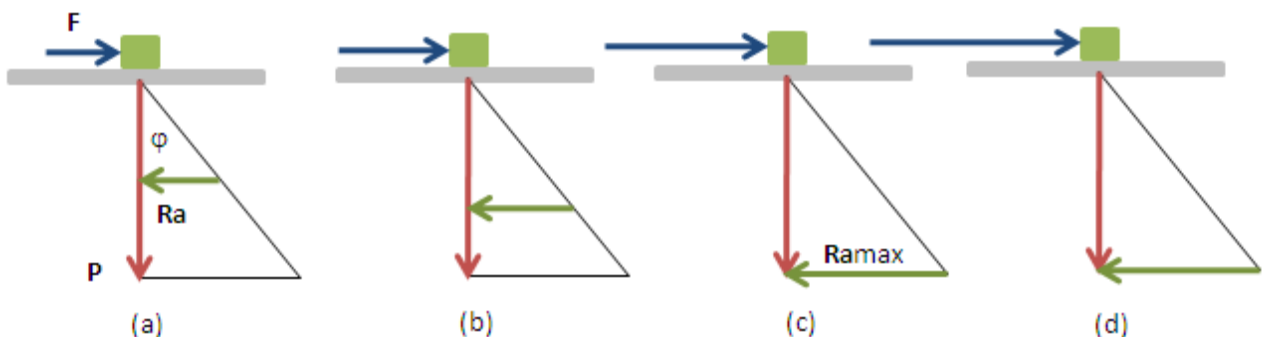
In assenza di attrito, per azione della forza orizzontale **F** il corpo si muove verso destra. Considerando invece la presenza di una resistenza d'attrito si possono verificare due situazioni:

1. Il corpo non si muove: il modulo della forza **F** è pari al modulo della reazione d'attrito **Ra**
2. Il corpo si muove: il modulo della forza **F** è maggiore del modulo della reazione d'attrito **Ra**

Esaminiamo ora come varia la reazione d'attrito al variare del modulo della forza perturbante **F**.

Consideriamo pertanto un corpo sottoposto ad una forza **F** via via crescente che si mantenga appoggiato ad piano scabro come rappresentato in Fig.4. 2.

Fig.4. 2



Inizialmente (a) la forza **F** è di modesta entità e viene efficacemente contrastata dalla reazione d'attrito **Ra**.

¹ Nel seguito l'attrito radente sarà indicato solamente come attrito omettendo l'aggettivo radente.

² Si parla in questo caso di attrito di primo distacco in contrapposizione all'attrito dinamico che si sviluppa quando le superficie stanno strisciando. Normalmente l'attrito di primo distacco è pari a 1.5-3 volte l'attrito dinamico.

All'aumentare della forza **F** aumenta pure la reazione d'attrito (b).

Ad un certo punto la forza **F** è di intensità tale da essere contrastata dalla reazione d'attrito massima **R_{amax}**. Quando (d) la forza **F** aumenta ulteriormente la reazione d'attrito che ha già raggiunto in precedenza il suo valore massimo non riesce a contrastare efficacemente l'azione perturbante: il corpo inizia il movimento.

Coefficiente d'attrito

La reazione d'attrito massima, dalle osservazioni illustrate in precedenza vale:

$$R_{a \max} = f \cdot P \quad (4.1)$$

Il coefficiente di proporzionalità *f* prende il nome di *coefficiente d'attrito*.

Dalla Fig.4. 2 è anche immediato ricavare che:

$$R_{a \max} = \tan \varphi \cdot P \quad (4.2)$$

Angolo d'attrito

L'angolo φ è detto *angolo di attrito* ed è quell'angolo la cui tangente trigonometrica uguaglia il valore del coefficiente d'attrito.

Cono d'attrito

La forza perturbante **F** può essere diretta in qualsivoglia direzione e la reazione d'attrito è comunque diretta in direzione ad essa opposta. Il modulo della reazione massima d'attrito può essere interpretato quindi come il raggio di un cono (cono d'attrito) di altezza pari al modulo della forza normale alle superficie a contatto e avente un angolo di semiapertura pari all'angolo d'attrito φ .

Fig.4. 3



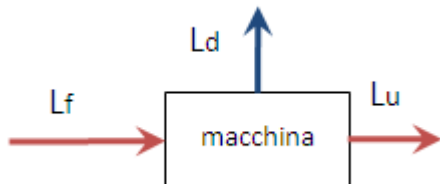
Macchine reali e macchine ideali

Le macchine complesse, come per altro le macchine semplici, possono essere suddivise in ideali e reali a secondo se si trascura a o meno la presenza degli attriti.

Le macchine reali sfruttano solo una parte del lavoro fornito L_f , la differenza tra il lavoro fornito e il lavoro effettivamente utilizzato L_u è il lavoro speso per vincere le resistenze d'attrito.

Def.2 10

Si definisce rendimento (efficienza) di una macchina il rapporto tra il lavoro fornito e il lavoro utilizzato.



L_f lavoro fornito

L_u lavoro utilizzato

L_d lavoro speso per vincere le resistenze d'attrito

η rendimento $\eta = L_u/L_f$ (4.3)

Rendimento di più macchine in serie

Il rendimento di n macchine in serie, ciascuna con rendimento η_i , è pari al prodotto dei rendimenti delle singole macchine:

$$\eta_{tot} = \prod_{i=1}^n \eta_i \quad (4.4)$$

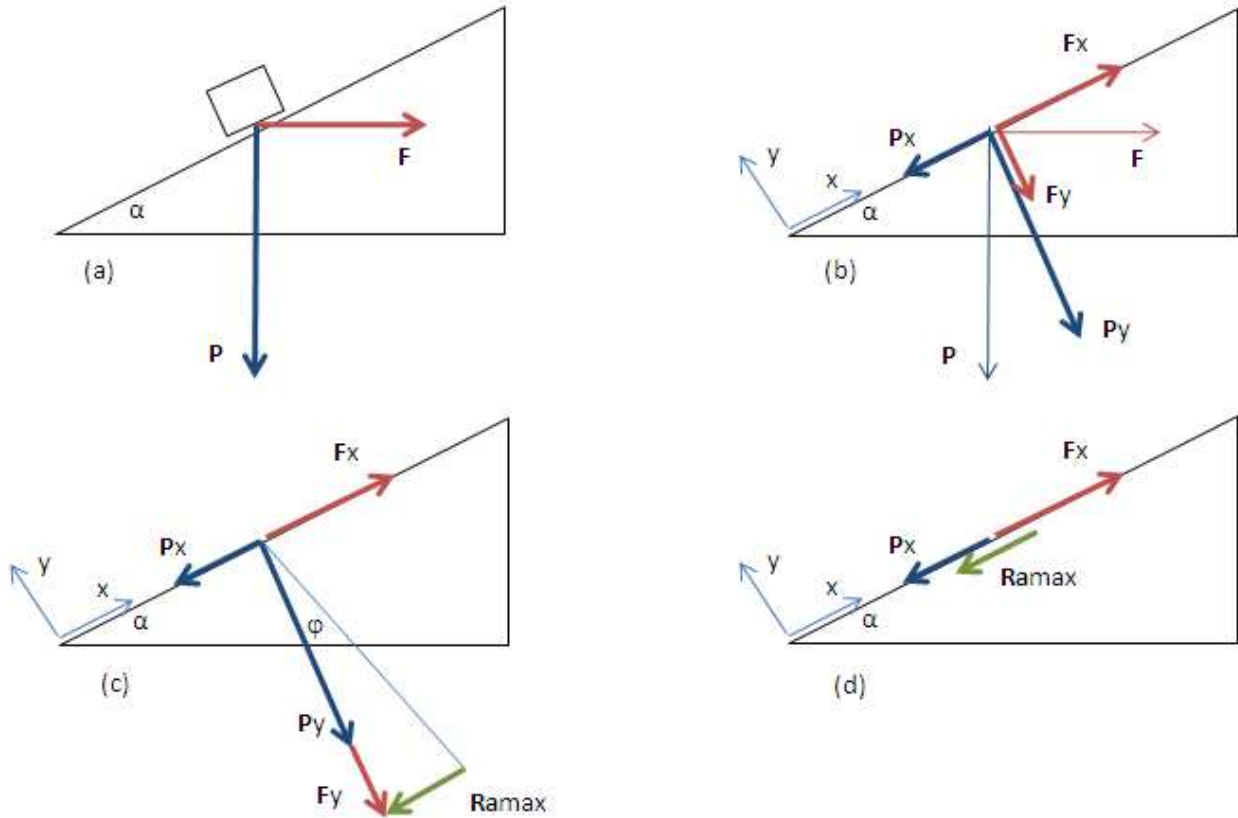
Rendimento di più macchine in parallelo

Il rendimento di n macchine in parallelo, ciascuna con rendimento η_i , è pari alla media pesata dei rendimenti (come pesi si assumono i lavori forniti alle singole macchine).

$$\eta_{tot} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \cdot L_{fi}}{\sum_{i=1}^n L_{fi}} \quad (4.5)$$

Esempio 4.1

Si determini il valore della forza F minima in grado di far risalire un corpo di peso P , appoggiato su di un piano inclinato di inclinazione α , nell'ipotesi che il coefficiente d'attrito tra le superficie a contatto sia pari ad f .



Scomponiamo le forze P ed F lungo le direzioni degli assi cartesiani:

$$P_x = P \cdot \sin \alpha \quad P_y = P \cdot \cos \alpha \quad F_x = F \cdot \cos \alpha \quad F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Le forze P_y ed F_y dirette perpendicolarmente al piano inducono una resistenza d'attrito massima pari a:

$$R_{a \max} = f \cdot (P_y + F_y)$$

Il moto di ascesa è possibile quando:

$$F_x > P_x + R_{a \max}$$

Da cui:

$$F \cdot \cos \alpha > P \cdot \sin \alpha + (P \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \alpha) \cdot f$$

$$F \cdot \cos \alpha - F \cdot f \cdot \sin \alpha > P \cdot \sin \alpha + P \cdot f \cdot \cos \alpha$$

$$F > P \frac{\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - f \cdot \sin \alpha}$$

Poiché $f = \tan \varphi$, sostituendo si ottiene:

$$F > P \frac{\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi}{\cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi} = P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}$$

$$F > P \cdot \tan(\alpha + \varphi)$$

(4.6)



Esempio 4.2

Con riferimento al torchio a vite dell'esempio 3.3, determinare lo sforzo P indotto dall'azione di un momento M applicato al fusto della vite, nell'ipotesi che il coefficiente d'attrito tra vite e madrevite sia pari ad f .

Dalla (4.6), considerate le condizioni limite di equilibrio, si ha:

$$F = P \cdot \tan(\alpha + \varphi)$$

dove $\varphi = \tan^{-1} f$

Moltiplicando primo e secondo membro per il raggio della vite si ha:

$$M = P \cdot \frac{d}{2} \cdot \tan(\alpha + \varphi)$$

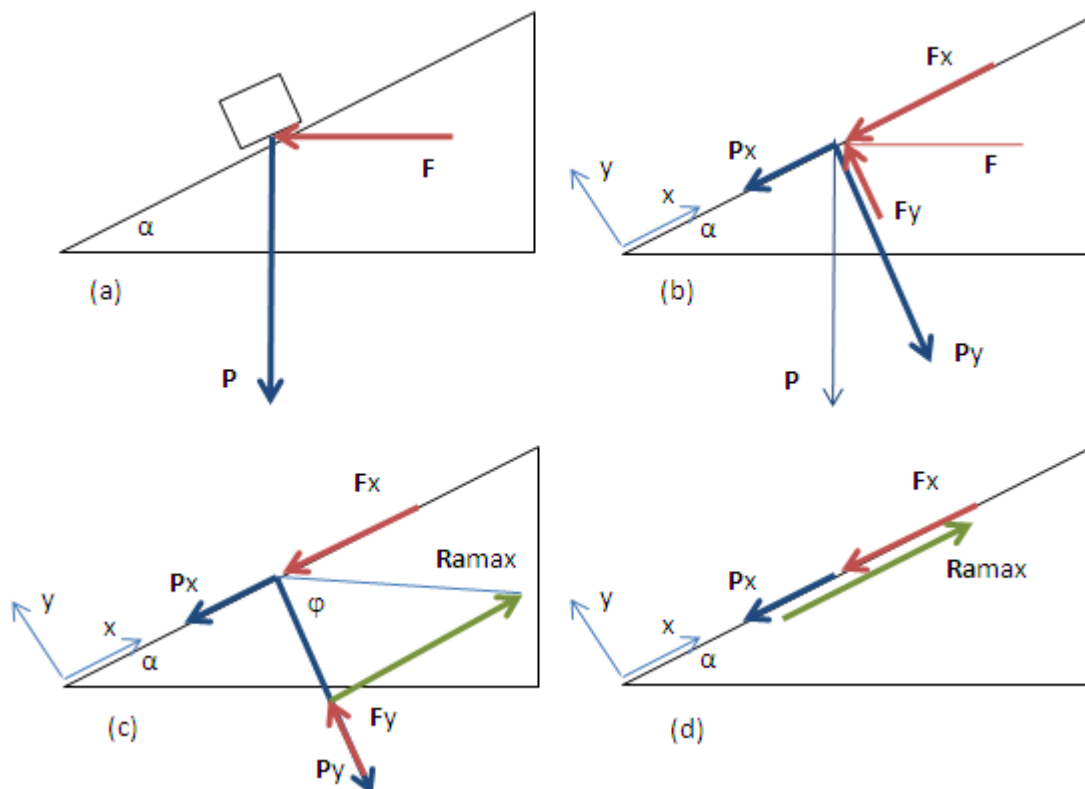
Qualora non sia noto l'angolo di inclinazione della vite bensì il suo passo, dovremo scrivere:

$$M = P \cdot \frac{d}{2} \cdot \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{h}{\pi d}\right) + \varphi\right)$$



Esempio 4.3

Determinare il valore della forza F in grado di iniziare la discesa del corpo lungo il piano inclinato sotto rappresentato, nell'ipotesi che il coefficiente d'attrito tra le superficie a contatto sia pari ad f .



La discesa inizia quando:

$$F_x > R_{a\max} - P_x \rightarrow F \cdot \cos \alpha > (P \cdot \cos \alpha - F \cdot \sin \alpha) \cdot f - P \cdot \sin \alpha$$

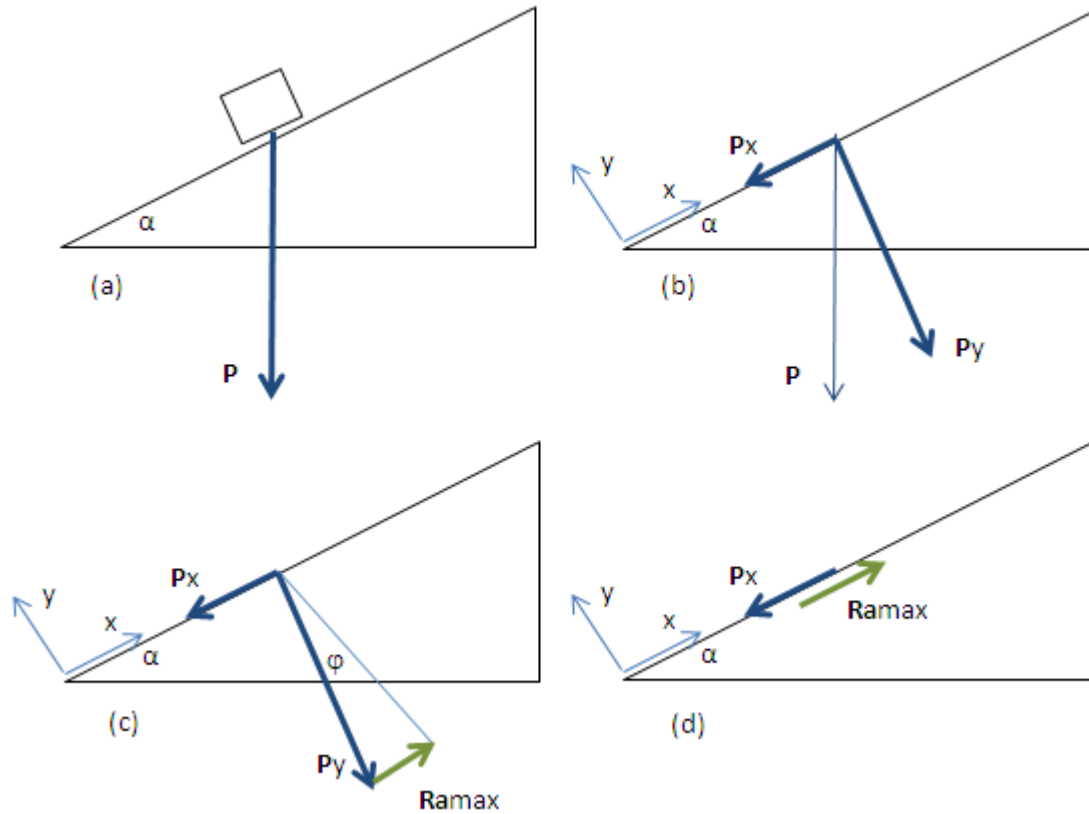
$$F(\cos \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \alpha \cdot \sin \varphi) > P(\cos \alpha \cdot \sin \varphi - \sin \alpha \cdot \cos \varphi)$$

$$F > P \cdot \tan(\varphi - \alpha) \tag{4.7}$$



Esempio 4.4

Si determini il valore minimo dell'angolo α in grado di permettere la libera discesa del corpo, di peso P , appoggiato al piano inclinato nell'ipotesi che il coefficiente d'attrito tra le superficie a contatto sia pari ad f .



La libera discesa inizia quando l'angolo di inclinazione dell'elica è superiore all'angolo d'attrito. Infatti:

$$P_x > R_{a\max} \rightarrow P \cdot \sin \alpha > P \cdot \cos \alpha \cdot f \rightarrow \tan \alpha > f \rightarrow \alpha > \varphi$$



Esempio 4.5

Con riferimento al torchio a vite dell'esempio 3.3 determinare il momento M da applicare al fusto della vite per permetterne lo svitamento, nell'ipotesi che il coefficiente d'attrito tra vite e madrevite sia f .

Dalla (4.7) considerate le condizioni di moto incipiente di discesa, si ha:

$$F = P \cdot \tan(\varphi - \alpha)$$

Moltiplicando primo e secondo membro per il raggio $d/2$ della vite si ha infine

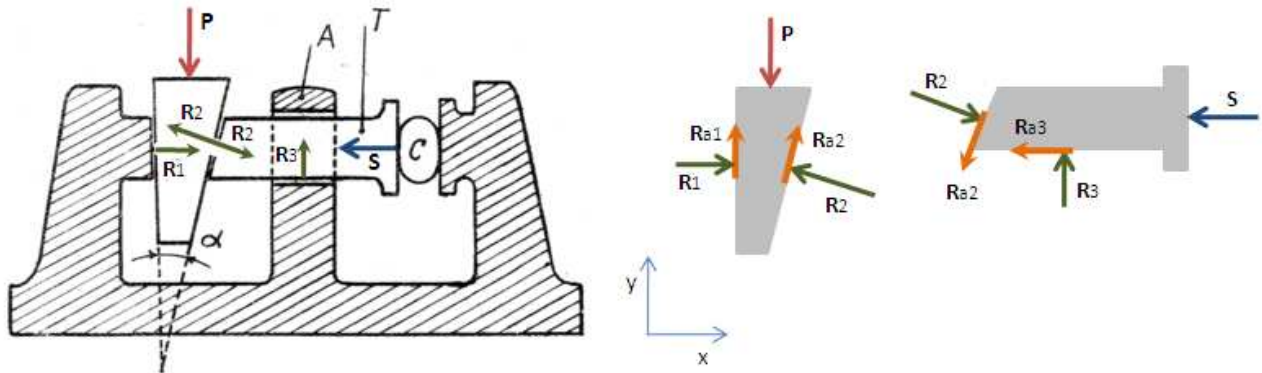
$$F \frac{d}{2} = M = P \cdot \frac{d}{2} \tan(\varphi - \alpha) \quad (4.8)$$



Esempio 4.6

Nella pressa a cuneo sotto rappresentata il corpo da schiacciare (C) è compresso tra due piatti solidali rispettivamente ad un puntone che può scorrere orizzontalmente (T) e al telaio fisso (A).

Determinare la relazione tra la forza applicata P e la compressione S esercitata sul corpo da schiacciare nell'ipotesi che f sia il coefficiente d'attrito tra i fianchi del cuneo e il sostegno da una parte e il puntone dall'altra e f' il coefficiente d'attrito tra il puntone e l'alloggiamento.



Consideriamo dapprima l'equilibrio del puntone¹:

$$\begin{cases} \sum F_x = -S - f' \cdot R_3 - f \cdot R_2 \cdot \sin \alpha + R_2 \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = R_3 - f \cdot R_2 \cdot \cos \alpha - R_2 \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$R_3 = R_2 (f \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) \rightarrow R_2 = \frac{S}{(1 - f \cdot f') \cos \alpha - (f + f') \cdot \sin \alpha} \quad (4.9)$$

Imponendo l'equilibrio del tirante si ha:

$$\begin{cases} \sum F_x = R_1 - R_2 \cdot \cos \alpha + R_2 \cdot f \cdot \sin \alpha = 0 \\ \sum F_y = -P + f \cdot R_1 + R_2 \cdot f \cdot \cos \alpha + R_2 \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Da cui:

$$R_1 = R_2 (\cos \alpha - f \cdot \sin \alpha) \rightarrow P = f \cdot R_2 (\cos \alpha - f \cdot \sin \alpha) + f \cdot R_2 \cos \alpha + R_2 \sin \alpha \quad (4.10)$$

Sostituendo la (4.9) nella (4.10) si ottiene infine:

$$P = S \frac{2f \cdot \cos \alpha + (1 - f^2) \sin \alpha}{(1 - f \cdot f') \cos \alpha - (f + f') \sin \alpha}$$

Nel caso di assenza di attrito la relazione tra P ed S sarebbe pari a:

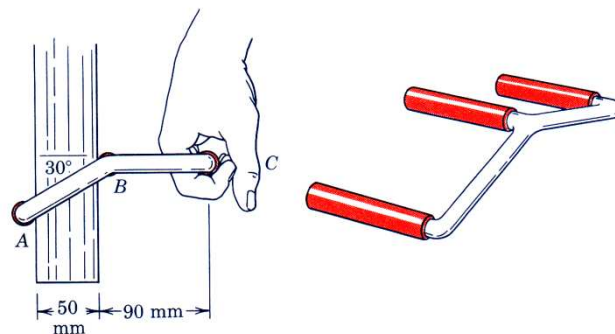
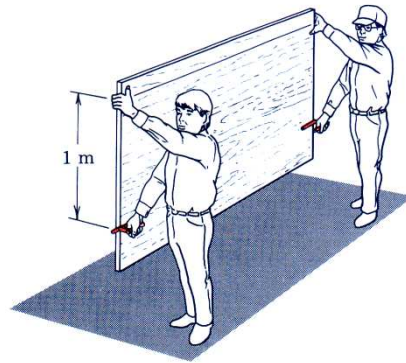
$$P = S \cdot \tan \alpha$$



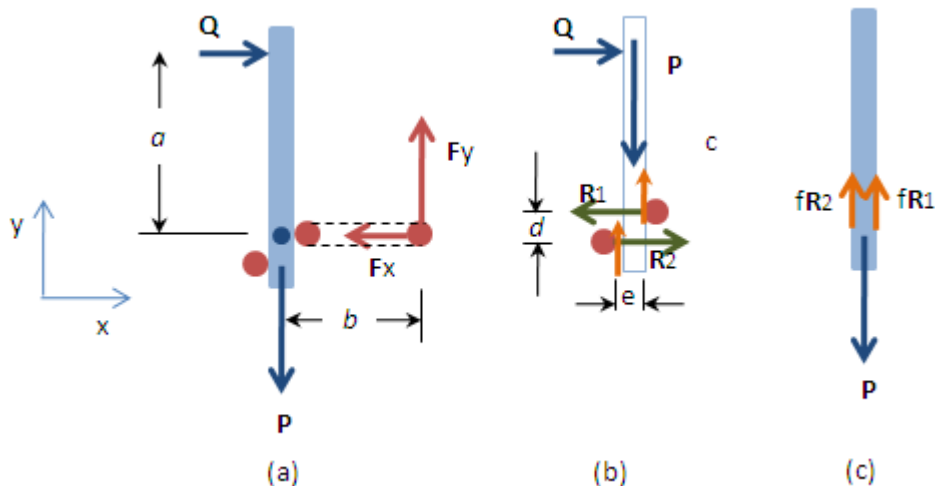
¹ Nell'equilibrio del cuneo e del puntone abbiamo utilizzato solamente due equazioni di proiezione delle forze. Non è di alcun interesse, in questo problema, determinare le eventuali coppie, generate dagli accoppiamenti prismatici, equilibranti le rotazioni.

Esempio 4.7

Two workers are carrying a 50 mm-thick panel by means of panel carriers, one of which is shown in the detail figures. The vertical panel is steadied by equal horizontal forces applied by the left hands of the worker. Determine the minimum coefficient of static friction between the panel and the carriers for which there will be no slippage. The carrier grips at A, B and C do not rotate on the carrier frame. Note that each worker must apply both a vertical and a horizontal force to the carrier handle. Assume that each worker supports half the weight of the panel.



Determiniamo dapprima le forze esterne applicate (a).



$$\begin{cases} F_y = P \\ F_x = Q \\ -Q \cdot a + F_y \cdot b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_y = P \\ F_x = P(b/a) \\ Q = P(b/a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_y = P \\ F_x \cong 0.115 \cdot P \\ Q \cong 0.115 \cdot P \end{cases}$$

Determiniamo ora le reazioni R_1 e R_2 esercitate dal vetro sui cilindri di bloccaggio:

$$\begin{cases} R_2 - R_1 - Q = 0 \\ -Q \cdot a + P \cdot (e/2) - f \cdot R_2 \cdot e + R_2 \cdot d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_2 \cong \frac{90P}{28.868 - f \cdot 50} \\ R_1 \cong \frac{90P}{28.868 - f \cdot 50} - 0.115P \end{cases}$$

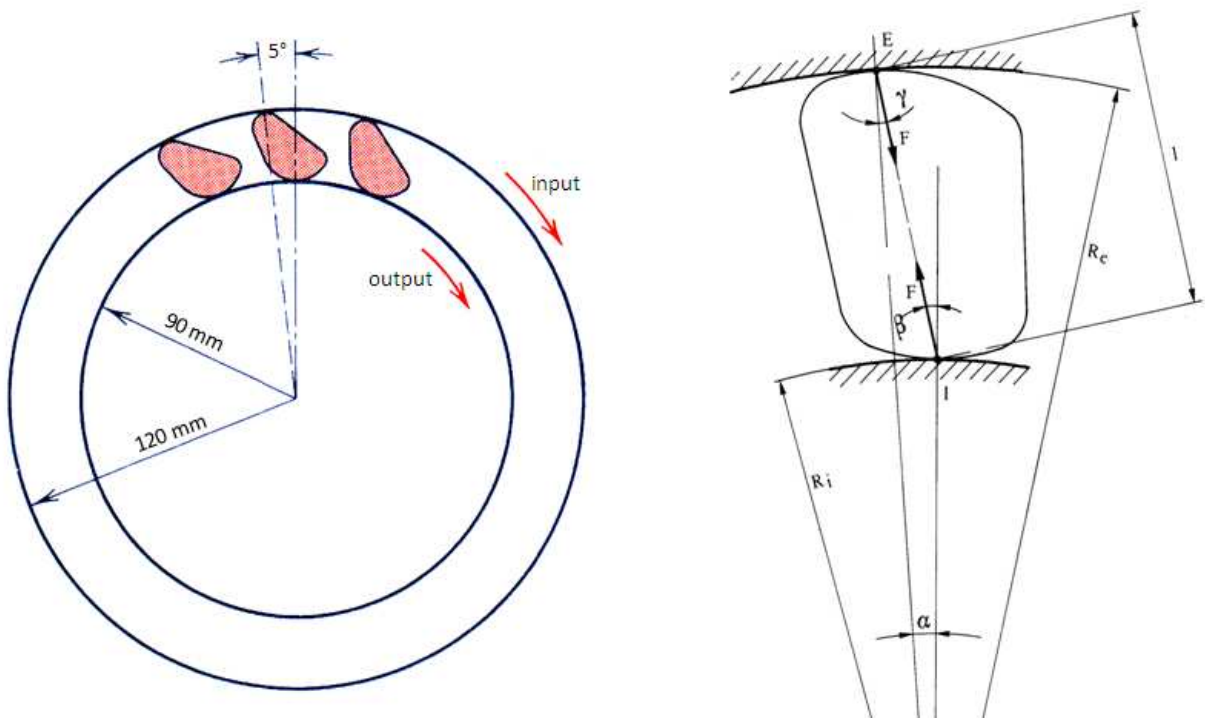
Consideriamo infine l'equilibrio alla discesa del solo vetro (c):

$$f(R_1 + R_2) = P \rightarrow f \geq 0.13$$



Esempio 4.8

The figure shows the elements of a unidirectional clutch which permits the transmission of a counter-clockwise torque from the outer input disk (circle) through the frictional interaction of the connecting rockers, called sprags. A reversal of the direction of motion disengages the sprags, thus preventing any torque transmission. Calculate the minimum coefficient of friction which is applicable for the contacting surfaces which will enable the clutch to engage without slipping.



Ciascun rullo è in equilibrio sotto l'azione di due forze uguali agenti lungo la direzione della retta congiungente le tracce E ed I delle generatrici di contatto, rispettivamente con la lista sterna ed interna. Dal teorema di Carnot ricaviamo l (lato del triangolo EIO, con O non rappresentato in figura).

$$l = \sqrt{R_e^2 + R_i^2 - 2R_e R_i \cos \alpha} \cong 31.34 \text{ mm}$$

Applicando il teorema dei seni, sempre allo stesso triangolo EIO, si ottiene:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{R_i}{l} \rightarrow \gamma = \sin^{-1} \left(\frac{R_i \cdot \sin \alpha}{l} \right)$$

Sempre dal triangolo EIO è facile ricavare che:

$$\beta = \alpha + \gamma$$

Per il corretto funzionamento del dispositivo gli angoli γ e β devono risultare inferiori all'angolo di attrito.

Poiché $\beta > \gamma$, a parità di coefficiente d'attrito tra i rulli e la pista esterna ed interna, lo slittamento avviene prima sulla pista interna.

Nell'esempio proposto si ha:

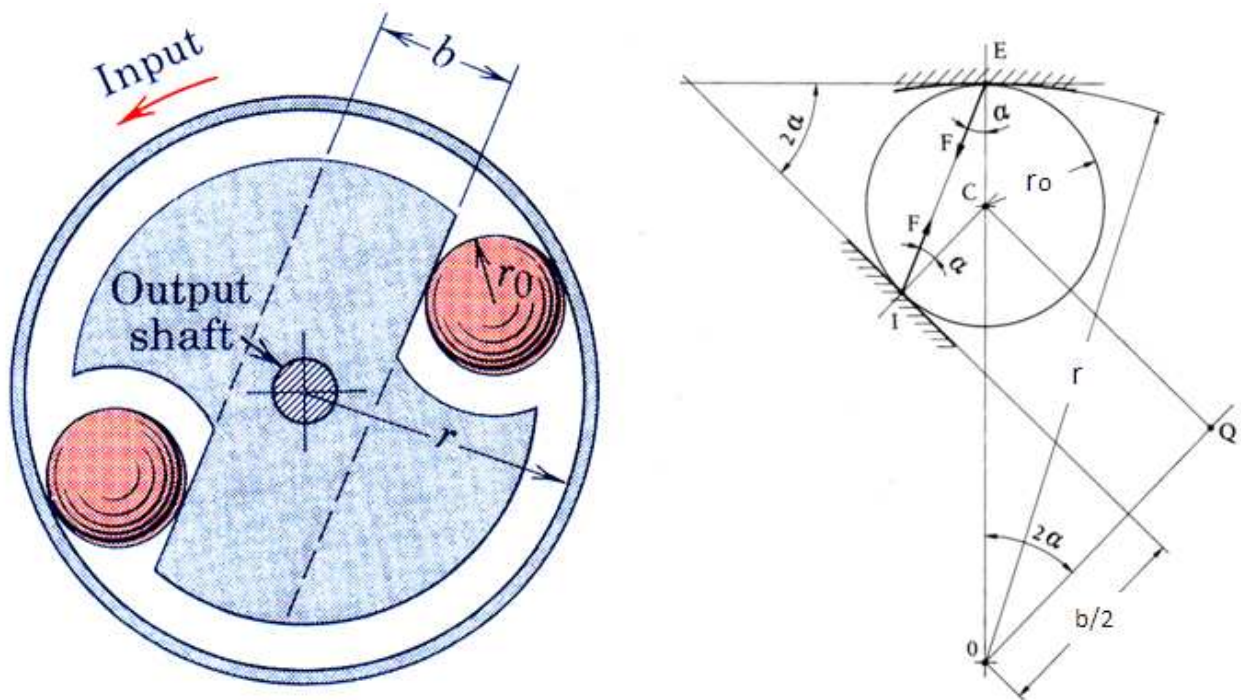
$$\gamma = 14.49^\circ \quad \beta = 19.49^\circ \rightarrow \tan \beta = 0.354$$

Il coefficiente d'attrito minimo risulta $f = 0.354$

Esempio 4.9

The elements of a unidirectional mechanical clutch are shown. A torque M is applied to the outer ring is transmitted to the output shaft through frictional interactions between the outer ring and the balls and between the balls and the inner driven member. If the direction of rotation of the outer ring is reversed, the wedging action of the balls is absent, and no torque can be transmitted to the output shaft.

For given values of r , r_o , and the coefficient of friction f which is applicable for both pairs of interacting surfaces, specify the minimum dimension b of the inner member which will permit the transmission of torque without slipping.



Le sfere si trovano in equilibrio sotto l'azione di due forze F , uguali ed opposte, scambiate rispettivamente con la pista esterna nel punto E , e con la pista interna nel punto I .

L'angolo α formato fra le direzioni delle forze F e le direzioni delle normali alle piste nei punti E ed I si ricava dalla conoscenza dell'angolo 2α formato tra le rette tangenti alla sfera rispettivamente nei punti E ed I .

E' immediato riconoscere che:

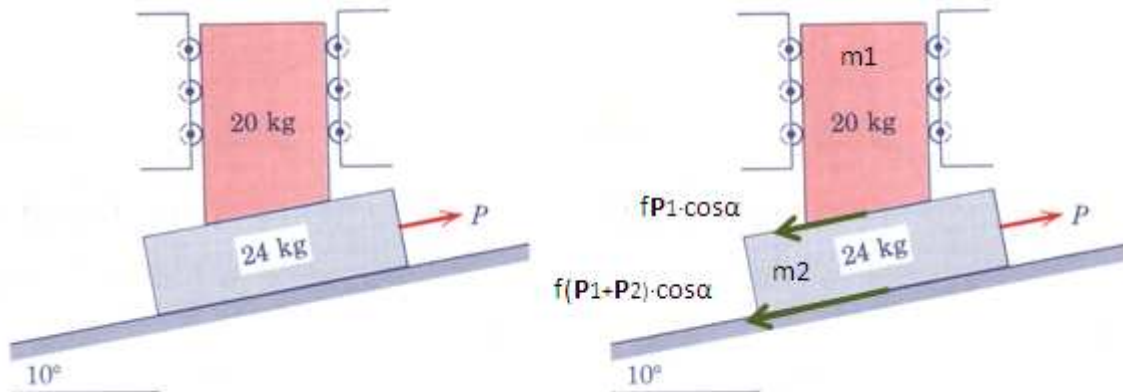
$$2\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{b/2 + r_o}{r - r_o} \right)$$

Per il corretto funzionamento del dispositivo deve essere:

$$\alpha \leq \tan^{-1} f \rightarrow \tan^{-1} f \leq \cos^{-1} \left(\frac{b/2 + r_o}{r - r_o} \right) \rightarrow \cos(\tan^{-1} f) \leq \frac{b/2 + r_o}{r - r_o} \rightarrow b \geq 2 \left(\cos(\tan^{-1} f) (r - r_o) \right) - r_o$$

Esempio 4.10

Calculate the force P required to initiate motion of 24-kg block up the 10° incline. The coefficient of static friction for each pair of surfaces is 0.30.



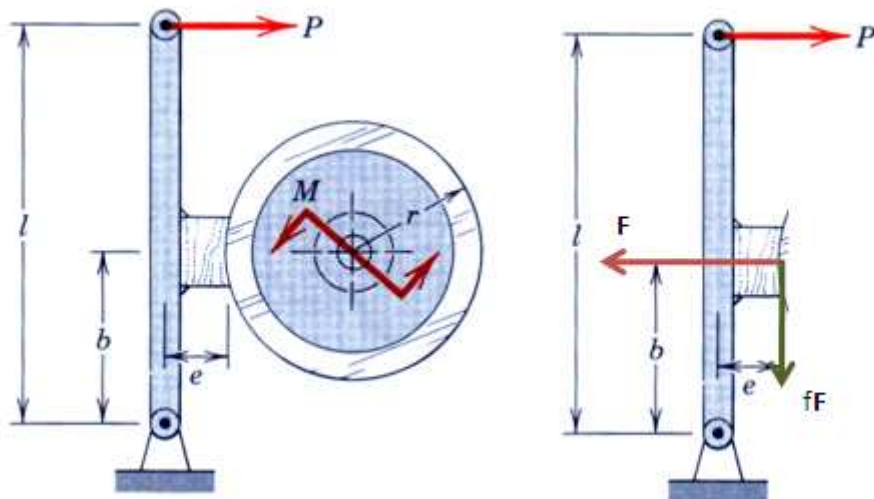
Imponiamo al sistema uno spostamento virtuale δs e imponiamo annullamento dei lavori:

$$P \cdot \delta s - P_2 \cdot \delta s \cdot \sin \alpha - f \cdot P_1 \cdot \cos \alpha - f \cdot (P_1 + P_2) \cdot \cos \alpha = 0$$

$$P \cong 224 \text{ N}$$

Esempio 4.11

The single-lever block brake prevents rotation of the flywheel under counterclockwise torque M . Find the force P required to prevent rotation if the coefficient of static friction is f .



L'equilibrio alla rotazione della leva permette di scrivere:

$$P \cdot l - F \cdot b + f \cdot F \cdot e = 0$$

La rotazione del volano è impedita se:

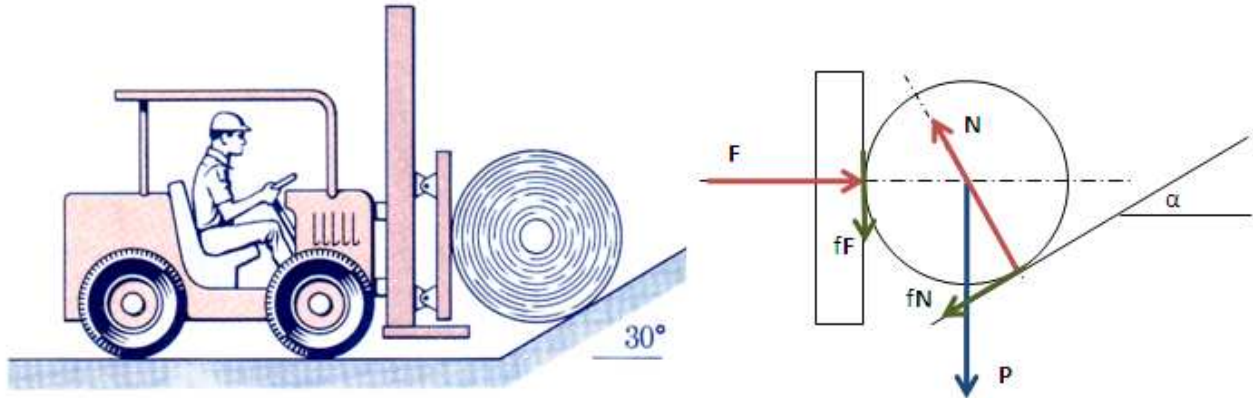
$$f \cdot F \cdot r = M$$

Per sostituzione si ha:

$$P = \frac{M}{r \cdot l} \left(\frac{b}{f} - e \right)$$

Esempio 4.12

The industrial truck is used to move the solid 1200-kg roll of paper up to 30° incline. If the coefficients of static friction and kinetic friction between the roll and the vertical barrier of the truck and between the roll and the incline are both 0.40, compute the required tractive force P between the tires of the truck and the horizontal surfaces.



Poiché:

$$f > \tan \alpha$$

il rullo può salire sul piano inclinato rotolando.

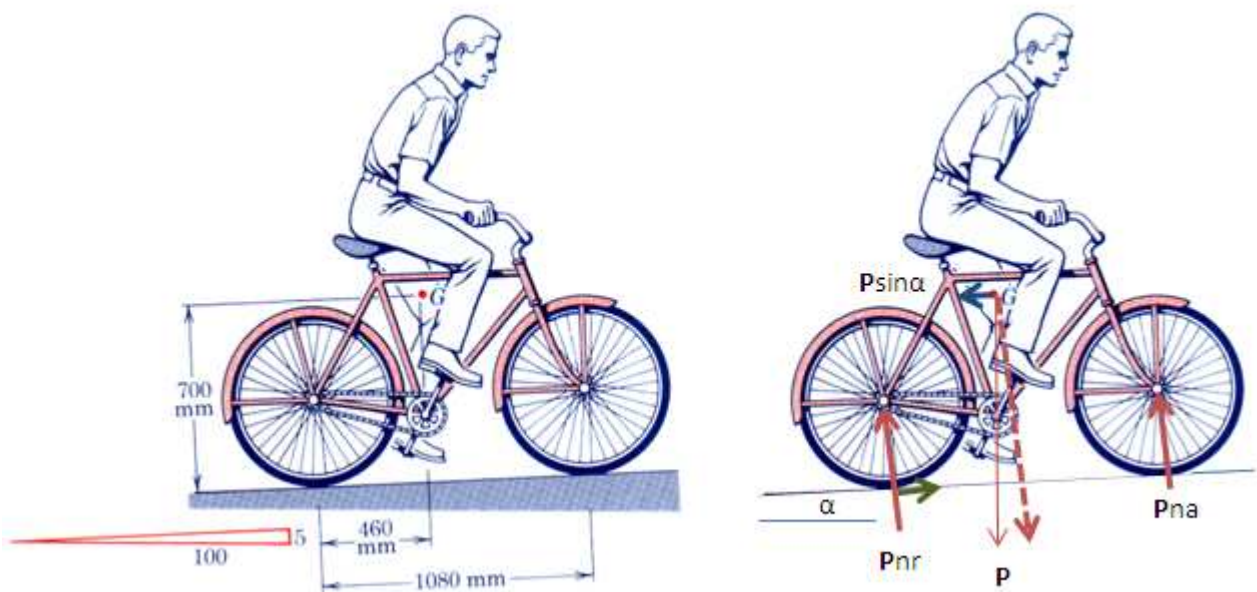
Imponiamo ora l'annullamento dei momenti rispetto al punto di contatto tra rullo e piano inclinato.

$$F \cdot r \cdot \cos \alpha - f \cdot F \cdot (1 + \sin \alpha) - P \cdot r \cdot \sin \alpha = 0$$

$$F = P \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - f \cdot (1 - \sin \alpha)} \cong 22125 \text{ N}$$

Esempio 4.13

A man pedals his bicycle on a 5 percent grade on a slippery road at a steady speed. The man and bicycle have a combined mass of 82 kg with mass center at G . If his rear wheel is on the verge of slipping, determine the coefficient of friction f between the rear tire and the road.



Determiniamo la reazione P_{nr} del terreno nel punto di contatto con la ruota posteriore. (P_{nr1} è la reazione dovuta alla $P \cos \alpha$, P_{nr2} è la reazione dovuta alla $P \sin \alpha$)

$$P_{nr1} = P \cdot \cos \alpha \frac{1080 - 460}{1080} \cong 461.22 \text{ N}$$

$$P_{nr2} = P \cdot \sin \alpha \frac{700}{1080} \cong 26 \text{ N}$$

$$P_{nr} \cong 487 \text{ N}$$

Per assicurare l'aderenza tra ruota posteriore e terreno deve essere:

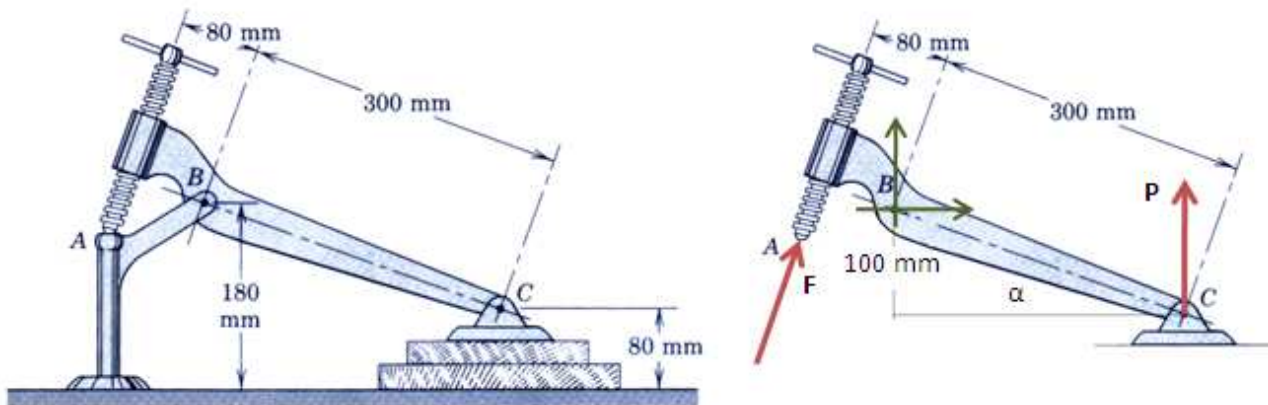
$$P_{nr} \cdot f \geq P \cdot \sin \alpha \rightarrow f_{\min} = 0.082$$



Esempio 4.14

The bench hold-down clamp is being use to clamp two boards together while they are being glued. What torque M must be applied to the screw in order to produce a 900-N compression between the boards?

The 12-mm-diameter single-thread screw has 2 square threads per centimeter, and the coefficient of friction in the threads may be taken to be 0.20. Neglect any friction in the small ball contact at A and assume that the contact force at A is directed along the axis of the screw. What torque M' is required to loosen the clamp?



Per l'equilibrio alla rotazione, rispetto a B, del braccio si ha:

$$F \cdot 80 = P \cdot 300 \cdot \cos \alpha \rightarrow F \cong 3182 \text{ Nm}$$

L'angolo di inclinazione dell'elica della vite vale:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{0.5}{\pi \cdot 1.2} \right) \cong 7.55^\circ$$

L'angolo di attrito vale:

$$\varphi = \tan^{-1} f = 11.3^\circ$$

Il momento sulla vite vale pertanto:

$$M = F \frac{d}{2} \tan(\alpha + \varphi) \cong 6.52 \text{ Nm}$$

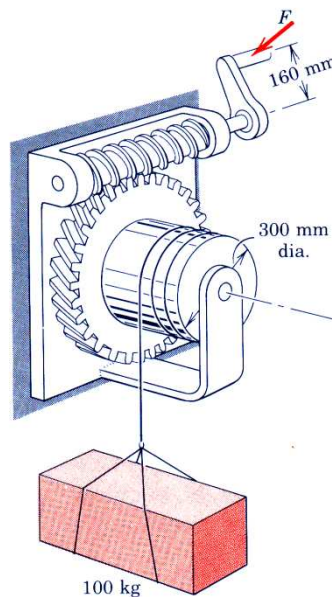
Il momento di svitamento (vedi esempio 4.5) vale:

$$M' = F \frac{d}{2} \tan(\varphi - \alpha) \cong 1.25 \text{ Nm}$$



Esempio 4.15

The hand-operated hoist is lifting a 100-kg load where 25 turns of the handle of the worm shaft produce one revolution of the drum. Assuming a 40 percent loss energy due to friction in the mechanism, calculate the force F normal to the handle arm required to lift the load (without acceleration)



Trascuriamo inizialmente gli attriti.

Applicando il principio dei lavori virtuali, in condizione di equilibrio, si ha:

$$-P \cdot \delta s + M \delta \theta = 0$$

P peso della massa da sollevare

M momento ideale applicato all'asse della vite tramite la manovella

$\delta \theta$ spostamento virtuale della manovella

δs spostamento virtuale del carico.

Poiché:

$$2\pi \cdot 25 : \pi d = \delta \theta : \delta s \rightarrow \delta s = \frac{\delta \theta \cdot d}{50}$$

Si ha pertanto:

$$M = P \cdot \frac{d}{50} = 5886 \text{ Nmm}$$

Dalla definizione di rendimento si ha:

$$\frac{L_u}{L_f} = 0.6 \rightarrow L_f = \frac{L_u}{0.6} \cong 1.6 \cdot L_u$$

$$L_f = M' \cdot \theta = 1.6 \cdot M \cdot \theta \rightarrow M' = 9810 \text{ Nmm}$$

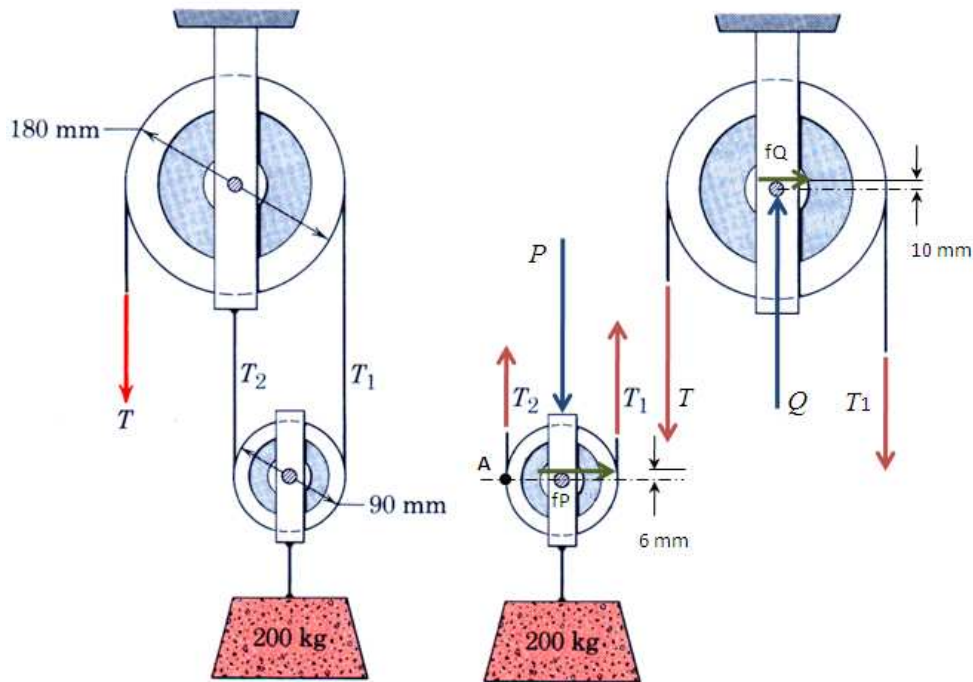
Da cui infine:

$$F = \frac{M'}{160} \cong 61.3 \text{ N}$$



Esempio 4.16

The pulley system shown is used to hoist the 200-kg block. The diameter of bearing for the upper pulley is 20 mm, and that for the lower pulley is 12 mm. For a coefficient of friction $f = 0.25$ for both bearings, calculate the tensions T , T_1 e T_2 in the three cables if the block is being raised slowly.



Imponiamo l'equilibrio della puleggia mobile:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = 200 \cdot 9.81 \\ T_1 \cdot 90 = 200 \cdot 9.81 \cdot 45 + 0.25 \cdot (200 \cdot 9.81) \cdot 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = 1013.7 \text{ N} \\ T_2 = 948.3 \text{ N} \end{cases}$$

Imponiamo l'equilibrio della puleggia fissa:

$$\begin{cases} Q = T + T_1 \\ (T - T_1) \cdot 90 = 0.25 \cdot Q \cdot 10 \end{cases} \rightarrow T = 1071.6 \text{ N}$$



Esempio 4.17

Calculate the tensions T , T_1 and T_2 for the previous example if the block is being lowered slowly.

Per la soluzione ci si può riferire allo schema precedente a patto di invertire le direzioni delle reazioni d'attrito.

Imponiamo l'equilibrio della puleggia mobile:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = 200 \cdot 9.81 \\ T_1 \cdot 90 = 200 \cdot 9.81 \cdot 45 - 0.25 \cdot (200 \cdot 9.81) \cdot 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = 948.3 \text{ N} \\ T_2 = 1013.7 \text{ N} \end{cases}$$

Imponiamo l'equilibrio della puleggia fissa:

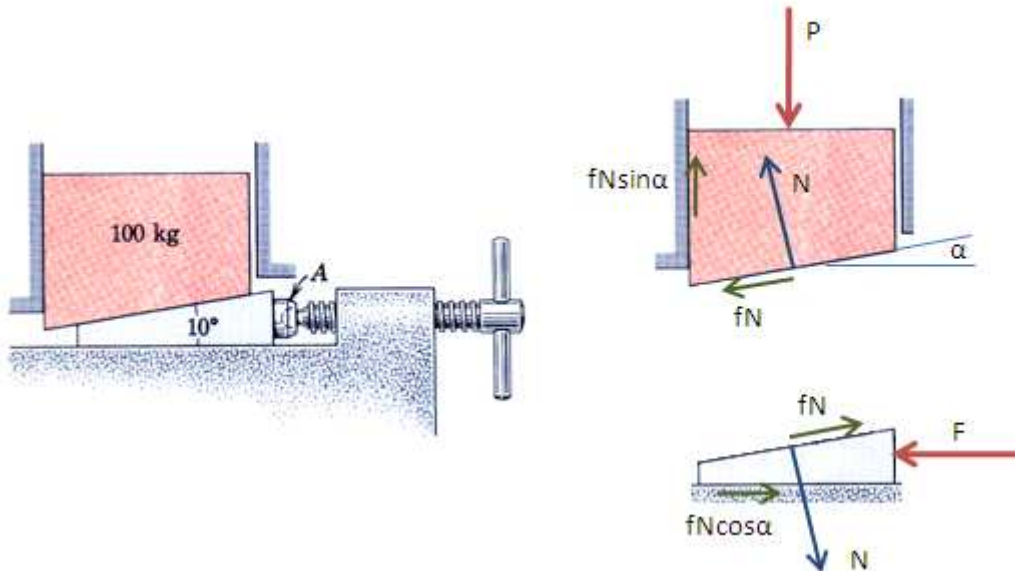
$$\begin{cases} Q = T + T_1 \\ (T - T_1) \cdot 90 = -0.25 \cdot Q \cdot 10 \end{cases} \rightarrow T = 897 \text{ N}$$



Esempio 4.18

The vertical position of the 100-kg block is adjusted by the screw-activate edge. Calculate the moment M which must be applied to the handle of the screw to raise the block.

The single-threaded screw has square threads with a mean diameter of 30 mm and advances 10 mm for each complete turn. The coefficient of friction for the screw threads is 0.25, and the coefficient of friction for all mating surfaces of the block and wedge is 0.40. Neglect friction at ball joint A.



Per l'equilibrio del blocco da 100 kg si ha:

$$P = N \cos \alpha + f \cdot N \sin \alpha - f \cdot N \cdot \cos \alpha \rightarrow N = \frac{P}{(1-f) \cos \alpha + f \cdot \sin \alpha}$$

Per l'equilibrio del cuneo si ha:

$$F = N \sin \alpha + f \cdot N \cos \alpha + f \cdot N \cos \alpha$$

Per sostituzione si ottiene:

$$F = P \frac{\sin \alpha + 2f \cos \alpha}{(1-f) \cos \alpha + f \sin \alpha}$$

Sostituendo i valori numerici si ricava:

$$F = 1428.4 \text{ N}$$

L'angolo di inclinazione dell'elica della filettatura vale:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{10}{\pi \cdot 30} \right) \cong 6.06^\circ$$

L'angolo d'attrito tra vite e madre vite vale:

$$\varphi = \tan^{-1} 0.25 \cong 14^\circ$$

Il momento richiesto vale:

$$M = F \frac{d}{2} \tan(\alpha + \varphi) \cong 7.8 \text{ Nm}$$



Esempio 4.19

In the previous example, calculate the moment which must be applied to the handle of the screw to withdraw the wedge and lower the 100-kg block.

Il momento richiesto vale

$$M = F \frac{d}{2} \tan(\varphi - \alpha) \cong 3 \text{ Nm}$$



Bibliografia

Bongiovanni G, Roccati G
Candeo-Cicogna J
Meriam JL, Kraige LG
Timoshenko S, Young DH

Innesti
Esercizi di Meccanica Applicata alle Macchine
Engineering Mechanics Statics
Meccanica Applicata

Levrotto & Bella
Giorgio
Wiley
Boringhieri