

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 1. Nozioni introduttive di Termodinamica

*Paolo Di Marco*

Versione 2006.02 –10.10.2006.

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di consentire all'allievo di acquisire in poche ore una conoscenza operativa ed applicativa dei concetti fondamentali della termodinamica, nonché una definizione corretta di tutte le variabili di stato, inclusa l'entropia, in modo da potersi quanto prima dedicare all'applicazione ai problemi pratici.

Per dare alla trattazione un maggior senso pratico, si fa uso fin dall'inizio di concetti quali calore, temperatura, energia che si considerano noti in maniera almeno intuitiva. Tali concetti vengono poi definiti in maniera più formale nel seguito.

Le parti di testo scritte in questo carattere rappresentano un'estensione od una riformulazione di concetti precedentemente esposti: esse possono essere tralasciate in una prima lettura e non sono strettamente necessarie alla comprensione.

## Definizioni preliminari

### *Sistema e scambi*

Si definisce *sistema* la porzione di spazio che intendiamo studiare. Essa è delimitata da una superficie arbitrariamente scelta, detta *parete* o *contorno*. La rimanente parte di universo (esterna al sistema) è detta *ambiente* o *esterno*. È bene precisare che la parete del sistema è una superficie, pertanto ad essa non è associabile alcuna massa e le proprietà del sistema sono continue attraverso di essa. Ad esempio, se il nostro sistema è l'aria contenuta in una stanza, non possiamo dire che esso è delimitato dai muri della stanza: bisogna precisare se il contorno è costituito dalla superficie interna od esterna dei muri.

Attraverso la parete avvengono gli *scambi* del sistema con l'esterno: tali scambi, come vedremo in seguito, sono sostanzialmente scambi di *massa*, *energia* ed *entropia*. Un sistema che non esercita alcuno scambio con l'esterno (le cui condizioni non sono quindi influenzate da ciò che avviene fuori di esso) si dice *isolato*. Un sistema la cui parete è impermeabile alla massa si dice *sistema chiuso*. Un sistema chiuso ha quindi massa costante e viene detto pertanto anche *massa di controllo*. In contrapposizione, un sistema in cui si ha scambio di massa con l'esterno viene detto *sistema aperto* o *volume di controllo*.

La definizione di sistema, per quanto possa sembrare a prima vista astratta ed inutile, è fondamentale in termodinamica. Data l'arbitrarietà con cui il sistema può essere individuato, è necessario essere sicuri di averlo bene identificato prima di applicarvi leggi o bilanci. Gli errori più insidiosi e gravi nell'applicazione della leggi della termodinamica derivano spesso da una *scorretta identificazione del sistema*.

## Proprietà, stato, trasformazione

La materia è costituita da un gran numero di molecole che interagiscono tra loro tramite forze le cui modalità ci sono note. Applicando le leggi della meccanica a tali molecole (un sistema di equazioni differenziali con relative condizioni al contorno) si potrebbe pensare di essere in grado di predire la evoluzione nel tempo di qualunque sistema. In realtà anche ammesso di avere una conoscenza perfetta delle leggi di interazione tra le molecole, numerose difficoltà si frappongono alla realizzazione di ciò. In primo luogo, un sistema anche piccolo, es.  $1 \text{ cm}^3$  di aria in condizioni normali, è costituito da circa  $2 \times 10^{19}$  molecole: per predire la sua evoluzione

sarebbero quindi necessarie  $12 \times 10^{19}$  equazioni differenziali (nelle incognite posizione e velocità di ogni molecola) e un numero doppio (trattandosi di equazioni differenziali del secondo ordine) di condizioni al contorno.

Il numero  $2 \times 10^{19}$  è al di fuori della nostra concezione comune. Per farsi un'idea, per contare tali molecole al ritmo di 10000 al secondo occorrerebbero circa 65 milioni di anni, ovvero il tempo trascorso dall'estinzione dei dinosauri!

La risoluzione di tale sistema di equazioni è al di là della capacità attuale, e probabilmente futura, di qualunque supercalcolatore. Tuttavia, gli sviluppi della fisica portano a concludere che non è solo questione di tempo: tale sistema di equazioni è insolubile in linea di principio. Siamo pertanto costretti, per caratterizzare il nostro insieme di molecole, a ricorrere ad una descrizione statistica (termodinamica statistica), oppure a limitarci a fornire delle grandezze complessive a livello macroscopico: quest'ultimo è l'approccio che seguiremo.

Questo d'altra parte pone un limite alle dimensioni minime del sistema, che deve essere abbastanza grande da contenere un numero significativo di molecole. Tale limite fortunatamente è solo un problema teorico in quanto i sistemi che noi considereremo sono di dimensioni largamente superiori ad esso.

Le grandezze in questione sono dette *proprietà* del sistema, e possono essere definite come: attributi del sistema, valutabili mediante un insieme di misure ed operazioni che hanno come risultato un valore numerico.

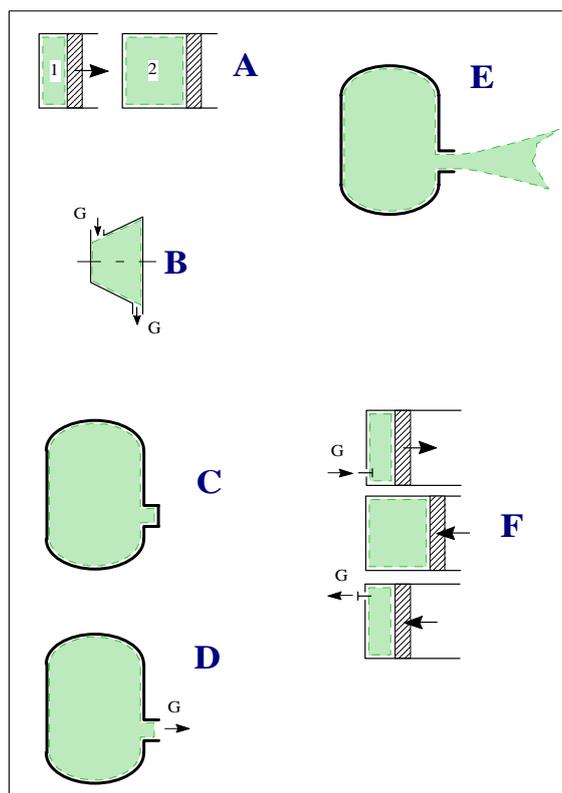
Tali proprietà devono essere indipendenti dal dispositivo di misura, da altri sistemi e dal tempo. Esempi di proprietà del sistema sono la massa, il volume, la pressione, la temperatura, etc. Una proprietà, per essere tale, deve dipendere solo dalle condizioni in cui il sistema si trova e non dal modo in cui le ha raggiunte.

Ad esempio, la posizione di un punto è una proprietà (è misurabile senza alcuna informazione su come il punto l'ha raggiunta) mentre la distanza percorsa dal punto non può essere considerata tale, in quanto per misurarla occorre sapere il comportamento negli istanti precedenti del punto stesso.

Viene detto *stato* del sistema la sua caratterizzazione ad un certo istante di tempo. L'identificazione dello stato richiede dunque la misura di un insieme completo di proprietà, che per tali ragioni sono anche dette *proprietà* (o *variabili*, o *funzioni*: i tre termini verranno usati come sinonimi nel seguito) *di stato*. Le definizioni di *stato* e *proprietà di stato* sono, come si vede, strettamente connesse.

È bene osservare fino da adesso che le proprietà di stato non sono tutte indipendenti. Noi considereremo in genere sistemi in cui se si hanno condizioni di equilibrio, date due proprietà di stato le rimanenti sono univocamente assegnate, e che sono detti pertanto *sistemi bivarianti*. Riprenderemo meglio questo concetto tra un paio di paragrafi.

Uno stato di un sistema si dice *di equilibrio* quando esso non cambia in assenza di stimoli esterni, ovvero quando il sistema non può abbandonarlo se è isolato dall'esterno; l'equilibrio può essere *stabile* (il sistema tende a tornare in tale stato a seguito di una perturbazione), *instabile* (basta una piccola perturbazione perché il sistema si porti in un nuovo stato di equilibrio radicalmente diverso), *metastabile* (è necessaria una perturbazione di una certa entità perché il sistema si porti in un nuovo stato di equilibrio radicalmente diverso).



**Figura 1:** Alcuni esempi di sistemi termodinamici: A) sistema chiuso, non a regime; B) sistema aperto a regime stazionario; C) sistema chiuso a regime stazionario; D) sistema aperto, non a regime; E) sistema chiuso non a regime; F) sistema aperto a regime periodico.

Uno stato del sistema si dice *stazionario* se esso non cambia nel tempo. Nella tecnica, un sistema in stato stazionario viene detto anche *a regime permanente*. Si parla invece di sistemi *a regime periodico* se le proprietà non sono costanti nel tempo, ma riassumono lo stesso valore dopo un determinato intervallo di tempo detto appunto *periodo*. Ad esempio, un motore a scoppio a quattro tempi che funziona a velocità costante non può considerarsi a regime permanente perché le misure di temperatura e pressione in un cilindro variano nel tempo; tuttavia la pressione e la temperatura in ogni cilindro tornano ad avere lo stesso valore dopo un intervallo di tempo corrispondente a due giri dell'albero motore: il sistema è pertanto a regime periodico.

La stazionarietà o meno di uno stato dipende non solo dal sistema, ma dal *riferimento scelto*: ad esempio, se io osservo l'espansione di un gas in un ugello da un sistema di riferimento solidale con la parete dell'ugello, non vedo *variazione nel tempo* delle proprietà (es. la pressione) e concludo che lo stato è stazionario. Se invece il mio sistema di riferimento è solidale con una particella che si muove dentro l'ugello, osservo una variazione di pressione nel tempo e concludo che lo stato non è stazionario.

Quando lo stato del sistema cambia nel tempo (e questo si vede perché cambiano le sue proprietà) si dice che esso subisce una *trasformazione*. Una trasformazione può essere spontanea o indotta dagli scambi del sistema con l'esterno.

Ad esempio, una certa quantità di acqua (il sistema) viene riscaldata (la parete del sistema è attraversata da calore), essa si trasforma (la sua temperatura varia). Se si pongono due blocchi di materiale a temperatura diversa dentro un recipiente isolato dall'esterno, essi evolveranno fino a portarsi alla stessa temperatura.

Una trasformazione viene detta *reversibile* se al termine di essa è possibile riportare sia il sistema che l'ambiente nelle condizioni iniziali.

Per quanto a questo livello sembri scontato di poter realizzare un tale tipo di trasformazione, dopo aver introdotto il secondo principio della termodinamica apparirà chiaro che in realtà ogni trasformazione reale è irreversibile e solo in particolari circostanze può essere approssimata come reversibile.

Una trasformazione è detta *quasistatica* quando avviene abbastanza lentamente da poter essere considerata una successione di stati di equilibrio. Il concetto di "abbastanza lento" va inteso relativamente ai tempi di rilassamento caratteristici del sistema: anche l'espansione dei gas in un cilindro di un motore a scoppio, che avviene in millesimi di secondo, può molto spesso essere considerata "abbastanza lenta".

Non è detto che una trasformazione quasistatica sia reversibile: se sono presenti fenomeni dissipativi, quali l'attrito, questo non avviene. Viceversa, una trasformazione reversibile deve necessariamente essere quasistatica.

## Variabili intensive ed estensive. Variabili specifiche

Una variabile di stato si dice *estensiva* se il suo valore dipende dalla massa del sistema; tali variabili sono dette anche *additive* perché il loro valore totale può essere ricavato come somma (o integrale) dei valori delle varie parti del sistema. Una variabile si dice invece *intensiva* se il suo valore è una funzione locale, ovvero di un particolare punto del sistema.

Ad esempio, la pressione è una variabile intensiva: può essere diversa in ogni punto del sistema, il suo valore totale nel sistema non si ottiene sommando il valore delle pressioni nelle varie parti. Al contrario, il volume è una variabile estensiva: non è definibile localmente, e se si divide il sistema in parti il volume totale è la somma dei volumi parziali.

Per ogni variabile estensiva è possibile definire una corrispondente *variabile specifica* (o più propriamente *massica*), vale a dire il rapporto tra la variabile in questione e la massa del sistema. In genere le variabili estensive sono indicate con una lettera maiuscola, le corrispondenti variabili specifiche con la corrispondente lettera minuscola. Come primo esempio, il volume del sistema si indica con  $V$ , e si misura in  $\text{m}^3$ ; la corrispondente variabile specifica (volume specifico) si indica con  $v = V/M$ , si misura in  $\text{m}^3/\text{kg}$ , e rappresenta il volume della unità di massa.

Le variabili di stato estensive ed intensive di cui faremo uso sono elencate in Appendice 3. La maggior parte di esse verrà definita nei paragrafi successivi.

## Alcune variabili di stato e relazioni tra loro

### *Volume e densità.*

Il concetto di *volume* è un concetto primitivo e non verrà definito. Il *volume specifico* ( $v$ ) rappresenta il volume dell'unità di massa ed è definito rigorosamente come:

$$v = \lim_{dV \rightarrow dV'} \frac{dV}{dM} \quad (1.1)$$

Il limite  $dV'$  rappresenta il valore al di sotto del quale il sistema non può essere considerato continuo. La *densità* è il reciproco del volume specifico e rappresenta la *massa* dell'unità di volume e pertanto:

$$\rho = \frac{1}{v} = \lim_{dV \rightarrow dV'} \frac{dM}{dV} \quad (1.2)$$

La densità dell'acqua (a 4 °C e 1 atm) vale 1000 kg/m<sup>3</sup>; quella dell'aria e del vapore a pressione atmosferica circa 1 kg/m<sup>3</sup>; quella del mercurio circa 13000 kg/m<sup>3</sup>. Molto spesso si usa anche la densità relativa (adimensionale) ovvero il rapporto tra la densità del fluido e quella dell'acqua in condizioni standard. La densità relativa dell'acqua è quindi 1, quella del mercurio 13.

Attenzione a non confondere la densità con il *peso specifico* (*peso* dell'unità di volume) che si indica in genere con  $\gamma$ . La relazione tra le due quantità è ovviamente la stessa che c'è tra massa e peso, ovvero  $\gamma = g \rho$ . Il peso specifico dell'acqua in condizioni standard di temperatura, pressione e gravità è quindi 9806.6 N/m<sup>3</sup>.

### Pressione

Si definisce pressione la componente normale di una forza divisa per la superficie su cui è applicata. In altri termini

$$p = \lim_{dA \rightarrow dA'} \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{n})}{dA} \quad (1.3)$$

Dove  $n$  è il versore normale alla superficie e per  $dA'$  vale la stessa osservazione fatta nel paragrafo precedente per  $dV'$ .

Tale quantità è detta più genericamente sforzo normale; nei fluidi a riposo lo sforzo normale è di *tipo idrostatico*, ovvero il suo valore è indipendente dall'orientamento della superficie  $dA$  (legge di Pascal).

Esiste anche una componente tangenziale di sforzo, detta *sforzo di taglio*. Noi non considereremo sforzi di taglio in quanto di solito trattiamo sistemi fluidi in condizione vicine a quelle di riposo, e i fluidi per definizione non trasmettono sforzi di taglio statici (questo è il motivo per cui non sono in grado di mantenere una forma propria).

La pressione è detta *assoluta* quando il valore zero è riferito al vuoto; si dice invece *relativa* se il valore zero è assunto alla pressione atmosferica. La differenza tra i due valori è dunque, in condizioni normali, di 1 atm (101.325 kPa). Le variazioni meteorologiche della pressione atmosferica influenzano dunque le letture di pressione relativa, ma non quelle di pressione assoluta.

Come è noto, in un fluido a riposo soggetto al campo gravitazionale, la pressione è proporzionale alla profondità  $z$  secondo la legge di Stevin:  $p = \rho g z$ .

Questo comportamento può essere sfruttato per misurare la pressione tramite un tubo riempito di liquido, da cui l'origine delle unità di misura mm di mercurio (detto anche torr, corrispondente a circa 133.3 Pa) e mm d'acqua (98.066 Pa).

### Alcune caratteristiche delle proprietà di stato.

In questo corso, noi ci occuperemo unicamente di *sostanze pure*, ovvero sostanze la cui composizione è *omogenea ed invariabile nel tempo*. Come già accennato, i sistemi contenenti sostanze pure sono *bivarianti*, ovvero, una volta assegnato il valore di due proprietà di stato indipendenti, anche le rimanenti hanno valore assegnato.

Due proprietà di stato non sono indipendenti se il valore di una dipende esclusivamente dal valore dell'altra. Come vedremo in seguito, è questo il caso della pressione e della temperatura per una sostanza bifase, o dell'entalpia e della temperatura per un gas ideale.

Non occorre che una sostanza pura abbia una precisa formula chimica: anche le miscele di due componenti chimici, purché di composizione omogenea, si possono considerare sostanze pure. Possono dunque essere considerate sostanze pure l'acqua, l'ossigeno, ma anche l'aria (miscela di gas) o l'acqua salata (finché il sale non cristallizza). Tuttavia in alcuni testi la definizione di sostanza pura è ristretta alle sole specie chimiche (ovvero, le sostanze costituite da molecole tutte identiche tra loro). Un sistema sede di combustione invece, ancorché omogeneo, non si può considerare comunque una sostanza pura perché la sua composizione varia nel tempo (spariscono i reagenti e compaiono i prodotti della combustione).

E' opportuno soffermarsi adesso su alcune caratteristiche delle funzioni (o proprietà) di stato che ci saranno molto utili nel seguito.

- 1) L'integrale di una funzione di stato  $X$  lungo un qualunque percorso aperto (ovvero, i cui estremi non coincidono) dipende solo dagli estremi di integrazione e non dal percorso.

$$\int_{1A2} dX = \int_{1B2} dX = \dots \quad (1.4)$$

- 2) L'integrale di una funzione di stato  $X$  lungo un qualunque percorso chiuso è nullo.

$$\oint dX = 0 \quad (1.5)$$

- 3) In un sistema *bivariante*, se  $X, Y, Z$  sono funzioni di stato e  $Y$  e  $Z$  sono *indipendenti*, vale la seguente espressione

$$dX = AdY + BdZ \quad (1.6)$$

dove  $A$  e  $B$  sono le derivate parziali della funzione  $X$  rispetto ad  $Y$  e  $Z$

$$A = \left( \frac{\partial X}{\partial Y} \right)_Z ; B = \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \right)_Y \quad (1.7)$$

e

$$\left( \frac{\partial A}{\partial Z} \right) = \left( \frac{\partial B}{\partial Y} \right) \quad (1.8)$$

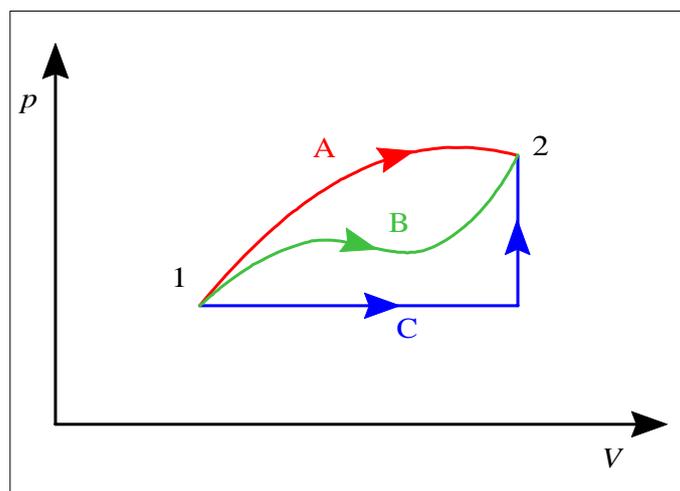
in matematica, la Eq.(6) viene detta *forma differenziale esatta* o semplicemente *differenziale esatto*)

Si potrebbe dimostrare che tutte le condizioni summenzionate sono equivalenti. Nella pratica, questo vuol dire che se una funzione soddisfa anche ad una sola delle condizioni precedenti allora è una funzione di stato e viceversa.

Come vedremo nel seguito, ci interesseremo più alla variazione di una funzione di stato che non al suo valore assoluto: ogni funzione di stato sarà quindi *definita a meno di una costante*, che rappresenta il suo valore in una condizione prefissata. Il valore di tale costante è in principio arbitrario, anche se in alcuni casi viene fissato dalle convenzioni internazionali.

## Diagrammi di stato

Come già accennato, noi considereremo solo *sistemi bivarianti*, ovvero sistemi il cui stato è fissato univocamente da *una coppia di variabili di stato indipendenti*. Se lo stato del sistema dipende dai valori di due sole variabili, allora è possibile rappresentarlo con un punto su un piano che verrà pertanto detto diagramma di stato. Per adesso, possiamo introdurre il piano  $p$ - $V$  (altri diagrammi, es.  $p$ - $T$ , verranno introdotti in seguito) in cui si riporta lo stato del sistema in funzione delle due variabili suddette (punto 1 in Fig.2).



**Figura 2:** Esempi di tre diverse trasformazioni aventi gli stessi stati estremi. In particolare, la trasformazione C è costituita da un ramo a pressione costante (trasformazione *isobara*) ed uno a volume costante (trasformazione *isovolumica* od *isocora*).

Se il sistema subisce una trasformazione e questa trasformazione è *quasistatica* (ovvero, tale che il sistema è in ogni istante infinitamente vicino ad una condizione di equilibrio, ed è quindi possibile definire univocamente i valori del volume e della pressione) allora essa sarà rappresentata sul piano da una linea che connette lo stato iniziale con quello finale (punto 2) e rappresenta la successione di stati occupati successivamente dal sistema. E' evidente che esistono infinite linee (es. le linee 1A2 e 1B2) che connettono i due punti, e quindi infinite modalità di trasformazione che portano il sistema nella stessa condizione finale.

## Gli scambi di massa

### *Portata e velocità del fluido*

Si definisce *portata massica* di fluido in un condotto la massa di fluido che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo. Essa si indica in genere con  $G_m$  (o più semplicemente con  $G$ ) e si misura in kg/s. Si definisce anche la *portata in volume* di fluido ( $G_V$ , misurata in m<sup>3</sup>/s) come il volume di fluido che attraversa una determinata sezione nella unità di tempo. Queste due quantità sono ovviamente legate dalla stessa relazione che lega massa e volume, ovvero, se la densità è costante nella sezione

$$G_m = \rho G_V \quad (1.9)$$

Il semplice termine *portata* si riferisce in genere alla portata massica (e nel seguito verrà usato con tale significato). Tuttavia, a volte viene anche usato con riferimento alla portata in volume. In caso di ambiguità, è bene controllare le unità di misura che sono specificate.

La velocità di una particella fluida può essere definita, in accordo con la meccanica, come la derivata della sua posizione rispetto al tempo e verrà indicata con  $\bar{w}$  (il modulo del vettore sarà indicato con  $w$ ). In genere, la velocità all'interno di un fluido in moto non è costante in ogni punto: ci si può rendere conto di questo semplicemente osservando la superficie di un fiume da un ponte. In particolare, la velocità è in genere massima nella zona centrale del condotto ed è *nulla* nelle zone di contatto con le superfici solide.

In altre parole, un fluido non scorre su una superficie come fa un solido su un altro solido: la velocità relativa nella zona di contatto è sempre nulla. Lo scorrimento si verifica tra gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla superficie, dove i gradienti di velocità sono in genere elevati.

Si può definire una *velocità media* (detta più precisamente *velocità media di portata*, indicata con  $\bar{w}$ ) del fluido come la velocità del fluido, ipotizzata costante nella sezione, che produrrebbe la stessa portata in volume. Il fluido che attraversa una sezione del condotto in 1 s, in tali condizioni, è quello contenuto in un cilindro di altezza  $\bar{w}$  e sezione pari a quella del condotto,  $A$ . La velocità media  $\bar{w}$  è quindi data da:

$$G_V = \bar{w}A \quad (1.10)$$

e di conseguenza la relazione che lega la portata massica alla velocità media è

$$G = \rho \bar{w}A \quad (1.11)$$

Seppure in modo molto indicativo, si può dire che nella pratica ingegneristica la velocità media dei liquidi nei condotti ha valori di 2-5 m/s, mentre per gli aeriformi i valori più comuni sono intorno a 10-30 m/s.

### ***ESEMPIO 1.1 - Calcolo del diametro di una tubazione***

Una tubazione trasporta una portata  $G = 80000$  t/h di acqua marina ( $\rho = 1030$  kg/m<sup>3</sup>) per il raffreddamento del condensatore di una centrale termoelettrica. Supponendo una velocità media nel condotto di 4 m/s, calcolare il diametro della tubazione (supposta circolare).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 80000 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 80000 \frac{1000 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 22200 \text{ kg/s}$$

La sezione del condotto si ricava dall'Eq. (11)

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{22200}{1030 \cdot 4} = 5.4 \text{ m}^2$$

e quindi il suo diametro vale

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 2.6 \text{ m}$$

Da notare che i dati sono realistici. Le opere di presa dell'acqua di raffreddamento delle centrali termoelettriche hanno dimensioni simili.

□

## Gli scambi energetici

### Lavoro

In meccanica, il lavoro di una forza è dato da:

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{w} dt \quad (1.12)$$

o in termini differenziali da

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{w} dt = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1.13)$$

e quello di una di un sistema di forze di momento  $M$  applicate ad un albero rotante con velocità  $\Omega$  da

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \vec{\Omega} dt \quad (1.14)$$

In termodinamica, il lavoro viene convenzionalmente considerato *positivo* quando il sistema fornisce lavoro all'esterno e *negativo* nel caso contrario. L'unità di misura SI del lavoro è il *joule* (J).

La definizione di lavoro deve essere generalizzata per poter tenere conto di altre forme di lavoro non meccanico. Si definisce pertanto *lavoro generalizzato* "una qualunque azione esercitata dal sistema sull'ambiente il cui unico effetto sull'ambiente può essere ricondotto al sollevamento di un peso".

Ad esempio, il lavoro di un generatore elettrico collegato ad un verricello soddisfa tale condizione (si deve disporre di un motore elettrico e di un verricello di rendimento unitario, ma questo è teoricamente possibile). La definizione può apparire astratta e cervellotica, ma esprime in sostanza il concetto che il lavoro generalizzato è qualunque azione trasformabile teoricamente e *integralmente* in lavoro meccanico

Il lavoro generalizzato è esprimibile tramite il prodotto di una forza generalizzata per uno spostamento generalizzato. A noi interessa in particolare l'espressione del lavoro elettrico:

$$L_{el,12} = \int_{t_1}^{t_2} V I dt \quad (1.15)$$

### Lavoro di dilatazione

Una particolare forma di lavoro che si incontra in termodinamica è il lavoro connesso alla variazione di volume di un sistema al cui esterno è applicata una pressione  $p_0$ . Facendo riferimento al caso di un pistone senza attrito (v. Fig.3, ma il risultato ottenuto è del tutto generale) si ottiene

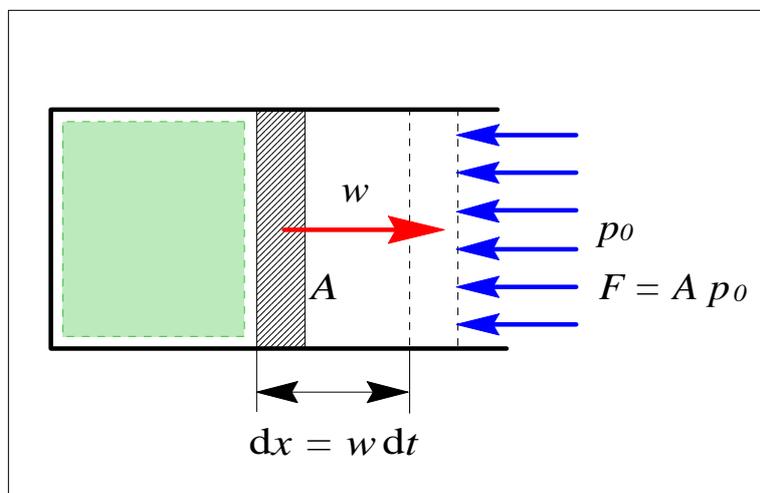
$$L_{12} = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{w} dt = \int_{x_1}^{x_2} (p_0 A) dx = \int_{V_1}^{V_2} p_0 dV \quad (1.16)$$

In questo caso abbiamo aggiunto il segno negativo per tenere conto della convenzione adottata in termodinamica sul segno del lavoro (positivo se ceduto all'esterno, ovvero quando  $p_0$  e  $w$  sono discordi, come in Fig.3). In particolare, se la trasformazione è reversibile, si può considerare  $p=p_0$ , nel qual caso si ottiene la classica espressione

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (1.17)$$

o in termini differenziali

$$dL = p dV \quad (1.18)$$

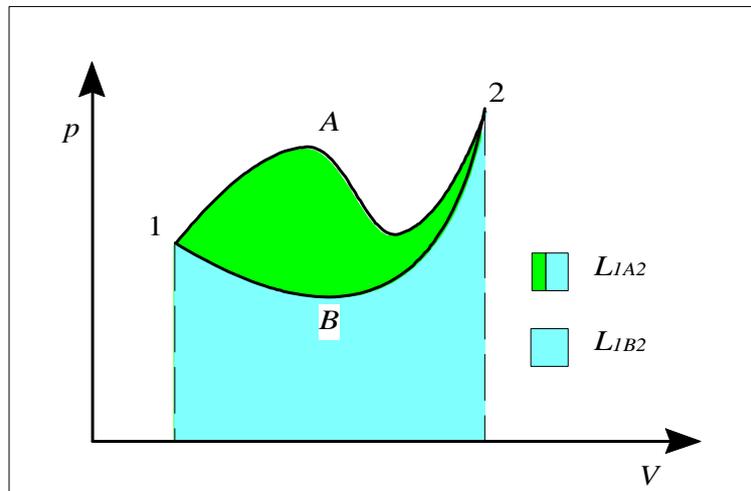


**Figura 3:** Lavoro di dilatazione in un sistema cilindro-pistone.

Si deve notare che in un sistema il lavoro di dilatazione è nullo se il contorno del sistema è rigido (variazione di volume nulla) o se le forze esterne sono nulle (es., un gas che si espande nel vuoto: in questo caso la trasformazione è irreversibile). Anche in tal caso però altre forme di lavoro possono essere non nulle (lavoro elettrico, lavoro di un albero rotante, etc.).

La (17) si presta ad una interpretazione grafica del lavoro di dilatazione reversibile: in un diagramma  $p$ - $V$ , esso sarà rappresentato dall'area sottesa dalla trasformazione (vedi Fig. 4).

Dalla stessa figura, risulta che il lavoro dipende dal *percorso* della trasformazione (è diverso lungo i cammini A e B) e non solo dai suoi estremi, e pertanto *non è una funzione di stato*.



**Figura 4:** Lavoro di dilatazione reversibile in due diverse trasformazioni aventi gli stessi estremi.

**Lavoro specifico**

Il lavoro specifico è il lavoro compiuto per unità di massa del sistema; nel caso particolare del lavoro di dilatazione si ha

$$dl = \frac{1}{M} p dV = p d\frac{V}{M} = p dv \tag{1.19}$$

e analogamente, in forma integrale

$$l_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv \tag{1.20}$$

Il lavoro specifico si misura in J/kg.

Anche il lavoro specifico ha una interpretazione geometrica analoga a quella del lavoro totale, ma facendo riferimento ad un diagramma in cui in ascissa si riporti il *volume specifico* (*v*) al posto del volume totale (*V*).

**ESEMPIO 1.2 - Calcolo del lavoro di dilatazione**

Si comprime reversibilmente anidride carbonica in un sistema cilindro-pistone dalle condizioni iniziali  $p_1 = 100 \text{ kPa}$ ,  $V_1 = 0.004 \text{ m}^3$ , alla pressione finale  $p_2 = 500 \text{ kPa}$ . La trasformazione segue la legge  $pV^n = \text{costante}$  con  $n = 1.22$ . Determinare il lavoro di dilatazione.

Abbiamo a che fare con un sistema chiuso (il gas contenuto nell'insieme cilindro-pistone) che subisce una trasformazione reversibile. Per cui, dalla Eq.17

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{C}{V^n} dV = C \int_{V_1}^{V_2} V^{-n} dV = \frac{C}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n})$$

Il valore di  $V_2$  potrebbe essere calcolato dalle legge della trasformazione

$$p_2 V_2^n = \text{cost} = p_1 V_1^n$$

Tuttavia, per evitare la propagazione degli errori di arrotondamento, conviene sostituire direttamente nella precedente espressione per ottenere.

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{C}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) = \frac{p_1 V_1^n V_1^{1-n}}{1-n} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-n} - 1 \right] = \\ &= \frac{p_1 V_1}{1-n} \left[ \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-n}{n}} - 1 \right] = \frac{p_1 V_1}{1-n} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \\ &= \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0.004}{-0.22} \left[ \left( \frac{500 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} \right)^{0.22} - 1 \right] = -612 \text{ J} \end{aligned}$$

Il segno negativo indica che il lavoro viene fatto dall'ambiente sul sistema, come è logico aspettarsi in una compressione. Da notare che il risultato ha le dimensioni del prodotto  $pV$ , ovvero

$$[\text{N/m}^2 \text{ m}^3] = [\text{N m}] = [\text{J}]$$

quindi la verifica dimensionale è consistente. Inoltre, per ottenere il risultato in J abbiamo dovuto riportare i valori numerici delle pressioni in Pa, anche se nel rapporto delle pressioni non sarebbe stato necessario.

□

### Lavoro meccanico nei sistemi aperti a regime

Consideriamo un sistema aperto a regime. A titolo di esempio si consideri un compressore a pistone; in questo caso il sistema è in condizioni di regime periodico. Nella fase di aspirazione (1-2, v. Fig.5), considerando nulle le perdite di pressione nei condotti di aspirazione, si può assumere che la pressione nel cilindro e sul pistone rimanga costante e pari al valore lato aspirazione ( $p_A$ ); il lavoro compiuto *dal pistone* (che indichiamo con la lettera  $L'$ ) sarà pertanto dato da (seguendo un ragionamento analogo a quello riportato nel paragrafo precedente)

$$L'_{12} = p_A (V_2 - V_1) = p_A V_2 \quad (1.21)$$

dove il segno positivo indica che il lavoro viene ceduto dal sistema all'ambiente (la pressione spinge sul pistone) Nella fase successiva di compressione (2-3), con entrambe le valvole chiuse, il lavoro è dato dalla classica espressione

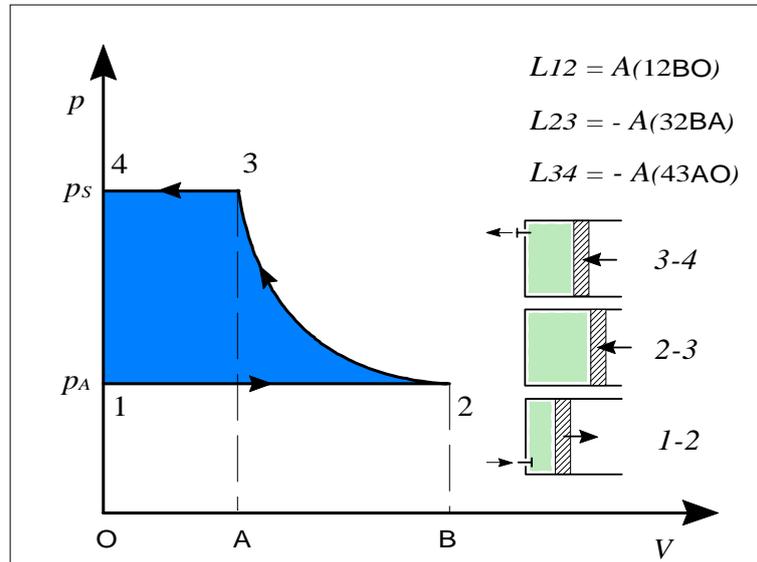
$$L'_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p \, dV \quad (1.22)$$

mentre durante lo scarico nell'ambiente a pressione  $p_S$  (fase 3-4), il lavoro è dato da (il segno meno indica che esso viene ceduto al sistema)

$$L'_{34} = p_S (V_4 - V_3) = - p_S V_3 \quad (1.23)$$

In totale, come si vede graficamente in Fig.5, il lavoro scambiato tramite il pistone è dato dall'area del trapezoide 1234, che rappresenta il valore dell'integrale:

$$L'_{14} = - \int_{p_A}^{p_S} V dp \quad (1.24)$$



**Figura 5:** Lavoro compiuto sul pistone in un sistema aperto a regime periodico.

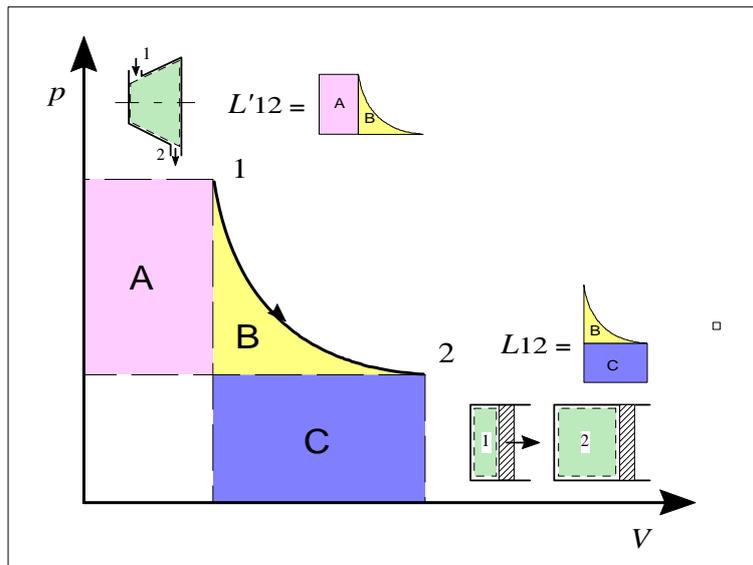
Tale lavoro, che effettivamente si cede tramite il pistone (e quindi anche tramite gli organi meccanici ad esso collegati) durante tutto il ciclo, viene detto *lavoro esterno netto* (o anche: *lavoro tecnico* o *lavoro utile*). Esso si indica generalmente con l'apice per non confonderlo con il lavoro di dilatazione nei sistemi chiusi. Quanto appena esposto non ha certo il rigore di una dimostrazione; tuttavia, sebbene tale risultato sia stato ottenuto in un caso particolare, esso è generalizzabile a qualunque sistema aperto a regime (purché ovviamente la trasformazione sia reversibile).

L'espressione precedente può anche essere posta in termini differenziali

$$dL' = - V dp \quad (1.25)$$

e anche per unità di massa

$$dl' = - v dp, \quad l'_{12} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp \quad (1.26)$$



**Figura 6:** Differenza tra il lavoro meccanico per una stessa trasformazione in sistemi chiusi (A) e sistemi aperti a regime (B).

La differenza tra il lavoro utile raccolto in un sistema aperto ed uno chiuso consiste nel fatto che una parte del lavoro scambiato nei sistemi aperti è associato solo alla introduzione od estrazione di fluido dal sistema. Questo lavoro, che non è utilizzabile a fini tecnici, viene detto anche *lavoro di pulsione*.

Come risulta in Fig. 6, la stessa trasformazione dà luogo a due interpretazioni grafiche del lavoro totalmente diverse a seconda che si compia in un sistema chiuso o in uno aperto.

### **ESEMPIO 1.3 - Calcolo del lavoro utile in sistemi aperti a regime**

Si comprime reversibilmente una portata  $G = 120 \text{ kg/min}$  di acqua in una pompa, dalle condizioni iniziali  $p_1 = 100 \text{ kPa}$ , alla pressione finale  $p_2 = 500 \text{ kPa}$ . La pompa lavora in condizioni di regime. Determinare il lavoro specifico e la potenza assorbita.

Abbiamo a che fare con un sistema aperto a regime (l'acqua contenuta nella pompa) che subisce una trasformazione reversibile. Per cui, dalla Eq.26

$$l'_{12} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp$$

L'acqua allo stato liquido si può considerare un fluido incomprimibile, ovvero il cui volume specifico è costante. Si può assumere allora

$$v = \text{costante} = \frac{1}{\rho} \cong \frac{1}{1000} = 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

per cui

$$l'_{12} = - v \int_{p_1}^{p_2} dp = - v (p_2 - p_1) = \frac{1}{1000} (100 \cdot 10^3 - 500 \cdot 10^3) = - 400 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Il segno negativo indica che il lavoro viene fatto dall'ambiente sul sistema, come è logico aspettarsi in una compressione.

Per ottenere la potenza assorbita dalla pompa (lavoro per unità di tempo) bisogna moltiplicare il lavoro per unità di massa per la massa che attraversa il sistema nell'unità di tempo, ovvero la portata. Quindi

$$W'_{12} = G l'_{12}$$

La portata deve essere espressa nelle unità SI (kg/s)

$$G = 120 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 120 \frac{\text{kg}}{60 \text{ s}} = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

E otteniamo infine

$$W'_{12} = G l'_{12} = 2 \cdot (-400) = -800 \text{ W}$$

□

### Calore

Si constata sperimentalmente che due sistemi che vengono posti in contatto senza alcuna possibilità di scambiarsi lavoro subiscono comunque una trasformazione che li porta in uno stato finale che si dice di *equilibrio termico*. Tale trasformazione avviene solo se i sistemi sono posti in condizioni di interagire attraverso una parete: deve quindi esistere una forma di scambio differente dallo scambio di lavoro, che (come vedremo meglio in seguito) si traduce ugualmente in una variazione del contenuto di energia del sistema. Tale forma di scambio energetico viene detta *scambio di calore*.

Due sistemi che si scambiano calore vengono detti in *contatto termico*.

Si dice *adiabatica* (da una parola greca che significa "inattraversabile") una parete attraverso cui non può avvenire lo scambio di calore (ad esempio, le pareti di un vaso Dewar, ovvero la versione per laboratorio del comune thermos, sono con ottima approssimazione adiabatiche). Analogamente, verrà detta *trasformazione adiabatica* una trasformazione durante la quale lo scambio di calore è nullo.

Per completezza, si riportano due ulteriori definizioni di calore che si ritrovano nei testi di termodinamica:

- *Calore è uno scambio di energia tra due sistemi associato ad una differenza, anche infinitesima, di temperatura.*
- *Calore è lo scambio di energia associato ad uno scambio di entropia.*

E' evidente che tali definizioni danno per pre-acquisiti i concetti di temperatura e di entropia, che noi invece illustreremo nel seguito.

Da notare che il calore, come il lavoro, è una *forma di energia in transito*. Non è quindi formalmente corretto (anche se è in uso) dire che "un corpo immagazzina calore" o parlare di "calore contenuto in un sistema": in entrambi i casi il termine corretto da usare è *energia*. Il calore si manifesta come tale solo quando si trasferisce da un sistema ad un altro.

Il calore, avendo le stesse dimensioni dell'energia, viene misurato in joule [J]. Convenzionalmente, si considera *positivo* il calore ceduto dall'ambiente al sistema e *negativo* quello ceduto dal sistema all'ambiente.

Il calore è stato considerato una entità fisica separata dal lavoro, ovvero una sorta di fluido immateriale ed indistruttibile (detto *calorico*) che permeava i corpi trasferendosi dall'uno all'altro, fino a quando James P. Joule (1818-1889), dando sostanza scientifica ad una serie di osservazioni precedenti, non dimostrò in maniera evidente il contrario (intorno al 1840).

Come retaggio della teoria del calorico, sopravvive fino ai giorni nostri una diversa unità di misura per il calore, la *grande caloria* [kcal], definita generalmente come il calore necessario

per innalzare di un grado centigrado (precisamente da 14.5 a 15.5 °C) la temperatura di 1 kg di acqua a pressione di 1 atm. Lo stesso Joule stabili con misure accurate che 1 kcal = 4186.8 J. A seguito dell'obbligo di adozione del Sistema Internazionale di unità di misura (1982 in Italia) la caloria deve essere definitivamente abbandonata in favore del joule.

La corrispondente unità nel sistema britannico, la British Thermal Unit [Btu] equivale a 1055.06 J ed è (purtroppo) tuttora usata per caratterizzare le prestazioni degli impianti di condizionamento dell'aria.

Il calore  $W_T$  scambiato per unità di tempo (*potenza termica*, espressa in W) tra due corpi a temperature rispettivamente  $T_1$  e  $T_2$  è dato da (come vedremo meglio nel capitolo sulla trasmissione del calore)

$$W_T = u A (T_2 - T_1) \quad (1.27)$$

dove  $A$  è la superficie attraverso cui avviene lo scambio e  $u$  è una opportuna quantità, detta *coefficiente globale di scambio* o *conduttanza globale*, che si misura in  $[W/m^2 K]$ : impareremo nel capitolo sulla trasmissione del calore a valutarla in alcuni casi di particolare interesse tecnico. Per ora l'espressione suddetta viene presentata unicamente per richiamare l'attenzione sui punti seguenti:

- Nella pratica, perché avvenga scambio di calore tra due corpi, è necessaria una differenza di temperatura *finita* tra essi;
- Idealmente (talvolta lo faremo in seguito) si può anche supporre che tale differenza di temperatura sia *infinitesima*: questo fa sì, come risulta dell'espressione precedente, che in tali condizioni per scambiare una quantità finita di calore [J] sia necessaria una *superficie infinitamente estesa* od un *tempo infinito*.
- La Eq.(1.27) presenta notevoli analogie con la legge di Ohm ( $I = (V_2 - V_1)/R$ ), che regola il passaggio di corrente nei conduttori, dove  $W_T$  gioca lo stesso ruolo della corrente elettrica e la differenza di temperatura quello della differenza di potenziale. Non stupisce quindi che  $u$  venga detta *conduttanza termica globale* (reciproco della resistenza termica).

Attenzione a non confondere la conduttanza globale con l'energia interna, che verrà introdotta in seguito. Pur avendo lo stesso simbolo  $u$ , le due grandezze non hanno nulla a comune.

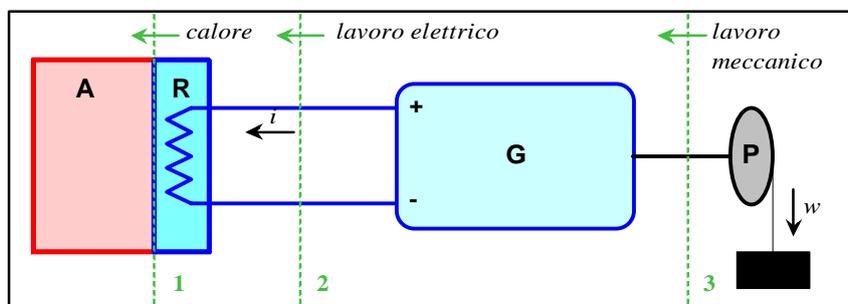
Talvolta si fa riferimento anche al *flusso termico*, ovvero il calore scambiato per unità di superficie  $[W/m^2]$ , espresso da

$$q'' = u (T_2 - T_1) \quad (1.28)$$

Ovviamente, nella tecnica dello scambio termico, si ha interesse ad aumentare quanto possibile il valore del coefficiente globale di scambio: questo consente di scambiare una quantità di calore maggiore a parità di superficie e differenza di temperatura. Fanno ovviamente eccezione i casi in cui si debbano impedire le fughe di calore da un corpo (*isolamento termico*), in cui  $u$  deve assumere i valori più bassi possibile.

Lo scambio di energia può assumere forme radicalmente diverse al variare del confine assunto per il sistema, vedi Fig.7. In essa è rappresentato un contenitore A pieno di acqua, riscaldata da una resistenza R connessa ad un generatore elettrico G che a sua volta è azionato da un peso che cade tramite la puleggia P. Gli organi intermedi R e G sono a regime. Supponendo che il generatore abbia rendimento elettrico unitario, la stessa quantità di energia

fluisce come lavoro meccanico attraverso il confine 3, come lavoro elettrico attraverso il confine 2 e infine come calore attraverso il confine 1. Se poi si considera come sistema l'insieme di tutti gli organi descritti (il contorno è allora il bordo della figura), esso non scambia alcuna forma di energia con l'ambiente, ma al suo interno energia potenziale si converte in energia termica.



**Figura 7:** L'energia fluisce in forme diverse a seconda del confine assunto per il sistema.

### Principio zero della termodinamica - Temperatura

Intuitivamente, il nostro concetto di *temperatura* è correlato alla sensazione di caldo o di freddo che riceviamo toccando un corpo. Tuttavia non siamo in grado di misurarla con precisione basandoci solo sui nostri sensi. Abbiamo già visto nel precedente paragrafo che due sistemi posti in contatto senza possibilità di scambiarsi lavoro evolvono verso uno stato comune di *equilibrio termico*. Ci chiediamo allora se esiste una proprietà di stato dei corpi, tale da metterci in grado di stabilire se due corpi sono o meno in equilibrio termico. Nel seguito, vedremo che tale proprietà esiste, la definiremo *temperatura* e stabiliremo come sia possibile costruire strumenti in grado di misurarla.

#### *Equilibrio termico*

*Siano A, B, C tre sistemi arbitrari. Poniamo A in contatto termico con C e aspettiamo che i due sistemi si portino in equilibrio termico. Dopodiché poniamo C in contatto con B e constatiamo che i due sistemi sono già in equilibrio termico. Questo comporterà anche che A e B (che non sono mai stati posti in contatto) sono in equilibrio termico tra loro.*

In altre parole, se due sistemi sono *separatamente* in equilibrio termico con un terzo sistema, sono anche in equilibrio termico tra loro.

L'affermazione appena fatta appare del tutto ovvia, e lo è a tal punto che solo nei primi anni del secolo ci si rese conto che essa aveva la dignità di un principio della fisica concettualmente precedente al primo e secondo principio della termodinamica, che erano già stati abbondantemente teorizzati. Per non cambiare di nome a questi ultimi, questo principio è stato denominato (Fowler, 1931) *principio zero della termodinamica*.

L'utilità del principio zero sta nel fatto che consente di poter definire il corpo C come un *termometro*, ovvero un apparato in base al quale stabilire se due sistemi sono in equilibrio termico o meno senza doverli porre in contatto termico. Si dirà allora che due corpi sono in equilibrio termico quando con un termometro misureremo lo stesso valore di una proprietà detta *temperatura*. La temperatura è una proprietà di stato.

### Termometri e temperatura

La temperatura è una grandezza fondamentale della fisica, ed è pertanto definita dalla sua stessa procedura di misura. Si possono costruire diversi tipi di termometri che sono tutti basati su sistemi di *misura indiretta*: invece della temperatura, si misura una *variabile termometrica* ad essa correlata (es. l'allungamento di una colonna di mercurio, la corrente in un particolare dispositivo elettronico, la pressione in un ampolla contenente gas ...).

Un primo esempio di rudimentale termometro, denominato barotermoscopio, fu descritto da G. Galilei nel 1592. Boyle e Mariotte perfezionarono il termometro a gas attorno al 1660 sviluppando una precedente idea di Amontons. Infine, Fahrenheit inventò il termometro a mercurio nel 1714. Recentemente, col progredire dell'elettronica, si sono resi disponibili a basso costo vari dispositivi di misura di precisione anche molto elevata, quali termocoppie, termistori, termoresistenze.

Bisognerà quindi accertarsi che la relazione tra la variabile termometrica e la temperatura sia *biunivoca*, ovvero che ad un valore della prima corrisponda uno ed un sol valore della seconda, e viceversa). Successivamente, questi termometri andranno *tarati*, ossia messi in condizione di dare tutti la stessa indicazione se posti in contatto con lo stesso corpo.

A titolo di esempio, in Appendice 1 si riportano alcuni cenni sulla taratura del termometro a gas, che rappresenta a tutt'oggi il dispositivo di misura di riferimento e il più preciso, anche se di uso poco pratico. La taratura viene effettuata utilizzando i cosiddetti *punti fissi*, ovvero sistemi di cui è definita esattamente (per convenzione internazionale) la temperatura: alcuni esempi sono riportati in tabelle 1 e 2.

Punto fisso	$T$ (K)	$T$ (°C)	$T$ (°R)	$T$ (°F)
Zero assoluto	0	-273.15	0	-459.67
Punto di solidificazione dell'acqua a $p=101.325$ kPa (1 atm)	273.15	0	491.67	32
Punto triplo dell'acqua	273.16	0.01	491.69	32.02
Punto di ebolliz. dell'acqua a $p=101.325$ kPa (1 atm)	373.15	100	671.67	212

**Tabella 1:** Corrispondenza tra scale di temperatura.

Lord Kelvin (1824-1907) si rese conto che sarebbe stato opportuno disporre, almeno dal punto di vista concettuale, di una scala di temperatura *indipendente dalle proprietà di ogni sostanza*. Vedremo in seguito come, sulla base del secondo principio della termodinamica, egli riuscì a definire una scala di temperature aventi tali caratteristiche, detta *scala termodinamica*. Dal punto di vista pratico, questo non porta alcuna complicazione poiché i valori di temperatura misurati col termometro a gas perfetto (e quindi con ogni altro dispositivo empirico ben tarato) sono *perfettamente coincidenti* con i valori della scala termodinamica.

Accanto alla scala assoluta di temperatura (vale a dire quella del termometro a gas) sopravvivono alcune scale pratiche adottate storicamente in passato: la scala Celsius (detta anche impropriamente centigrada), la scala Fahrenheit, la scala Rankine. Sia la scala Celsius

che quella Kelvin dividono l'intervallo di temperatura tra il punto di fusione del ghiaccio e quello di ebollizione dell'acqua in 100 parti: conseguentemente, il grado Celsius e quello Kelvin hanno la stessa ampiezza e *le differenze di temperatura hanno lo stesso valore misurate in entrambe le scale*. Le scale Rankine e Fahrenheit dividono lo stesso intervallo in 180 parti. La tabella 1 riporta i valori di temperatura delle varie scale in corrispondenza di alcuni punti fissi.

### **Scala internazionale pratica di temperatura**

L'uso del termometro campione a gas, per la sua complessità, è limitato ai laboratori specializzati. Si sono quindi misurate le temperature di punti fissi facilmente riproducibili (in genere, punti di fusione o ebollizione di sostanze a pressione atmosferica) allo scopo di consentire tramite essi la taratura dei termometri di uso pratico.

L'insieme di tali punti e le regole che definiscono la interpolazione tra un punto e l'altro costituiscono la scala internazionale pratica di temperatura. Tale scala viene periodicamente sottoposta a revisione ed aggiornamento da parte della Conferenza Internazionale di Pesi e Misure. A titolo di esempio, si riportano alcuni punti della scala nella tabella 2.

<b>Punto fisso</b>	<b>T (K)</b>
Punto triplo dell'idrogeno	13.81
Punto di ebollizione dell'idrogeno a $p=33,3306$ kPa	17.042
Punto di ebollizione dell'ossigeno a $p=101.325$ kPa (1 atm)	90.188
Punto triplo dell'acqua	273.16
Punto di ebollizione dell'acqua a $p=101.325$ kPa (1 atm)	373.15
Punto di solidificazione dello zinco a $p=101.325$ kPa (1 atm)	692.73
Punto di solidificazione dell'oro a $p=101.325$ kPa (1 atm)	1337.58

**Tabella 2:** Alcuni valori della Scala Internazionale di Temperatura.

### **Primo principio della termodinamica. Energia interna**

Il primo principio della termodinamica può essere enunciato nella maniera seguente:

*In un sistema chiuso che compie una trasformazione ciclica la quantità di calore scambiata tra sistema ed esterno è uguale alla quantità di lavoro netto scambiato.*

Ovvero, in termini matematici

$$\oint dQ - dL = 0 \quad (1.29)$$

Il primo principio stabilisce in definitiva *l'equivalenza tra lavoro e calore*.

Il primo principio fu enunciato da James P. Joule (1818-1889) a Manchester nel 1849, e venne originariamente pubblicato nella cronaca del giornale locale. Come molti dei fondatori della termodinamica, Joule non aveva laurea né formazione accademica.

Si vede dalla precedente espressione che la quantità  $dQ - dL$  è una proprietà di stato (in quanto il suo integrale su un percorso chiuso qualunque è nullo) a cui si dà il nome di *energia totale*:

$$dQ - dL = dU_t \quad (1.30)$$

ovvero, per unità di massa

$$dq - dl = du_t \quad (1.31)$$

Dalla meccanica sappiamo che due contributi all'energia totale derivano dall'energia cinetica e potenziale del sistema, che (per unità di massa) sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} de_c &= \frac{1}{2} dw^2 = w dw \\ de_p &= g dz \end{aligned} \quad (1.32)$$

Essendo l'energia totale una proprietà estensiva (e quindi additiva) del sistema, potremo esprimerla come somma di tre contributi:

$$du_t = de_c + de_p + du \quad (1.33)$$

Il terzo contributo ( $du$ ) viene detto *energia interna* del sistema. Esso rappresenta una novità rispetto alla meccanica e può essere interpretato fisicamente come la somma delle energie cinetiche delle singole molecole, dovuta all'agitazione termica.

Il primo principio della termodinamica non è altro che il principio di conservazione dell'energia in una forma più generale di quello incontrato in meccanica. Possiamo renderci conto di ciò annullando i termini di scambio termico e variazione di energia interna (non considerati in meccanica) nella Eq.(1.31) ottenendo così

$$-dl = de_c + de_p \quad (1.34)$$

ovvero, appunto il *principio di conservazione dell'energia meccanica* (il segno negativo deriva dalla convenzione termodinamica sul lavoro scambiato).

In genere i contributi dovuti all'energia cinetica e potenziale (detti anche *termini macroscopici*) sono di entità molto minore rispetto all'energia interna. Trascurandoli, si ottiene una formulazione del primo principio che useremo abbastanza di frequente:

$$dq - dl = du \quad (1.35)$$

Ci si può rendere conto che i termini macroscopici sono in genere trascurabili con il seguente ragionamento: per riscaldare 1 kg di acqua di 10 K, occorrono circa 42 kJ. Con la stessa quantità di energia, è possibile sollevare quello stesso chilogrammo di acqua da 0 a 4280 m, oppure accelerarlo da condizioni di quiete fino alla velocità di 250 km/h. La verifica è lasciata per esercizio all'allievo.

In tutto il paragrafo non si è minimamente accennato alla reversibilità o meno delle trasformazioni: *il primo principio rimane valido per ogni trasformazione, sia essa reversibile o no.*

Da notare che l'energia interna (come ogni altra proprietà di stato) risulta definita a meno di una costante arbitraria: definiremo tale costante di volta in volta, ma trattando quasi sempre *variazioni di energia*, questo sarà raramente necessario.

## Entalpia

Risulta utile definire una nuova variabile, detta *entalpia*, che ci sarà molto utile successivamente nello studio di particolari trasformazioni:

$$H=U+pV \quad (1.36)$$

ed anche, per unità di massa

$$h=u+pv \quad (1.37)$$

L'entalpia, essendo una combinazione di funzioni di stato, è essa stessa *una funzione di stato*. Ha le stesse dimensioni dell'energia e la sua unità SI è pertanto il *joule* ([J/kg] per l'entalpia specifica).

Il nome *entalpia* deriva dal greco "calore interno" e fu coniato dall'olandese Kamerlingh-Onnes intorno al 1930.

### Cenni al secondo principio della termodinamica

Nel seguito, il secondo principio della termodinamica verrà trattato preliminarmente al solo scopo di dare una definizione rigorosa dell'entropia. In una successiva sezione del corso, torneremo su di esso per enunciarlo in forme diverse ed illustrarne altre importanti conseguenze sul modo di operare delle macchine termiche. Enunceremo pertanto il secondo principio nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{rev} \frac{dQ}{T} = 0 \text{ per trasformazioni reversibili} \\ \oint_{irr} \frac{dQ}{T} < 0 \text{ per trasformazioni irreversibili} \end{array} \right. \quad (1.38)$$

Dove  $dQ$  rappresenta la quantità di calore scambiata dal sistema e  $T$  la temperatura della superficie del sistema nel punto in cui avviene lo scambio. L'integrale a primo membro viene detto *integrale di Clausius* (da Rudolf Clausius, 1822-1888).

Una prima importante conseguenza del secondo principio della termodinamica è che esiste una classe di trasformazioni (quelle per cui l'integrale di Clausius assume valore positivo) che, anche se non violano il primo principio della termodinamica, *non possono ugualmente mai avvenire*. Torneremo su questo in una successiva parte del corso, quando parleremo più estesamente delle implicazioni del secondo principio.

La seconda conseguenza è che nelle trasformazioni reversibili la quantità  $dQ_{rev}/T$ , è *una funzione di stato*, dato che il valore del suo integrale è nullo su qualunque ciclo. Notare che abbiamo aggiunto il suffisso *rev* al calore scambiato per ricordare che ci riferiamo solo a trasformazioni reversibili. A tale funzione di stato Clausius dette il nome di *entropia*:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \quad (1.39)$$

e per unità di massa

$$ds = \frac{dq_{rev}}{T} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (1.40)$$

L'entropia ha un significato fisico molto meno intuibile di quello della energia interna: si dice spesso, sulla base di considerazioni derivate dalla meccanica statistica, che l'entropia di un sistema è tanto maggiore quanto maggiore è il suo stato di "disordine". Entropia e disordine sono anche diventati sinonimi in un certo tipo di linguaggio. Tuttavia la definizione scientifica di "disordine" richiederebbe un livello di approfondimento non opportuno in questa sede.

La formulazione del secondo principio qui data può apparire ostica e di difficile interpretazione fisica. Cerchiamo quindi di chiarire il significato dell'integrale di Clausius con un esempio.

#### **ESEMPIO 1.4**

Una barra metallica cilindrica ha le due basi mantenute a temperatura  $T_a$  e  $T_b < T_a$ . Il sistema si trova in condizioni stazionarie. La superficie laterale della barra è adiabatica. Determinare il verso degli scambi di calore.

Dato che il sistema è in condizioni stazionarie ( $dU = 0$ ) ed è da escludersi ogni forma di scambio di lavoro ( $dL = 0$ ) perché la superficie del sistema è rigida, detti  $Q_a$  e  $Q_b$  i calori scambiati attraverso le facce a e b, il primo principio fornisce

$$Q_a + Q_b = 0$$

ovvero

$$Q_a = -Q_b$$

in altri termini, il primo principio ci dice solo che gli scambi di calore hanno verso opposto, senza precisare quale dei due sia positivo e quale negativo.

L'integrale di Clausius si riduce alla forma

$$\frac{Q_a}{T_a} + \frac{Q_b}{T_b} < 0$$

Dato che  $T_b < T_a$ , questo implica che  $Q_b < 0$ . In altri termini, in assenza di altre azioni esterne, il calore entra dalla faccia a ed esce dalla faccia b, e l'opposto è impossibile perché l'integrale di Clausius sarebbe maggiore di zero. L'esperienza comune ci dice infatti che il calore fluisce *spontaneamente* nella barretta dalle zone calde a quelle fredde.

□

#### **Legame tra entropia e calore scambiato**

E' indispensabile ricordare sempre che l'entropia è una funzione di stato: *pertanto il suo integrale su una trasformazione ciclica è comunque nullo, indipendentemente dal fatto che la trasformazione considerata sia reversibile o meno.*

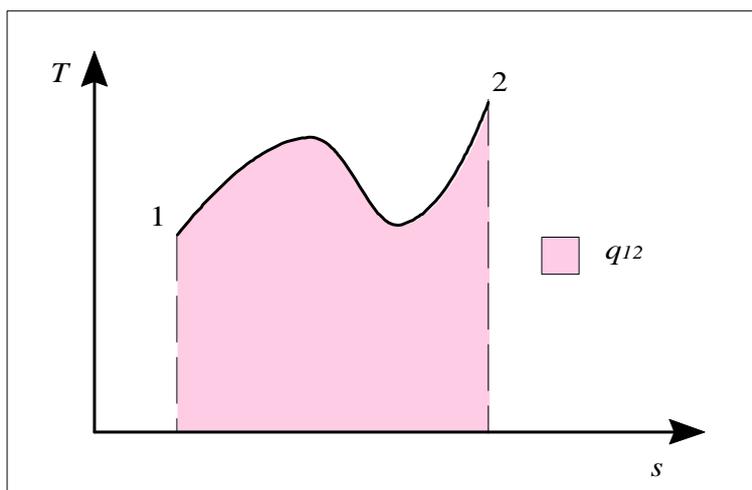
Se la trasformazione è reversibile, il calore scambiato è dato da:

$$dQ_{rev} = TdS \quad (1.41)$$

Questo ha come conseguenza una interpretazione grafica del calore scambiato durante una trasformazione reversibile: il calore scambiato *reversibilmente* sarà rappresentato dall'area sottesa dalla trasformazione nel diagramma  $T$ - $S$  (vedi Fig. 8). Notare l'analogia con la rappresentazione del lavoro di dilatazione scambiato reversibilmente sul diagramma  $p$ - $V$ .

Se invece la trasformazione è irreversibile, si può dimostrare (vedi App.2) che (attenzione al segno della disuguaglianza)

$$dQ_{irr} < TdS \quad , \quad dS > \frac{dQ_{irr}}{T} \quad (1.42)$$



**Figura 8:** Interpretazione grafica del calore scambiato reversibilmente sul diagramma  $T - s$ .

Dato che è più comodo avere a che fare con delle uguaglianze piuttosto che con disuguaglianze, le due espressioni precedenti possono essere compattate nella forma:

$$dS = \frac{dQ}{T} + dS_s \quad (1.43)$$

Dove il termine  $dS_s$ , viene definito in varie maniere nei testi di termodinamica: *sorgente entropica, termine di irreversibilità*.

Ovviamente si ha

$$\begin{aligned} dS_s &= 0 && \text{per trasformazioni reversibili} \\ dS_s &> 0 && \text{per trasformazioni irreversibili} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Il lettore a questo punto potrebbe essere confuso dalla moltitudine di relazioni e segni di disuguaglianza riguardo all'entropia. Per riepilogare e fissare le idee, è opportuno riflettere sui seguenti concetti:

1. L'entropia è una funzione di stato, al pari di volume, temperatura, energia interna etc. Il suo integrale su una trasformazione ciclica è quindi *comunque nullo*.
2. La funzione  $dQ/T$  *non* è sempre una funzione di stato; lo è solo se il calore viene scambiato *reversibilmente*. Il suo integrale su una trasformazione ciclica è detto integrale di Clausius ed è dato dalla Eq.(1.38).
3. La quantità  $dS_s$  *non* è una *proprietà termodinamica* e non va confusa con la variazione di entropia, anche se in casi particolari può coincidere con essa.
4. La relazione fondamentale tra entropia e calore scambiato è in ogni caso la Eq.(1.43).

### **Entropia e trasformazioni adiabatiche**

Dalla Eq.(1.43) discende che in una trasformazione *adiabatica* (vale a dire in una trasformazione in cui il calore scambiato è per definizione nullo,  $dQ=0$ ) si ha  $dS=dS_s$  e quindi

$$\begin{aligned} dS &= 0 && \text{per trasformazioni reversibili} \\ dS &> 0 && \text{per trasformazioni irreversibili} \end{aligned} \quad (1.45)$$

e quindi l'entropia tende sempre a crescere all'interno di un sistema adiabatico. Quando essa raggiunge un massimo, nessuna ulteriore trasformazione può avvenire ed il sistema rimane indefinitamente in tale stato.

Si rimarca che quanto detto vale *solo per sistemi adiabatici*: se un sistema cede una quantità sufficiente di calore all'esterno, la sua entropia può diminuire anche in presenza di trasformazioni irreversibili: basta (vedi Eq. 1.43) che il termine  $dQ/T$  (che è negativo, dato che il calore è ceduto) sia in valore assoluto superiore a  $dS_s$ .

Dato che un sistema isolato è anche adiabatico, queste considerazioni portarono R. Clausius a formulare in maniera sintetica, in una nota del 1865, i due principi della termodinamica nel modo seguente

- *L'energia di un sistema isolato è costante.*
- *L'entropia di un sistema isolato è crescente.*

In realtà Clausius (esagerando un poco) parlò di *universo* anziché di *sistema isolato*. Nell'opinione di alcuni, tra cui chi scrive, sappiamo ancora troppo poco sulla struttura dell'universo per poter ritenere i due principi validi su tale scala. Questo tuttavia non toglie valore alla fulminante sintesi dell'enunciato, che suscitò una vivissima impressione tra i fisici del tempo.

### Legami tra funzioni di stato

Abbiamo già detto più volte come, nei casi che prendiamo in considerazione (sistemi bivarianti), in genere una volta assegnato il valore a due funzioni di stato anche le rimanenti assumono un valore definito. Nel presente paragrafo affrontiamo il problema di determinare la variazione di una funzione di stato nota quella di altre due.

La rilevanza pratica di quanto verrà esposto sta nel fatto che abbiamo la possibilità di misurare *direttamente* (con strumenti) solo tre proprietà: pressione, temperatura e volume. Le rimanenti devono pertanto essere determinate a partire da queste tre.

A rigore, date arbitrariamente due funzioni di stato indipendenti, è possibile costruire per una terza una relazione del tipo dell'Eq.(6). Si possono così ottenere un gran numero di relazioni, tra le quali prenderemo in considerazione solo le più rilevanti ai fini pratici.

#### *Legame tra volume, pressione, e temperatura*

Il legame tra variazioni di volume, temperatura e pressione si esprime spesso nella forma

$$\frac{dv}{v} = \beta dT - \kappa dp \quad (1.46)$$

dove

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (1.47)$$

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

Il coefficiente  $\beta$  è detto *coefficiente di dilatazione isobara*, in quanto rappresenta la variazione di volume dovuta a quella di temperatura a pressione costante (ciò che ordinariamente viene detto dilatazione termica);  $\beta$  è generalmente maggiore di zero, ovvero le sostanze aumentano di volume al crescere della temperatura, con alcune rimarchevoli eccezioni (es. l'acqua ad 1 bar tra 0 e 4 °C).

Il coefficiente  $\kappa$  è detto invece *coefficiente di comprimibilità isoterma* e rappresenta la variazione di volume dovuta alle variazioni di pressione a temperatura costante (ovvero, la comprimibilità meccanica del corpo). Dato che, per ragioni di stabilità meccanica, ogni corpo deve contrarsi a seguito di un aumento della pressione esterna,  $\kappa$  è sempre maggiore di zero.

Notare che  $\beta$  e  $\kappa$ , come gli altri coefficienti termodinamici che introdurremo in seguito, non sono in generale costanti ma variano al variare, ad es., di temperatura e pressione. La Tab.3 riporta i valori di tali coefficienti per l'acqua a pressione atmosferica.

Temperatura, °C	$\beta, K^{-1}$	$\kappa, Pa^{-1}$
0	$-68.14 \times 10^{-6}$	$50.89 \times 10^{-11}$
10	$87.90 \times 10^{-6}$	$47.81 \times 10^{-11}$
20	$206.6 \times 10^{-6}$	$45.90 \times 10^{-11}$
30	$303.1 \times 10^{-6}$	$44.77 \times 10^{-11}$
40	$385.4 \times 10^{-6}$	$44.24 \times 10^{-11}$
50	$457.8 \times 10^{-6}$	$44.18 \times 10^{-11}$
60	$523.4 \times 10^{-6}$	$44.32 \times 10^{-11}$
70	$585.3 \times 10^{-6}$	$44.97 \times 10^{-11}$

**Tabella 3:** coefficienti  $\beta$  e  $\kappa$  per l'acqua a pressione  $p = 1$  bar.

**ESEMPIO 1.5 - Dilatazione termica del liquido in un impianto di riscaldamento**

Un impianto di riscaldamento domestico contiene un volume  $V = 50$  L di acqua alla pressione  $p_1=1$  bar e alla temperatura iniziale  $T_1=20$  °C. Il sistema è dotato di un vaso di espansione, in contatto con l'atmosfera, che fa sì che la pressione al suo interno si mantenga costante, e viene riscaldato fino alla temperatura finale di esercizio  $T_2 = 70$  °C. Sapendo che per l'acqua  $\beta = 400 \times 10^{-6} K^{-1}$ , (che si può considerare un valore medio nell'intervallo considerato) trovare l'incremento di volume dell'acqua.

Applicando la Eq.(1.46), tenuto conto che  $dp=0$ , si ha

$$\frac{dv}{v} = \beta dT$$

Ovvero anche, moltiplicando numeratore e denominatore per la massa del sistema

$$\frac{dV}{V} = \beta dT$$

Integrando tra i due stati estremi, supponendo,  $\beta = cost$  nell'intervallo di integrazione

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \beta (T_2 - T_1)$$

Dato che ipotizziamo che le variazioni di volume siano piccole, si può considerare il rapporto  $V_2/V_1 \cong 1$  e quindi, approssimando  $\ln(1+x) \cong x$  (la verifica è lasciata al lettore)

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \beta(T_2 - T_1)$$

da cui infine

$$V_2 - V_1 = V_1 \beta (T_2 - T_1) = 50 \cdot 400 \cdot 10^{-6} (70 - 20) = 1.0 \text{ L}$$

Dalla Tab.3, si nota che in effetti  $\beta$  varia fortemente nell'intervallo di temperature considerato. Una valutazione più accurata si può avere dividendo l'integrale in 5 intervalli di 10 °C ciascuno entro i quali assumere i valori di  $\beta$  più accurati: la sua esecuzione è lasciata per esercizio al lettore.

□

### **Relazione tra energia interna, temperatura e volume**

La relazione tra energia interna, temperatura e volume si esprime in genere nella forma

$$du = c_v dT + B_u dv \quad (1.48)$$

dove

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (1.49)$$

$$B_u = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$$

$c_v$  è detto *calore specifico a volume costante*, ed il significato di tale nome è spiegato dal seguente esempio. Il coefficiente  $B_u$  non ha molta importanza per i nostri scopi.

### **ESEMPIO 1.6 - Riscaldamento a volume costante**

Un recipiente rigido contiene una massa  $M = 5 \text{ kg}$  di azoto alla pressione iniziale  $p_1 = 2 \text{ bar}$  e alla temperatura iniziale  $T_1 = 20 \text{ °C}$ . Il sistema viene riscaldato a volume costante con una quantità di calore  $Q_{12} = 5000 \text{ J}$ . Sapendo che per l'azoto  $c_v = 743 \text{ J/kg K}$ , trovare l'incremento di temperatura del gas.

Dato che le pareti del sistema sono rigide, il lavoro scambiato nella trasformazione è nullo. Il primo principio si riduce pertanto a

$$du = dq$$

e tenendo conto della Eq.(1.48), considerando anche che  $dv = 0$

$$c_v dT = dq$$

da cui si vede che  $c_v$  può essere interpretato fisicamente come il rapporto tra il calore fornito a volume costante ed il corrispondente incremento di temperatura.

Integrando tra i due stati estremi, supponendo  $c_v = \text{cost}$  nell'intervallo di integrazione

$$c_v (T_2 - T_1) = q_{12}$$

e moltiplicando entrambi i membri per la massa del sistema

$$M c_v (T_2 - T_1) = Q_{12}$$

da cui infine

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_{12}}{M c_p} = \frac{5000}{5 \cdot 743} = 1.35 \text{ K}$$

□

### **Relazione tra entalpia, temperatura e pressione**

La relazione tra entalpia, temperatura e pressione si esprime in genere nella forma

$$dh = c_p dT + B_h dp \quad (1.50)$$

dove

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] \quad (1.51)$$

$$B_h = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg Pa}} \right]$$

Da notare che tale relazione cade in difetto nel caso che il nostro sistema sia una sostanza bifase: come vedremo in seguito, in tal caso pressione e temperatura *non sono variabili indipendenti*.

$c_p$  è detto *calore specifico a pressione costante*, ed il significato di tale nome è spiegato dal seguente esempio. Anche il coefficiente  $B_h$ , come  $B_u$ , non ha molta importanza per i nostri scopi.

### **ESEMPIO 1.7 - Riscaldamento a pressione costante**

Un recipiente contiene una massa  $M = 5 \text{ kg}$  di azoto alla pressione iniziale  $p_i = 2 \text{ bar}$  e alla temperatura iniziale  $T_i = 20 \text{ °C}$ . Il sistema viene riscaldato a pressione costante con una quantità di calore  $Q_{12} = 5000 \text{ J}$ . Sapendo che per l'azoto  $c_p = 1040 \text{ J/kg K}$ , trovare l'incremento di temperatura del gas.

Supponendo che la trasformazione sia reversibile e che l'unica forma di scambio di lavoro sia il lavoro di dilatazione, possiamo scrivere il primo principio come

$$du = dq - p dv$$

ovvero

$$du + p dv = dq$$

possiamo sommare al primo membro il prodotto  $v dp$ , che, essendo la pressione costante, è nullo, ottenendo

$$du + p dv + v dp = dq$$

$$d(u + p v) = dq$$

$$dh = dq$$

Tenendo conto della Eq.(1.50), considerando anche che  $dp = 0$

$$c_p dT = dq$$

da cui si vede che  $c_p$  può essere interpretato fisicamente come il rapporto tra il calore fornito a pressione costante ed il corrispondente incremento di temperatura.

Integrando tra i due stati estremi, supponendo  $c_p = \text{cost}$  nell'intervallo di integrazione

$$c_p (T_2 - T_1) = q_{12}$$

e moltiplicando entrambi i membri per la massa del sistema

$$M c_p (T_2 - T_1) = Q_{12}$$

da cui infine

$$T_2 - T_1 = \frac{Q_{12}}{M c_p} = \frac{5000}{5 \cdot 1040} = 0.96 \text{ K}$$

□

### **Relazioni di Gibbs (o del Tds)**

Riprendiamo l'espressione del primo principio per unità di massa, Eq.(1.35); ipotizzando le trasformazioni reversibili e il lavoro solo di dilatazione, possiamo sostituire

$$\begin{aligned} dl &= p dv \\ dq &= T ds \end{aligned} \quad (1.52)$$

Si ottiene quindi

$$du = T ds - p dv \quad (1.53)$$

ovvero

$$T ds = du + p dv \quad (1.54)$$

aggiungendo ad entrambi i membri il differenziale del prodotto  $pv$ , e ricordando la definizione di entalpia (Eq. 1.37), si ha inoltre

$$T ds = dh - v dp \quad (1.55)$$

le Eqq.(1.54) e (1.55) sono dette *equazioni del Tds o di Gibbs* (dal chimico-fisico americano J.W. Gibbs, 1839-1903) e permettono, ad esempio, di calcolare le variazioni di entropia note quelle di energia interna e di volume.

Spesso lo studente si chiede se le relazioni suddette, che sono state ottenute ipotizzando trasformazioni reversibili, sono valide anche nel caso di trasformazioni irreversibili: dato che esse esprimono variazioni di funzioni di stato, e queste sono indipendenti dal tipo di trasformazione, esse saranno applicabili ad ogni trasformazione, sia essa reversibile o meno. È importante notare anche che, come sempre, la loro validità è comunque ristretta al caso in cui gli stati iniziale e finale sono *stati di equilibrio*. Ad esempio, se il sistema è costituito inizialmente da due masse di acqua di diversa temperatura a contatto ma non mescolate, questo non è uno stato di equilibrio (dato che il sistema evolve *spontaneamente* fino a quando la temperatura non diviene uniforme) e le relazioni di Gibbs non sono applicabili nella forma sopra esposta.

Notare che dalla Eq.55 discende una definizione rigorosa di temperatura (una volta definite

entalpia ed entropia) ovvero  $T = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_p$

**Relazioni tra entropia, pressione, volume e temperatura.**

Combinando le Eqq.(1.48) e (1.54) si ottiene facilmente

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{B_u + p}{T} dv \quad (1.56)$$

ed in maniera analoga, combinando le (1.50) e (1.55)

$$ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{B_h - v}{T} dp \quad (1.57)$$

le relazioni suddette permettono di calcolare le variazioni di entropia note quelle di volume e temperatura o di pressione e temperatura.

**Legami tra i coefficienti termodinamici**

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto un certo numero di coefficienti (detti coefficienti termodinamici, es.  $c_p$ ,  $\beta$ ,  $B_h$  ...) che variano da sostanza a sostanza e la caratterizzano dal punto di vista termodinamico. Tali coefficienti devono essere determinati sperimentalmente. Sembrerebbe quindi che per caratterizzare una sostanza occorra fare un gran numero di esperimenti. Tuttavia le proprietà dei differenziali esatti ci vengono in aiuto: si può dimostrare che *tutti i coefficienti termodinamici sono esprimibili in funzione di tre soli*: in genere (seguendo un approccio dovuto originariamente a Bridgman, 1914) si fa riferimento a  $c_p$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ , che sono i più facili da determinare sperimentalmente. La Tab.4 riporta il legame tra i coefficienti termodinamici che abbiamo introdotto ed i tre fondamentali.

Coefficiente	Definizione	Legame con $c_p$ , $\beta$ , $\kappa$
$c_v$	$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$	$c_v = c_p - \frac{T\beta^2 v}{\kappa}$
$B_u$	$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T$	$B_u = \frac{\beta T}{\kappa} - p$
$B_h$	$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T$	$B_h = (1 - \beta T) v$

**Tabella 4:** Legame tra i coefficienti termodinamici.

## BIBLIOGRAFIA

Quasi tutti i testi di termodinamica riportano un'introduzione alle grandezze termodinamiche ed ai relativi principi. In particolare per approfondimenti si può consultare:

- Y.A. Cengel, Termodinamica e Trasmissione del Calore, McGraw-Hill, 1998, capp. 1, 3, 5, 6.
- J. Moran and H. Shapiro, Fundamentals of Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, capp. 1, 2, 5, 6.

Chi cercasse una introduzione razionale alle grandezze termodinamiche può consultare:

- E.P. Gyftopoulos, G.P. Beretta, Thermodynamics – Foundations and Applications, McMillan, NY, 1991, cap. 14.

Ed infine un'ottima introduzione, con cenni storici ai vari approcci, si trova su:

- A. Bejan, Advanced Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, 1988, capp. 1 e 2.

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 1.1

Identificare un sistema per lo studio dei processi indicati nel seguito, classificarlo in aperto o chiuso, a regime o meno, e determinare le sue interazioni con l'esterno (la risposta non è sempre univoca: lo scopo dell'esercizio è abituarsi a schematizzare varie configurazioni).

- Riscaldamento di una bombola di gas, con valvola chiusa;
- un estintore a CO<sub>2</sub> in funzione (valvola aperta);
- una pentola di acqua che bolle;
- una billetta di acciaio che viene temprata in un bagno d'olio;
- un frigorifero domestico in funzione;
- la turbina a vapore di un impianto termoelettrico a regime;
- un razzo dopo il lancio;
- il motore di aereo alla velocità di crociera.

### ESERCIZIO 1.2

Determinare la pressione assoluta su un batiscafo immerso in mare alla profondità di 4000 m. La densità dell'acqua marina è 1020 kg/m<sup>3</sup> e la pressione atmosferica sul livello del mare vale 980 hPa. [40.11 Mpa]

### ESERCIZIO 1.3

Il camino di una centrale termoelettrica deve trasportare una portata volumetrica  $G_V = 577$  m<sup>3</sup>/s di fumi. Supponendo che il camino sia circolare e di adottare un valore della velocità media del fluido di 15 m/s, calcolare il diametro del camino.

[7 m]

### ESERCIZIO 1.4

Dell'ossido nitroso, con calore specifico a volume costante  $c_v = 0,674$  kJ/Kg K fluisce con una velocità di 5 m/s e ad una temperatura di 120 °C in una tubazione posta a 120 m rispetto al livello del mare. Si valuti l'energia cinetica  $e_c$ , l'energia potenziale gravitazionale  $e_p$  e l'energia interna  $u$  di 1 kg di gas assumendo il mare come livello di riferimento per l'energia

potenziale gravitazionale e considerando nulla alla temperatura di 0 °C l'energia interna del gas.

$$[u = 80880 \text{ J/kg}; e_c = 12.5 \text{ J/kg}; e_p = 1177 \text{ J/kg}]$$

### **ESERCIZIO 1.5**

Un gas contenuto in un sistema chiuso cilindro pistone è inizialmente nelle condizioni  $p_1 = 4$  bar,  $V_1 = 0.15 \text{ m}^3$ . Esso si espande reversibilmente a pressione costante fino ad un volume  $V_2 = 0.36 \text{ m}^3$ . Calcolare il lavoro di dilatazione.

$$[L = 84 \text{ kJ}]$$

### **ESERCIZIO 1.6**

Ripetere il calcolo del precedente esercizio nella ipotesi che, a partire dalle stesse condizioni iniziali, l'espansione avvenga secondo la legge  $pV = \text{cost}$ .

$$[L = 52.5 \text{ kJ}]$$

### **ESERCIZIO 1.7**

Ripetere il calcolo del precedente esercizio nella ipotesi che, a partire dalle stesse condizioni iniziali, l'espansione avvenga secondo la legge  $pV^{1.4} = \text{cost}$ .

$$[L = 44.7 \text{ kJ}]$$

### **ESERCIZIO 1.8**

Tracciare su un diagramma  $p$ - $V$  le trasformazioni relative ai tre esercizi precedenti e giustificare graficamente che il lavoro maggiore si ottiene nella espansione isobara.

### **ESERCIZIO 1.9**

Una massa  $M = 1.5 \text{ kg}$  di fluido refrigerante è contenuta in un insieme pistone chiuso cilindro e viene compressa reversibilmente secondo la legge  $pv^n = \text{cost}$  dalle condizioni iniziali  $p_1 = 200 \text{ kPa}$ ,  $v_1 = 83.54 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$  allo stato finale  $p_2 = 1 \text{ MPa}$ ,  $v_2 = 21.34 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ . Determinare:

1. il volume iniziale e finale del contenitore;
2. il valore dell'esponente  $n$ ;
3. il lavoro compiuto.

$$[1. V_1 = 0.125 \text{ m}^3; V_2 = 0.032 \text{ m}^3; 2. n = 1.18; 3. L = -38.6 \text{ kJ}]$$

### **ESERCIZIO 1.10**

Un gas contenuto in un sistema chiuso cilindro pistone subisce le due trasformazioni seguenti:

- *Trasformazione 1-2*: espansione da  $p_1 = 300 \text{ kPa}$ ,  $v_1 = 0.019 \text{ m}^3/\text{kg}$  a  $p_2 = 150 \text{ kPa}$ , secondo la legge  $pv = \text{cost}$ .
- *Trasformazione 2-3*: compressione isobara fino al volume  $v_3 = v_1$ .

Tracciare la trasformazione sul piano  $p$ - $v$  e determinare il lavoro per unità di massa in tutto il processo.

$$[l = 1.1 \text{ kJ/kg}]$$

### **ESERCIZIO 1.11**

In un sistema chiuso pistone-cilindro una certa quantità di vapore subisce una trasformazione per effetto della quale la sua energia interna  $U$  aumenta di 800 kJ. Se il calore somministrato durante il processo è stato pari a 850 kJ, valutare l'entità del lavoro in gioco.

$$[L = 50 \text{ kJ}]$$

### ESERCIZIO 1.12

Un compressore (sistema aperto a regime) comprime reversibilmente un fluido dalle condizioni  $p_1 = 0.1$  MPa,  $v_1 = 1.5$  m<sup>3</sup>/kg alla pressione finale  $p_2 = 400$  kPa seguendo la legge  $pv = \text{cost}$ .

- Determinare il lavoro esterno netto per unità di massa necessario.
- Ripetere il calcolo nel caso che la trasformazione sia isovolumica ( $v = \text{cost}$ ).
- Tracciare nei due casi le trasformazioni sul piano  $p$ - $v$  ed individuare graficamente su di esso il lavoro compiuto nei due casi precedenti.

[a.  $l = -208$  kJ/kg; b.  $l = -450$  kJ/kg]

### ESERCIZIO 1.13

Un serbatoio chiuso, rigido ed adiabatico di volume  $V = 0.2$  m<sup>3</sup> contiene aria la cui densità iniziale è  $\rho = 1.2$  kg/m<sup>3</sup>. Un mulinello che assorbe 40 W viene azionato per 20 min all'interno del serbatoio. Determinare:

- il volume specifico finale dell'aria;
- la variazione di energia interna specifica dell'aria.

[1.  $v_2 = 0.83$  m<sup>3</sup>/kg (invariato rispetto allo stato iniziale); 2.  $\Delta u = 200$  kJ/kg]

### ESERCIZIO 1.14

Un gas in un insieme pistone-cilindro senza aperture subisce due trasformazioni reversibili in serie. La trasformazione 1-2 è isocora ed implica uno scambio di calore  $Q_{12} = 500$  kJ. La trasformazione 2-3 è isobara a  $p = 400$  kPa con uno scambio di calore  $Q_{23} = -450$  kJ. Sono noti i valori di energia interna allo stato iniziale e finale,  $U_1 = 1200$  kJ e  $U_3 = 3500$  kJ. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Nell'ipotesi che venga compiuto unicamente lavoro di dilatazione, trovare la variazione di volume tra lo stato iniziale e quello finale.

[ $\Delta V = -5.625$  m<sup>3</sup>]

### ESERCIZIO 1.15

Un motore elettrico lavora a regime assorbendo dalla rete una potenza elettrica  $W_{el} = 1.5$  kW. L'albero ha una coppia resistente  $M = 2$  kgf m e ruota ad un numero di giri  $n' = 500$  rpm. Determinare:

- il calore dissipato dal motore in un'ora di funzionamento;
- la temperatura della carcassa del motore  $T_c$ , se lo scambio termico con l'aria ambiente avviene secondo la legge  $W_t = hA (T_c - T_a)$  con  $hA = 5$  W/K e  $T_a = 20$  °C.

[1. 1.7 MJ; 2. 114 °C]

### ESERCIZIO 1.16

Un gas in un sistema chiuso pistone cilindro subisce un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni reversibili:

*Trasformazione 1-2:* compressione a  $pV = \text{cost}$  dalle condizioni  $p_1 = 1$  bar,  $V_1 = 1.5$  m<sup>3</sup>, fino alla pressione  $p_2 = 2$  bar.

*Trasformazione 2-3:* trasformazione isovolumica

*Trasformazione 3-1:* trasformazione adiabatica con  $L_{31} = 150$  kJ.

Determinare il calore scambiato totalmente nel ciclo.

[ $Q = 47$  kJ]

**ESERCIZIO 1.17** (adatto alla risoluzione tramite calcolatore)

Si misurano sperimentalmente i seguenti dati di pressione e volume durante l'espansione di un gas in un insieme pistone cilindro di un motore a combustione interna:

PUNTO	$p$ (bar)	$V$ (cm <sup>3</sup> )
1	20.0	454
2	16.1	540
3	12.2	668
4	9.9	780
5	6.0	1175
6	3.1	1980

- Stimare (integrando con la regola dei trapezi) il lavoro compiuto durante l'espansione.
- Le espansioni di questo genere di seguono generalmente la legge  $pV^n = \text{cost}$  (detta *politropica*). Tramite interpolazione, determinare il valore dell'esponente  $n$ , ripetere il calcolo del lavoro compiuto e confrontarlo con il precedente. (*Suggerimento*: determinare la pendenza della linea  $\log p - \log V$  tramite interpolazione lineare).

**ESERCIZIO 1.18**

Un sistema chiuso compie un ciclo termodinamico costituito da tre trasformazioni. Durante il primo processo il lavoro è 5 kJ e il calore scambiato è 23 kJ. Nella seconda trasformazione non vi è lavoro in gioco e il calore scambiato è -50 kJ. La terza trasformazione è adiabatica.

- Trovare la variazione di energia relativa ad ogni trasformazione
- Trovare il lavoro in gioco nelle terza trasformazione  
[a) 18 kJ, -50 kJ, 32 kJ; b)  $L_{31} = -32$  kJ]

## APPENDICI

### APPENDICE 1.1 *Misura di temperatura con il termometro a gas.*

Il termometro viene fatto operare facendo mantenere al gas un volume costante e misurando la pressione nel bulbo. Si constata sperimentalmente che le misure divengono ben ripetibili e *indipendenti dal tipo di gas adottato* quando la pressione nel bulbo scende sotto un valore limite. Si stabilisce inoltre *arbitrariamente* che la pressione nel bulbo è direttamente proporzionale alla temperatura misurata. Si definisce pertanto la temperatura come

$$T = a \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P}{P_0}$$

Dove  $a$  rappresenta il valore (arbitrario) che la temperatura assume in una condizione prefissata, facilmente ripetibile e caratterizzata da un valore univoco delle temperatura, detta *punto fisso*, a cui il gas del termometro ha una pressione  $p_0$ . Nel nostro caso si adotta come punto fisso il *punto triplo dell'acqua*, a cui si assegna, per motivi storici, il valore di temperatura di 273.16 K. Il limite ci ricorda che bisogna operare in condizioni di sufficiente rarefazione del gas.

Il punto triplo dell'acqua rappresenta una condizione (facilmente riproducibile) in cui acqua allo stato solido, liquido e vapore *coesistono in equilibrio ed in assenza di altri gas*. Tale condizione, come vedremo in seguito, è caratterizzata da un valore univoco della temperatura e della pressione.

Da notare che *a priori* avremmo potuto scegliere qualunque altra funzione matematica per legare la temperatura alla pressione: a posteriori, come vedremo, la scelta fatta si dimostrerà oculata.

La definizione *operativa* di temperatura risulta pertanto:

$$T = 273.16 \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P}{P_{TP}}$$

l'unità di misura SI della temperatura è il *kelvin* [K].

Il termometro a gas presenta alcune limitazioni, tra le quali il fatto che tutti i gas divengono liquidi sotto una certa temperatura, ed è quindi impossibile misurare con esso temperature inferiori ad 1 K.

**APPENDICE 1.2 Dimostrazione dell'Eq.(1.42).**

Dati due stati A e B arbitrari, consideriamo il ciclo termodinamico costituito dalle due trasformazioni seguenti (anche il percorso delle trasformazioni è arbitrario):

- trasformazione *irreversibile* AiB;
- trasformazione *reversibile* BrA.

Essendo il ciclo nel suo complesso irreversibile, l'integrale di Clausius dovrà essere negativo:

$$\oint_{AiBrA} \frac{dq}{T} < 0$$

Ovvero, dividendo l'integrale in due parti corrispondenti alla prima ed alla seconda delle trasformazioni ipotizzate:

$$\int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} + \int_{BrA} \frac{dq_{rev}}{T} < 0$$

invertendo il senso della trasformazione reversibile BrA si ha

$$\int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} - \int_{ArB} \frac{dq_{rev}}{T} < 0$$

ma per definizione

$$\int_{ArB} \frac{dq_{rev}}{T} = \int_A^B ds$$

per cui

$$\int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} - \int_A^B ds < 0 \Rightarrow \int_{AiB} \frac{dq_{irr}}{T} < \int_A^B ds$$

dato che i punti A e B sono del tutto arbitrari, la disequazione vale anche per gli integrandi. Si ha quindi infine

$$\boxed{ds > \frac{dq_{irr}}{T}}$$

**APPENDICE 1.3 Tabella riassuntiva delle principali grandezze introdotte e delle relative unità di misura.**

Proprietà	Simb.	Definizione	Unità SI	Altre unità tecniche
Volume	$V$	=	<i>metro cubo</i> [m <sup>3</sup> ]	
Temperatura	$T$	=	<i>kelvin</i> [K]	<i>celsius</i> [°C]: $T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$ <i>farhenheit</i> [°F]: $T(K) = [T(^{\circ}F) - 32] / 1.8 + 273.15$ <i>rankine</i> [°R]: $T(K) = T(^{\circ}R) / 1.8$
Massa	$M$	=	[kg]	1 lb = 0.4536 kg
Portata massica	$G$	=	[kg/s]	
Portata volumica	$G_V$	=	[m <sup>3</sup> /s]	
Volume specifico	$v$	$V/M$	[m <sup>3</sup> /kg]	
Pressione	$p$	$F_n/A$	<i>pascal</i> [Pa]	1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa 1 kg/cm <sup>2</sup> = 1 ata = = 98.0665 kPa 1 atm = 101.325 kPa 1 psi = 6894.76 Pa 1 mm Hg = 133.322 Pa 1 mm H <sub>2</sub> O = 9.80665 Pa
Lavoro	$L$	=	<i>joule</i> [J]	1 kcal = 4186.8 J 1 kgm = 9.80665 J 1 kWh = 3.6 x 10 <sup>6</sup> J 1 Btu = 1055.06 J
Calore	$Q$	=	<i>joule</i> [J]	<i>v. lavoro</i>
Energia interna	$U$	=	<i>joule</i> [J]	
Entalpia	$H$	$U + pV$	<i>joule</i> [J]	
Entropia	$S$	$dQ_{rev}/T$	[J/K]	
Energia interna specifica	$u$	$U/M$	[J/kg]	
Entalpia spec.	$h$	$H/M$	[J/kg]	
Entropia spec.	$s$	$S/M$	[J/kg K]	
Calore specifico a $v=cost$	$c_v$	$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$	[J/kg K]	
Calore specifico a $p=cost$	$c_p$	$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$	[J/kg K]	

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

## Cap. 2. Cenni sui meccanismi di trasmissione del calore

*Paolo Di Marco*

*Nicola Forgione*

Versione 2005.00 – 26.04.06.

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione

Nel capitolo 1 è stato introdotto il concetto di calore scambiato da un sistema. Il secondo principio della termodinamica asserisce, tra l'altro, che tale scambio avviene spontaneamente da un corpo a temperatura più alta ad uno a temperatura più bassa. La termodinamica tuttavia non ci dà nessuna ulteriore informazione: in particolare non spiega le modalità con cui tale scambio avviene, né determina il tempo necessario per lo scambio stesso. Tali problemi sono l'oggetto di una disciplina tecnica detta *Trasmissione del Calore*.

Lo scopo della Trasmissione del Calore è descrivere quantitativamente le modalità con cui la differenza di temperatura tra due corpi regola lo scambio di calore tra di essi. Queste conoscenze sono indispensabili per determinare il tempo in cui si compiono le trasformazioni termodinamiche: infatti in termodinamica lo scambio di calore e di lavoro dipende solo dalle trasformazioni del sistema e non dal tempo in cui il sistema evolve: a parità di trasformazioni, il calore ed il lavoro scambiati sono gli stessi sia che la evoluzione del sistema avvenga in un millisecondo che in un milione di anni. Le conoscenze di trasmissione del calore sono anche indispensabili per risolvere altri problemi tecnici: ad es. controllo di temperatura in impianti industriali, isolamento termico di macchinari ed edifici, raffreddamento efficiente delle macchine.

Una parte importante della trasmissione del calore riguarda lo studio dello scambio termico nella persona umana e delle condizioni ambientali per le quali l'uomo si trova in stato di benessere. Essa verrà trattata nel Cap.10.

E' necessario richiamare la definizione esatta di due grandezze che verranno usate nel seguito:

- *Flusso termico totale o potenza termica* (inglese: *heat rate* o *heat flow*) ( $W_T$  o  $\dot{Q}$ ): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo [W];
- *Flusso termico specifico o semplicemente flusso termico* (inglese: *heat flux*) ( $q''$ ): il calore trasmesso attraverso una superficie per unità di tempo e di superficie [W/m<sup>2</sup>].

## Modalità di scambio termico

Da un punto di vista tecnico, le modalità con cui il calore si trasmette possono essere raggruppate in tre categorie fondamentali:

- **Conduzione**: la trasmissione di calore nei corpi materiali, non associata a spostamento di materia. E' l'unica modalità di trasmissione del calore possibile all'interno dei solidi opachi (ovvero che non vengono attraversati da radiazioni elettromagnetiche).
- **Convezione**: la trasmissione di calore nei corpi materiali, associata a spostamento di materia. In genere, è il meccanismo di scambio termico predominante nei fluidi.
- **Irraggiamento**: la trasmissione di calore associata alla propagazione della radiazione elettromagnetica. E' l'unica modalità di trasferimento di calore possibile nel vuoto.

Ad esempio, il calore si trasmette per conduzione all'interno di una barra di ferro, o di una parete di una casa. Alla superficie di tali corpi, che sono in generale lambiti da un fluido (l'aria) lo scambio termico avviene principalmente per convezione. Il sole trasmette invece calore alla terra (e a noi stessi), attraverso lo spazio vuoto, per irraggiamento; ma riceviamo calore con tale modalità anche quando siamo di fronte ad un corpo molto caldo (un fuoco o la bocca di una fornace); basta tuttavia l'interposizione di uno schermo opaco per sopprimere tale trasferimento: non per nulla quando abbiamo caldo ci spostiamo all'ombra.

Dal punto di vista fisico, invece, le modalità fondamentali di scambio termico sono solo conduzione e irraggiamento, che avvengono secondo le leggi fisiche specifiche esposte nel seguito (postulato di Fourier, legge di Stefan-Boltzmann); la convezione è invece una modalità complessa di trasporto di energia, predicibile (in teoria) tramite le altre leggi fisiche, ma che non è regolata da alcuna legge fisica particolare.

La Tab.1 riassume le modalità di trasmissione del calore che sono possibili nei mezzi solidi, fluidi e nel vuoto.

	Conduzione	Convezione	Irraggiamento
Mezzi solidi	SI	NO	SI <i>se trasparenti</i>
Mezzi fluidi	SI	SI	SI <i>se trasparenti</i>
Vuoto	NO	NO	SI

**Tabella 1:** meccanismi di trasmissione del calore nei vari mezzi.

## La conduzione

La conduzione può essere pensata come trasferimento di energia a livello microscopico per interazione tra le particelle più energetiche (dotate di energia vibrazionale) a quelle meno energetiche. In regime monodimensionale, in cui la temperatura  $T$  è funzione della sola  $x$ , il flusso termico (calore trasmesso per unità di tempo e superficie) che attraversa una qualunque superficie perpendicolare all'asse  $x$  è dato dal postulato di Fourier, che per una lastra piana è esprimibile come:

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.1)$$

notare il segno meno, in accordo con il secondo principio della termodinamica (il calore fluisce verso le zone più fredde).

Nel caso di andamento tridimensionale di temperatura il flusso termico è un vettore (caratterizzato quindi da direzione e verso oltre che dal modulo) esprimibile come

$$\vec{q}'' = -k \text{ grad } T \quad (2.2)$$

Il fattore di proporzionalità  $k$  [W/m K] è detto conducibilità termica ed è una proprietà fisica della sostanza: le sostanze con alto valore di  $k$  sono buoni *conduttori termici* (ovvero trasmettono elevati flussi termici con piccoli gradienti di temperatura) e quelle con basso  $k$  sono detti *isolanti termici* e sono usati per coibentare termicamente le strutture. Il valore di  $k$  è in generale funzione della temperatura, ma tale dipendenza può essere trascurata nella maggior parte dei casi. Alcuni valori di  $k$  per i materiali più comuni sono riportati in Tab.2.

### *Analogia tra conduzione elettrica e termica*

La Eq.(2.2) presenta notevoli analogie con l'equazione della densità di corrente elettrica

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \text{ grad } V \quad (2.3)$$

entrambi i fenomeni sono infatti *fenomeni diffusivi*: la propagazione di una determinata quantità (calore o corrente nel nostro caso) è legata da una costante al gradiente della stessa

quantità o di un'altra (temperatura o potenziale nel caso in questione). In particolare è da notare l'analogia tra la conducibilità elettrica  $\sigma$  e la conducibilità termica  $k$ : così come i buoni conduttori elettrici (alto valore di  $\sigma$ ) consentono il passaggio di corrente con piccole differenze di potenziale, analogamente ci saranno buoni conduttori termici, caratterizzati da un alto valore di  $k$  che consentono il passaggio di calore con limitate differenze di temperatura. Al contrario, dovendo isolare termicamente un ambiente si ricorrerà ad isolanti termici (basso valore di  $k$ ) così come per l'isolamento elettrico si ricorre a materiali con basso valore di  $\sigma$ .

Generalmente i buoni conduttori elettrici, ovvero i metalli, sono anche buoni conduttori termici e viceversa. Fanno eccezione alcuni materiali ceramici ed il diamante, che hanno buona conducibilità termica ma bassa conducibilità elettrica, che si usano quindi per ottenere un buon isolamento elettrico senza pregiudicare lo smaltimento termico.

<b>Materiale</b>	$k$ [W/m K]
Diamante	2300
Rame	400
Alluminio	240
Acciaio al C	40 - 60
Acciaio inox	15
Nitrato di boro	15
Lana di vetro	0.04
Vetro	1 - 1.5
Mattoni	0.7
Acqua	0.6
Gas	0.02 - 0.2

**Tabella 2:** valori indicativi della conducibilità termica  $k$  per alcuni materiali.

### ***ESEMPIO 2.1 - Conduzione in una lastra piana***

Sia data una lastra piana di acciaio al C, di spessore  $s = 3$  cm e superficie  $A = 4$  m<sup>2</sup> (dato che l'altezza e la larghezza sono molto maggiori dello spessore, la temperatura si può considerare funzione della sola  $x$ ). La lastra si trova in condizioni stazionarie con le due superfici rispettivamente a  $T_1 = 300$  °C e  $T_2 = 25$  °C. Determinare il flusso termico totale attraverso la lastra stessa.

Non è difficile convincersi che il flusso termico totale attraverso una qualunque superficie della lastra parallela alle facce deve essere costante. Infatti ogni sistema delimitato da due qualunque di tali superfici è in condizioni stazionarie e quindi, dato che siamo in assenza di lavoro, la potenza termica che entra da destra deve essere uguale a quello che esce da sinistra, ovvero

$$-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_a} = -k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_b} \quad \forall x_a, x_b \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{cost} = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

dove si è sfruttato il fatto che in una lastra  $A$  non dipende da  $x$ . Conseguentemente (con  $k$  ricavato dalla Tab.2) si ha

$$W_T = -k A \frac{T_2 - T_1}{s} = 40 \cdot 4 \frac{300 - 25}{0.03} = 1.47 \text{ MW}$$

è da notare che il flusso termico totale è proporzionale alla differenza di temperatura tra le facce. Si può stabilire un'analogia tra una resistenza elettrica  $R$  ai cui capi ci sono le tensioni  $V_1$  e  $V_2$ , che è attraversata da una corrente  $I$  e la lastra in questione, ai cui capi ci sono le temperature  $T_1$  e  $T_2$ , che è attraversata da un flusso termico  $W_T$ . La "resistenza termica" si misura in [K/W] ed è data da

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{s}{kA}$$

□

### ***ESEMPIO 2.2 - Conduzione in una parete cilindrica***

Sia data una tubazione di rame, di spessore  $s = 1$  mm, diametro esterno  $D = 12$  mm e lunghezza  $L = 0.4$  m. Il tubo si trova in condizioni stazionarie con le due superfici rispettivamente a  $T_1 = 28$  °C e  $T_2 = 25$  °C. Determinare il flusso termico totale attraverso il tubo.

Se si trascura il calore uscente dai due estremi del tubo, non è difficile convincersi che il flusso termico totale attraverso una qualunque superficie cilindrica interna al tubo e coassiale alle facce deve essere costante. Infatti ogni sistema delimitato da due qualunque di tali superfici è in condizioni stazionarie, e quindi, dato che siamo in assenza di lavoro, il calore che entra da destra deve essere uguale a quello che esce da sinistra. E' da notare che, a differenza del caso della lastra piana, il fatto che  $W_T$  sia costante non implica che  $q''$  sia costante, perché le due superfici hanno area diversa. In termini matematici

$$W_T(r) = \text{cost} = W_T$$

$$q''(r) A(r) = W_T$$

$$2q''(r) \pi r L = W_T$$

$$r q''(r) = \frac{W_T}{2\pi L}$$

e sfruttando il postulato di Fourier  $q'' = -k dT/dr$

$$-rk \frac{dT}{dr} = \frac{W_T}{2\pi L}$$

in definitiva si ottiene un problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \frac{dT}{dr} = -\frac{W_T}{2\pi krL} \\ T(r_1) = T_1 \end{cases}$$

la cui soluzione vale

$$T(r) = T_1 - \frac{W_T}{2\pi kL} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

ovviamente il valore di  $W_T$  è ancora incognito, ma può essere determinato sfruttando la condizione non ancora utilizzata  $T(r_2) = T_2$

$$W_T = 2\pi kL \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

da cui, assunto  $k = 400 \text{ W/m K}$  (vedi tabella 2) si ha

$$W_T = 2\pi \cdot 400 \cdot 0.4 \frac{28 - 25}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)} = 16.5 \text{ kW}$$

in questo caso la resistenza termica (definita come nell'esempio della lastra piana), vale

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi kL} = \frac{r_2 - r_1}{kA_m}, \quad \text{dove}$$

$$A_m = 2\pi r_m L, \quad r_m = \frac{r_2 - r_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

molto spesso nelle tubazioni si fa riferimento al flusso termico per unità di lunghezza,  $q'$  [W/m], dato da

$$q' = \frac{W_T}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = 41.35 \text{ kW/m}$$

Se il materiale fosse stato vetro ( $k=1 \text{ W/m K}$ ) anziché rame il calore scambiato sarebbe stato circa 400 volte minore: la verifica è lasciata per esercizio all'allievo.

In definitiva, cosa distingue la conduzione in un guscio cilindrico da quella in una lastra piana? Il fatto che nel cilindro la superficie attraversata dal calore cresce con il raggio dello stesso, mentre nella lastra piana la superficie rimane costante. Ne segue che quando lo spessore della tubazione è piccolo rispetto al raggio, la variazione di superficie è trascurabile e si può utilizzare anche per i cilindri l'espressione più semplice valida per le lastre piane. Nella pratica, questo è del tutto accettabile per spessori minori di un decimo del raggio. L'allievo può verificare che, applicando l'espressione della lastra piana al caso in questione

(utilizzando il valore dell'area della superficie esterna della tubazione), si ottiene una potenza termica pari a 18.1 kW.



## L'irraggiamento

Nell'irraggiamento, il calore è trasportato dalle onde elettromagnetiche che tutti i corpi (solidi, liquidi o gassosi) emettono ed assorbono come risultato di cambiamenti nella configurazione elettronica degli atomi di cui sono composti.

La *radiazione elettromagnetica* può essere vista sotto il duplice aspetto di fenomeno *ondulatorio* (sistemi di campi elettromagnetici variabili che si propagano nello spazio) o *particellare* (propagazione di particelle, dette *fotoni*). Se si assume il modello ondulatorio, la radiazione elettromagnetica viene emessa in uno spettro continuo di lunghezze d'onda che vanno dalle onde radio (lunghezza d'onda da 10 km a 1 m) fino alla radiazione gamma (lunghezze d'onda di  $10^{-4}$  nm). Lo *spettro visibile* è quella sezione dello spettro elettromagnetico a cui è sensibile la retina dell'occhio umano (circa 400÷700 nm). Le lunghezze d'onda immediatamente al di sotto della finestra visibile sono dette raggi *infrarossi*; quelle immediatamente al di sopra *ultravioletti*.

La *radiazione termica* è localizzata principalmente nelle lunghezze d'onda dell'*infrarosso*. Nonostante ciò, se un corpo viene riscaldato a temperatura sufficiente, esso emette una frazione significativa di energia anche alle lunghezze d'onda dello spettro visibile (sole, filamento delle lampadine). Come già accennato, visto che le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto, questa è l'unica modalità di trasmissione di calore possibile nel vuoto stesso.

Oltre ad emettere radiazione, i corpi interagiscono con le radiazioni incidenti su di loro ed emesse dagli altri corpi circostanti. Vediamo le modalità di tali interazioni.

### *Radiazione incidente*

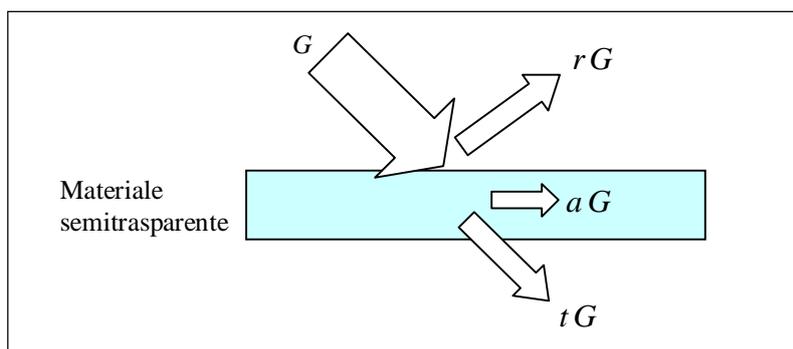
La radiazione incidente su di una superficie per unità di area e di tempo è detta *irradiazione* e si indica generalmente con  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]. Quando la radiazione incide su di una superficie parte di essa viene assorbita, parte riflessa e la restante parte, se c'è, viene trasmessa (v. Fig.1). La somma delle frazioni di radiazione assorbita ( $a \equiv G_{\text{ass}} / G$ ), riflessa ( $r \equiv G_{\text{rif}} / G$ ) e trasmessa ( $t \equiv G_{\text{tr}} / G$ ) è unitaria ( $a + r + t = 1$ ). Le tre frazioni prendono il nome di coefficiente di assorbimento ( $a$ ), riflessione o rinvio ( $r$ ) e trasparenza ( $t$ ). Nei *corpi opachi* il coefficiente di trasparenza è nullo, come avviene frequentemente per spessori modesti di materiali solidi. In questo caso la radiazione può essere solo assorbita e/o riflessa.

Quando in un corpo opaco si annulli anche il coefficiente di riflessione, il coefficiente di assorbimento è unitario; tutta la radiazione che colpisce il corpo viene assorbita: il corpo viene detto *corpo nero*.

I coefficienti di assorbimento e di rinvio possono variare con la lunghezza d'onda: questo rende ragione del diverso *colore* delle superfici: una superficie verde rinvia la maggior parte della radiazione verde incidente, mentre assorbe le radiazioni rosse e blu.

### *Radiazione emessa*

Benché si tratti di un'idealizzazione, mai perfettamente realizzata in natura, il corpo nero è un modello di riferimento per analizzare anche la potenza emessa per radiazione.



**Figura 1:** interazione della radiazione con un corpo materiale.

Un corpo nero infatti, oltre ad assorbire tutta la radiazione incidente, indipendentemente dalla lunghezza d'onda o dalla direzione, *emette* anche una potenza termica radiante per unità di area, detta *potere emissivo del corpo nero* ( $E_n$ ) data dalla *legge di Stefan-Boltzmann* (1879):

$$E_n = \sigma T^4 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.4)$$

dove  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$  è la *costante di Stefan-Boltzmann* e  $T$  la temperatura assoluta della superficie, in kelvin. Si può dimostrare che, data una certa temperatura, il corpo nero presenta la massima emissione per radiazione tra tutti i corpi. Un corpo non nero alla stessa temperatura presenta un potere emissivo:

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.5)$$

dove  $\varepsilon$  (epsilon) è un parametro caratteristico della superficie, detto *emissività*, il cui valore è compreso tra 0 ed 1. Il valore dell'emissività, come quello del coefficiente di assorbimento, dipende generalmente da vari fattori tra cui in particolare la lunghezza d'onda della radiazione emessa od assorbita. Per una particolare classe di corpi detti *corpi grigi*, il coefficiente di assorbimento  $a$  (e quindi anche la emissività) *sono indipendenti dalla lunghezza d'onda*.

Infine, la *legge di Kirchoff* asserisce (in forma semplificata) che per tutti i corpi si ha  $\varepsilon = a$ . In pratica questo vuol dire che i buoni assorbitori sono anche buoni emettitori e che le superfici opache possono essere caratterizzate tramite un unico parametro ovvero l'*emissività* (essendo per tali superfici  $\varepsilon = a$ ,  $t = 0$ ,  $r = 1 - \varepsilon$ ).

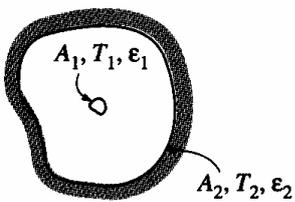
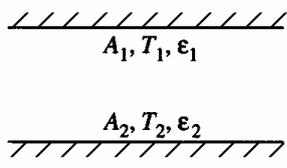
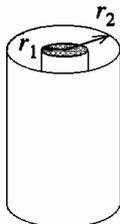
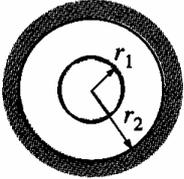
### **Scambio termico per irraggiamento**

Lo scambio netto di calore per irraggiamento tra due corpi è il risultato del bilancio tra la radiazione emessa dall'uno che viene assorbita dall'altro e viceversa; la sua determinazione coinvolge la valutazione dei *fattori di vista*, che dipendono puramente dalle proprietà geometriche delle superfici coinvolte, e la conoscenza delle caratteristiche di assorbimento e/o riflessione dei due corpi (proprietà radiative). Il fattore di vista tra una superficie  $i$  ed una superficie  $j$ ,  $F_{i \rightarrow j}$ , è la frazione della radiazione emessa dalla superficie  $i$  che incide direttamente sulla superficie  $j$ . I fattori di vista, per particolari geometrie, sono riportate in forma analitica in tabelle o in forma grafica.

Una volta introdotti i fattori di vista, nel caso di due corpi neri ( $i$  e  $j$ ) risulta immediato il calcolo della potenza termica *netta* trasmessa per irraggiamento, data dalla relazione:

$$W_T = F_{i \rightarrow j} A_i \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad [W] \quad (2.6)$$

I fattori di vista godono di alcune proprietà, tra cui in particolare quella di reciprocità per cui si ha  $A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$

<p>Piccolo oggetto in una grande cavità</p> 	$\frac{A_1}{A_2} \approx 0$ $F_{12} = 1$	$W_t = A_1 \sigma \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$
<p>Piastre parallele infinitamente larghe</p> 	$A_1 = A_2 = A$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$
<p>Cilindri concentrici infinitamente lunghi</p> 	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2}$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$
<p>Sfere concentriche</p> 	$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ $F_{12} = 1$	$W_t = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$

**Tabella 3:** potenza termica scambiata tra due superfici grigie diffondenti ed opache in alcune particolari configurazioni.

Nel caso di superfici non nere il calcolo risulta notevolmente più complesso a causa dei *rinvii*, ovvero dell'energia emessa dalle superfici che, per effetto della riflessione da parte delle altre superfici, torna a colpire la superficie di partenza (per i corpi neri questo problema non si pone in quanto essi hanno coefficiente di riflessione  $r$  nullo). Una classe di superfici non nere particolarmente utili nelle applicazioni pratiche sono le superfici *grigie* (proprietà radiative indipendenti dalla lunghezza d'onda), *diffondenti* (proprietà radiative indipendenti dalla direzione) ed *opache* ( $t = 0$ ). In Tab.3 sono riportate le formule per il calcolo della potenza termica scambiata tra due *superfici grigie, diffondenti ed opache* (è necessario che presentino *tutte* le caratteristiche suddette) in quattro differenti configurazioni geometriche.

Ci limiteremo nel seguito a considerare il caso semplice di un corpo relativamente piccolo a temperatura  $T_1$  contenuto in una grande cavità a temperatura  $T_2$  (es. il filamento di una lampadina contenuto in una stanza) il flusso termico scambiato per irraggiamento è dato da (v. Tab. 3):

$$W_T = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [\text{W}] \quad (2.7)$$

dove  $\varepsilon_1$  ed  $A_1$  sono riferiti alla superficie del corpo interno alla cavità. E' da notare che la legge di trasmissione del calore per irraggiamento non è lineare nella temperatura, e questo complica molto i relativi calcoli.

Si può ricondurre in forma approssimata la legge precedente ad una lineare

$$W_T = \alpha_R A_1 (T_1 - T_2) \quad , \quad \alpha_R = \varepsilon_1 \sigma (T_1 + T_2) (T_1^2 + T_2^2) \quad (2.8)$$

dove  $\alpha_R$  dipende ovviamente dalla temperatura. Nei casi più semplici, questa dipendenza può essere trascurata.

La *resistenza termica per irraggiamento* vale quindi (in questo caso semplificato)

$$R_T = \frac{1}{\alpha_R A_1} \quad (2.9)$$

In generale quando è presente convezione forzata, il calore trasmesso per irraggiamento è trascurabile per temperature delle superfici inferiori a 500 °C. In caso di modalità di convezione scarsamente efficienti, l'irraggiamento acquista importanza: ad esempio un normale termosifone domestico emette circa il 30% del calore per irraggiamento ed il rimanente 70% per convezione. In una stanza dalle pareti più fredde (es. perché esposta a nord), a parità di temperatura dell'aria, abbiamo più freddo a causa dell'irraggiamento tra il nostro corpo ed i muri.

### **ESEMPIO 2.3 - Irraggiamento**

Il filamento di una lampadina ha una superficie  $A = 15.7 \text{ mm}^2$  ed una emissività  $\varepsilon = 0.9$ . Esso è contenuto in un globo di vetro di superficie molto maggiore che si trova alla temperatura di 80 °C. Dentro il globo è stato fatto il vuoto. Determinare la potenza elettrica che è necessario fornire al filamento perché esso si mantenga alla temperatura di 2700 °C.

 *La soluzione è riportata nel file C2LAMP.XLS*

Non essendoci alcun mezzo fisico interposto tra il filamento ed il vetro, l'unica modalità di scambio termico possibile è l'irraggiamento. Essendo il filamento di superficie molto più piccola del suo contenitore, il problema si risolve con la equazione:

$$W_T = \varepsilon_f A_f \sigma (T_f^4 - T_v^4)$$

dove gli indici  $f$  e  $v$  si riferiscono rispettivamente al filo ed al vetro. Quindi

$$W_T = 0.91 \cdot 57 \cdot 10^{-6} \cdot 5.67 \times 10^{-8} (2973^4 - 353^4) = 63 \text{ W}$$

Notare che in questo caso è *indispensabile* esprimere le temperature in kelvin. Da rimarcare anche che il risultato è praticamente insensibile al valore della temperatura del vetro (a causa della presenza delle quarte potenze).  $\square$

## La convezione

La convezione (dal latino *conveho*, “trasporto insieme”) è la modalità di scambio termico che si ha alla superficie di un solido lambito da un fluido per l'effetto combinato della conduzione nel fluido e del trasporto di energia associato allo spostamento di materia, dovuto al moto del fluido stesso. E' da notare che perché si abbia convezione è *necessario che il fluido sia in moto*: nei fluidi in quiete la trasmissione del calore avviene per conduzione (ed irraggiamento se il fluido è trasparente).

Dal punto di vista pratico la convezione può essere classificata in

- *Convezione naturale*: quando il moto del fluido è dovuto alle differenze di densità indotte dalle differenze di temperatura (ad esempio, un fluido più caldo, essendo più leggero, tende generalmente a salire): è il caso ad esempio dell'acqua in una pentola posta sul fuoco, o dell'aria sull'asfalto caldo;
- *convezione forzata*: quando il moto relativo tra il fluido e la superficie è indotto dall'esterno tramite appositi organi (in genere, pompe o ventilatori);

ed, indipendentemente, anche in:

- *convezione interna*: quando il fluido scorre internamente ad un condotto (in genere una tubazione) in modo tale che la presenza della parete provoca effetti sul moto dell'intero fluido;
- *convezione esterna*: quando il fluido lambisce dall'esterno un oggetto (es. l'ala di un aereo, la pala di una turbina), ed, a sufficiente distanza da esso, non risente dell'influenza della parete stessa.

Inoltre la convezione, sia forzata che naturale, può essere *monofase* o *con cambio di fase*: quando il fluido cambia fase (evapora o condensa) a contatto della superficie.

Per calcolare il flusso termico trasmesso per convezione è necessario risolvere contemporaneamente le equazioni differenziali del moto (di Navier-Stokes) e del trasporto di energia nel fluido: un problema matematico formidabile, che a tutt'oggi è stato risolto solo in pochi casi semplici. Pertanto si ricorre generalmente a determinazioni sperimentali.

Il flusso termico per convezione è esprimibile mediante l'espressione *empirica* (anch'essa dovuta originariamente a Fourier, che sviluppò una precedente osservazione di Newton):

$$q'' = \alpha (T_s - T_r) \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.10)$$

dove  $T_s$  rappresenta la temperatura della superficie.  $T_r$  è invece un'opportuna temperatura di riferimento del fluido: più precisamente, in caso di convezione *esterna*,  $T_r$  è data dal valore asintotico che la temperatura raggiunge a sufficiente distanza dalla superficie e che non è influenzato dalla presenza della superficie stessa; in caso di convezione *interna*  $T_r$  è la

cosiddetta *temperatura di miscela* (ovvero un'opportuna media della temperatura nella sezione trasversale del condotto, che ne conserva il contenuto medio entalpico).

Nella Eq.(2.10) si considera positivo il flusso termico *uscende* dalla superficie. Per uniformarsi alle convenzioni adottate in termodinamica, ovvero che il calore è positivo quando *entra* nel sistema, in alcuni casi è necessario aggiungere un segno negativo nella Eq.(2.10) (in particolare, quando il sistema è costituito dalla parete solida e l'esterno dal liquido che lo lambisce).

Il coefficiente  $\alpha$  [W/m<sup>2</sup> K] è detto *coefficiente di convezione*, e (al contrario di  $k$ ) *non è solo una proprietà del fluido*: esso è un coefficiente empirico che incorpora gli effetti dovuti alla natura del fluido, al campo di velocità in prossimità della superficie, alla geometria del sistema. Tanto più  $\alpha$  è elevato, quanto maggiore è lo scambio termico convettivo (ovviamente, a parità di differenza di temperatura).

Riflettendo ci si può rendere conto che l'Eq.(2.10), ben lungi dall'essere una legge fisica, è semplicemente la definizione di  $\alpha$ .

Noi tutti sappiamo per esperienza che *in generale* lo scambio termico in convezione forzata (e quindi il valore di  $\alpha$ ) è maggiore che in convezione naturale (per questo soffiando sulla minestra e la rimescoliamo col cucchiaino per raffreddarla) e che i liquidi asportano calore per convezione meglio dei gas (per questo stiamo bene in aria a 20°C e abbiamo freddo se immersi in acqua alla stessa temperatura). Alcuni valori indicativi di  $\alpha$  per i casi più comuni sono riportati in Tabella 4.

	Liquidi	Gas
Convezione naturale	50 - 2 000	2 - 25
Convezione forzata	100 - 20 000	25 - 250
Convezione con cambio di fase (ebollizione, condensazione)	2 500 - 100 000	

**Tabella 4:** valori indicativi di  $\alpha$  [W/m<sup>2</sup> K] per i casi più comuni.

**ESEMPIO 2.4 – Valutazione della temperatura superficiale di un corpo.**

Una stufa avente superficie esposta all'aria  $A = 1.5 \text{ m}^2$  dissipa nell'ambiente esterno una potenza termica  $W_t = 0.8 \text{ kW}$ . La stufa è circondata da aria calma, alla temperatura  $T_a = 20 \text{ °C}$ , per cui si può stimare un coefficiente di convezione naturale  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Valutare la temperatura della superficie della stufa.

Il problema si risolve semplicemente applicando l'Eq.(2.10)

$$q'' = \alpha (T_s - T_a) \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

da cui, considerando ai valori assoluti per liberarci dei problemi di segno

$$|W_t| = |q''| A = \alpha A (T_s - T_a)$$

$$T_s = \frac{|W_t|}{\alpha A} + T_a = \frac{800}{10 \cdot 1.5} + 20 = 73 \text{ °C}$$

Da notare che la temperatura della superficie della stufa eccede quella di sicurezza per un contatto accidentale, per cui la stessa andrebbe protetta opportunamente. L'allievo può verificare che in caso di convezione forzata ( $\alpha = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ) tale temperatura si ridurrebbe notevolmente.

Per completezza, aggiungiamo che non abbiamo considerato esplicitamente il contributo dello scambio termico dovuto all'irraggiamento (v. paragrafo successivo) che può essere molto significativo. Di esso si tiene in genere conto in modo semplificato maggiorando opportunamente il coefficiente di convezione.

Analogamente a quanto fatto per la conduzione negli Esempi 2-1 e 2-2, possiamo introdurre anche una resistenza termica convettiva, data da

$$R_T = \frac{T_s - T_a}{W_T} = \frac{1}{\alpha A}$$



### ESEMPIO 2.5 – Irraggiamento e convezione combinati

Una termocoppia è situata sull'asse di un condotto metallico in cui scorre aria a  $T_a = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ , per misurarne la temperatura. Il rivestimento della termocoppia ha una emissività  $\varepsilon = 0.9$ . Le pareti della tubazione si trovano alla temperatura  $T_p = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ . Il coefficiente di convezione tra l'aria e la termocoppia vale  $\alpha = 200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare la temperatura misurata dalla termocoppia.

📄 La soluzione è riportata nel file *C2TCMEAS.XLS*

Dato che la termocoppia è a regime, il suo scambio termico globale deve essere nullo. In particolare, essa riceve calore per irraggiamento dalle pareti calde della tubazione e lo cede per convezione all'aria circostante. Detta quindi  $T$  la temperatura della termocoppia, si ha

$$q''_{irr} + q''_{conv} = 0$$

ed essendo la termocoppia stessa assimilabile ad un corpo molto piccolo contenuto entro uno molto grande (vedi Eq.(2.7))

$$\varepsilon \sigma (T^4 - T_p^4) + \alpha (T - T_a) = 0$$

Il valore della temperatura della termocoppia si ottiene quindi risolvendo una equazione di quarto grado. Dato che essa non è risolvibile in forma chiusa, si può utilizzare un risolutore (es. tipo quelli implementati sulle calcolatrici portatili, od il risolutore di EXCEL) oppure il metodo cosiddetto di *tentativo ed errore*, illustrato nel seguito.

a) Si riarrangia l'equazione precedente nella forma:

$$\alpha (T - T_a) = \varepsilon \sigma (T_p^4 - T^4)$$

b) Si stima un valore di tentativo, ad esempio  $T^* = T_a$

c) Si sostituisce il valore di  $T^*$  a  $T$  nel membro destro

d) Si ottiene un nuovo valore di tentativo tramite

$$T^*_i = T_a + \frac{\varepsilon \sigma}{\alpha} (T_p^4 - T^{*4}_{i-1})$$

Si procede alternando c) e d) fino a quando le due stime successive non differiscono di una quantità trascurabile. I successivi valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente.

$i$	$T^*(i)$ (K)	$T^*(i+1)$ (K)
1	573.00	693.76
2	693.76	662.14
3	662.14	672.21
4	672.21	669.16
5	669.16	670.10
6	670.10	669.81
7	669.81	669.90
8	669.90	669.87
9	669.87	669.88
10	669.88	

Si vede che il metodo converge in poche iterazioni. Tale metodo è di semplice applicazione e generalizzabile a molti altri problemi. Tuttavia la convergenza non è sempre assicurata (provare ad esempio con  $\alpha = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ).

Si nota anche che la temperatura misurata dalla termocoppia differisce sensibilmente da quella effettiva dell'aria. Questo esempio illustra come le misure di temperatura possano essere notevolmente falsate in presenza di irraggiamento con superfici più calde o più fredde del fluido.

□

### **Convezione forzata – determinazione di $\alpha$**

Come già detto, la determinazione di  $\alpha$  è nella maggior parte dei casi affidata all'esecuzione di esperimenti. Tali esperimenti hanno come risultato delle espressioni matematiche, dette *correlazioni di scambio termico*, che danno (generalmente in forma di gruppi adimensionali) il valore del coefficiente di convezione per determinate classi di fluidi, condizioni di moto e configurazioni geometriche. A solo titolo di esempio, si riporta una correlazione abbastanza famosa che fornisce il valore di  $\alpha$  per convezione forzata nel caso di moto a velocità relativamente elevata (moto turbolento) di fluidi (tutti ad eccezione dei metalli liquidi) all'interno di condotti

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$$

dove

$$Nu = \frac{\alpha D}{k} \tag{2.11}$$

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

e:

$D$  diametro idraulico del condotto;

$k$  conducibilità termica del fluido;

$w$  velocità del fluido;

$c_p$  calore specifico del fluido;

$\rho$  densità del fluido;

$\mu$  viscosità dinamica (una proprietà che esprime la resistenza del fluido allo scorrimento, misurata in Pa s).

Si può notare che i tre gruppi ( $Nu$ ,  $Re$ ,  $Pr$ ) che appaiono nell'Eq.(2.11) sono *adimensionali*: essi sono detti rispettivamente *numeri di Nusselt*, *Reynolds* e *Prandtl* (rispettivamente da Willelm Nusselt, 1882-1957, Osborne Reynolds, 1842-1912, e Ludwig Prandtl, 1875-1953). Il numero di Reynolds viene considerato anche quando si trattano il moto e le perdite di carico nei condotti. Altre correlazioni di scambio termico sono riportate in Tab.6.

**ESEMPIO 2.6 - Calcolo del coefficiente di scambio convettivo in convezione forzata.**

In una tubazione di uno scambiatore di calore, di diametro interno 12 mm, scorre una portata  $G = 0.2$  kg/s di acqua alla temperatura di 20°C. Determinare il coefficiente di scambio convettivo utilizzando la correlazione (2.11).

☞ *La soluzione è riportata nel file C2DITTUS.XLS*

Le proprietà termofisiche dell'acqua a 20 °C sono ricavabili da un manuale

$k = 0.6$  W/m K;  $c_p = 4180$  J/kg K;  $\rho = 997$  kg/m<sup>3</sup>;  $\mu = 0.000978$  Pa s.

mentre la velocità va ricavata dalla portata

$$w = \frac{G}{\rho A} = \frac{G}{\rho \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0.2 \cdot 4}{997 \cdot \pi \cdot (0.012)^2} = 1.77 \text{ m/s}$$

A questo punto non resta che valutare i gruppi adimensionali  $Re$  e  $Pr$ ,

$$Re = \frac{\rho w D}{\mu} = \frac{997 \cdot 1.77 \cdot 0.012}{0.000978} = 21698$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{4180 \cdot 0.000978}{0.6} = 6.81$$

da cui si ottiene il valore di  $Nu$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} = 146$$

ed infine

$$\alpha = Nu \frac{k}{D} = \frac{146 \cdot 0.6}{0.012} = 7298 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Cambiando i dati, si può notare come il coefficiente di scambio aumenti con la portata del fluido e diminuisca con il diametro: tuttavia, come vedremo nei prossimi capitoli, agendo in questo modo si ottiene anche un notevole aumento delle perdite per attrito (perdite di carico) nella tubazione.

☐

**Convezione naturale – determinazione di  $\alpha$**

In regime di convezione naturale, la velocità del fluido dipende dai moti indotti dalle differenze di densità e pertanto non è ben definita. Non ha quindi senso definire il numero di Reynolds, che viene sostituito dal *numero di Grashof* (da Franz Grashof, 1826-1893)

$$Gr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (2.12)$$

Dove, oltre alle grandezze definite in precedenza, compaiono

- $\beta$  coefficiente di dilatazione termica del fluido,
- $g$  accelerazione di gravità;
- $T_s$  temperatura della parete;
- $T_\infty$  temperatura del fluido imperturbato (a sufficiente distanza dalla parete);
- $L$  dimensione lineare caratteristica della superficie (in genere, area/diametro).

E' da notare che  $Gr = 0$ , quindi non si ha convezione naturale, nel caso di fluido che non si dilati termicamente ( $\beta=0$ ) o in caso di assenza di gravità ( $g=0$ ). In entrambi i casi infatti viene a mancare la forza di galleggiamento che è responsabile del moto del fluido.

Per la natura stessa della convezione naturale, il coefficiente di scambio dipende quindi anche dalla temperatura della parete, il che rende il fenomeno non più linearmente dipendente da  $\Delta T$  e obbliga in molti casi ad una soluzione iterativa del problema. Una tipica correlazione di scambio termico in convezione naturale, valida per piastre orizzontali, ha la forma

$$Nu = 0.54 (Pr Gr)^{1/4} \quad (2.13)$$

ed è valida per  $10^4 < Pr Gr < 10^7$ . Altre correlazioni sono riportate in Tab.6.

### **ESEMPIO 2.7 – Convezione naturale.**

Il processore di un personal computer ha la superficie superiore quadrata di lato  $a = 80$  mm; detta superficie deve mantenersi ad una temperatura massima di  $60^\circ\text{C}$ . Trascurando il contributo dell'irraggiamento, determinare la potenza termica massima che può essere smaltita attraverso tale superficie se il fluido circostante (aria) si trova alla temperatura di  $30^\circ\text{C}$ .

Le proprietà termofisiche dell'aria a  $30^\circ\text{C}$  sono ricavabili da un manuale:

$$k = 0.026 \text{ W/m K}; \rho = 1.165 \text{ kg/m}^3; \mu = 1.86 \times 10^{-5} \text{ Pa s}, \beta = 0.0033 \text{ K}^{-1}.$$

Inoltre, per tutti i gas si può ritenere con buona approssimazione  $Pr = 0.7$

Il numero di Grashof, avendo assunto  $L = A/P = a/4 = 0.02$  m, vale quindi

$$Gr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) \rho^2 L^3}{\mu^2} = \frac{9.81 \cdot 0.0033 \cdot (60 - 30) \cdot 1.165^2 \cdot 0.02^3}{(1.86 \cdot 10^{-5})^2} = 30480$$

essendo  $10^4 < Pr Gr < 10^7$ , si può utilizzare la Eq.(2.13), da cui si ottiene il valore di  $Nu$

$$Nu = 0.54 (Pr Gr)^{1/4} = 0.54 (21336)^{1/4} = 6.5$$

ed infine

$$\alpha = Nu \frac{k}{D} = \frac{6.5 \cdot 0.026}{0.02} = 8.5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

La potenza termica scambiata è data da

$$W_T = \alpha S (T_p - T_\infty) = 8.5 \cdot (0.08)^2 (60 - 30) = 1.63 \text{ W}$$

In caso che il chip debba dissipare una potenza maggiore è necessario aumentare la superficie di scambio dotandolo di alette (v. app.2-2) oppure passare alla convezione forzata aggiungendo una ventola. Da notare anche che è stato trascurato il contributo dell'irraggiamento, che in queste condizioni (in dipendenza dalla geometria del sistema) potrebbe superare il 30%.

□

### **Raccolta di correlazioni di scambio termico**

E' inutile imparare a memoria le correlazioni di scambio termico: esse si trovano in gran numero sui manuali ed hanno tutte una forma grossomodo analoga a quella della Eq.(2.11) (anche se un po' più complessa, e talvolta contengono ulteriori gruppi adimensionali). In Tab.6 è riportato un sommario delle principali correlazioni di scambio termico per convezione. Ogni correlazione si riferisce ad un particolare tipo di convezione (es. convezione naturale, o forzata) e a determinate geometrie (es. tubazioni). Utilizzare le correlazioni al di fuori del loro campo di validità in genere porta ad errori molto gravi. L'uso delle correlazioni di scambio termico è illustrato negli esempi 2-6 e 2-7.

### **Convezione e conduzione combinate – scambio termico attraverso una parete**

Nei casi tecnici rilevanti, la convezione avviene in prossimità di una parete lambita da un fluido, ed è quindi spesso associata alla conduzione all'interno della parete stessa. Tale modalità composta di scambio termico è illustrata nell'esempio seguente.

#### **ESEMPIO 2.8 - Lastra piana lambita da due fluidi.**

Sia data una lastra piana di vetro ( $k = 1.5 \text{ W/m K}$ ), di spessore  $s = 5 \text{ mm}$  e superficie  $A = 0.5 \text{ m}^2$  (dato che l'altezza e la larghezza sono molto maggiori dello spessore, la temperatura si può considerare funzione della sola  $x$ ). La lastra si trova in condizioni stazionarie; sul lato sinistro è lambita da acqua a  $T_1 = 50 \text{ °C}$  e coefficiente di convezione  $\alpha_1 = 250 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , e su quello destro da aria a  $T_2 = 15 \text{ °C}$  e coefficiente di convezione  $\alpha_2 = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare il flusso termico totale attraverso la lastra e la temperatura delle sue facce.

Dette  $T'$  e  $T''$  le temperature delle due facce della lastra, si ha che il flusso termico totale per conduzione al suo interno (vedi Es.2-1) è dato da

$$W_T = -k A \frac{dT}{dx} = k A \frac{T' - T''}{s}$$

il problema è risolto dal sistema di equazioni seguenti, nelle incognite  $T'$ ,  $T''$ ,  $W_T$ , dove si è assunto positivo il calore che fluisce verso destra (v. Fig.2)

$$\begin{cases} W_T = \alpha_1 A (T_1 - T') \\ W_T = k A \frac{T' - T''}{s} \\ W_T = \alpha_2 A (T'' - T_2) \end{cases}$$

in molti casi ha interesse eliminare  $T'$  e  $T''$  dalle equazioni di cui sopra per ottenere una relazione che lega direttamente  $W_T$  a  $T_1$  e  $T_2$ . Il problema è analogo a determinare la resistenza equivalente a tre resistenze elettriche in serie, in cui la temperatura è analoga alla tensione ed il flusso termico alla corrente (v. anche Es.2-1). Lo schema elettrico equivalente è riportato in Fig.3, dove le tre "resistenze termiche" (vedi Esempi 2-1 e 2-4) sono date da:

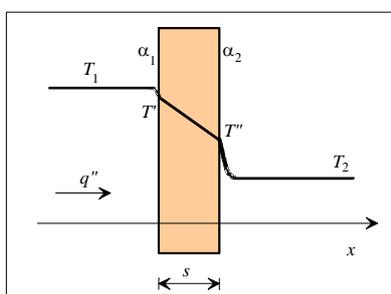
$$R_{t1} = \frac{1}{\alpha_1 A}, \quad R_{t2} = \frac{s}{k A}, \quad R_{t3} = \frac{1}{\alpha_2 A}$$

La soluzione è data da

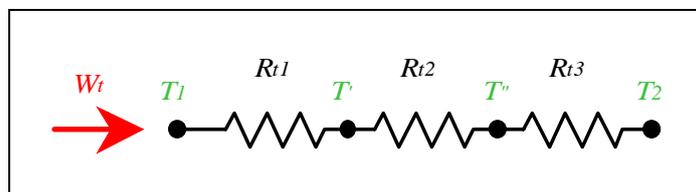
$$\begin{cases} W_T = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \\ R_T = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha:

$$R_T = \frac{1}{0.5 \cdot 250} + \frac{0.005}{0.5 \cdot 1.5} + \frac{1}{0.5 \cdot 10} = 0.215 \text{ K/W}$$



**Figura 2:** andamento qualitativo della temperatura in una lastra lambita da due fluidi.



**Figura 3:** Rete elettrica equivalente al fenomeno di scambio termico in una parete lambita da due fluidi.

E' da notare che, come spesso accade, uno solo dei tre addendi in parentesi prevale di uno o più ordini di grandezza sugli altri (nel caso in esame, il terzo); è del tutto inutile quindi determinare accuratamente i due rimanenti. Svolgendo i calcoli:

$$W_t = 163 \text{ W}$$

$$q'' = \frac{W_t}{A} = 326 \text{ W/m}^2$$

$$T' = T_1 - W_T R_{t1} = 48.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T'' = T_2 + W_T R_{t2} = 47.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

In questo caso quasi tutto il salto termico è localizzato alla superficie della lastra in contatto con il fluido di minore coefficiente di convezione, dove si ha la maggiore resistenza termica.

□

Nella tecnica si fa spesso riferimento al reciproco della resistenza termica  $R_T$ , che si indica con  $U$  ed è detta *conduttanza di parete*; detta grandezza si misura in [W/K]. Si usa spesso anche il *coefficiente globale di scambio*, o *conduttanza unitaria di parete*, già introdotto nel cap.1, che è riferito all'unità di superficie e vale quindi  $u = U/A$  e si misura in [W/m<sup>2</sup> K]. In sintesi, la relazione tra queste tre quantità è quindi

$$R_T = \frac{1}{U} = \frac{1}{u A}$$

Il valore della resistenza termica nei casi più comuni è riportato in Tab.5. Nei manuali sono disponibili anche valori della resistenza termica per casi bidimensionali (es. tubazioni interrate, spigoli di pareti). Nei casi più complessi, è necessario considerare reti di resistenze termiche in serie ed in parallelo, che possono essere risolte tramite i metodi appresi in elettrotecnica. Nell'esempio che segue facciamo invece uso della conduttanza di parete.

Configurazione	Resistenza termica [K/W]	Note
Conduzione monodimensionale parete piana	$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{s}{k A}$	v. Esempio 2-1
Conduzione monodimensionale parete cilindrica	$R_T = \frac{r_2 - r_1}{k A_m}$ dove $A_m = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2 / r_1)} L$	v. Esempio 2-2 Per $r_2 - r_1 < 0.1 r_1$ la parete si può considerare piana.
Conduzione multidimensionale	$R_T = \frac{1}{k S}$	v. App.2-1
Convezione	$R_T = \frac{T_s - T_a}{W_T} = \frac{1}{\alpha A}$	v. Esempio 2-4
Convezione su superficie alettata	$R_T = \frac{1}{\alpha \eta_a A_{con}}$	v. App. 2-2
Irraggiamento (caso semplificato)	$R_T = \frac{1}{\alpha_R A_1}$	v. Eq.(2.8)

**Tabella 5:** valori della resistenza termica per i casi più comuni.

**ESEMPIO 2.8 – Perdite termiche da una tubazione.**

In una tubazione di acciaio inossidabile ( $k = 16$  W/m K), di spessore  $s = 5$  mm e diametro esterno  $D = 40$  mm, di lunghezza  $L = 10$  m, scorre vapore saturo a temperatura  $T_1 = 300$  °C, con coefficiente di convezione  $\alpha_1 = 5000$  W/m<sup>2</sup> K. La tubazione si trova in condizioni stazionarie, e sul lato esterno è lambita da aria a  $T_2 = 20$  °C e coefficiente di convezione  $\alpha_2 = 15$  W/m<sup>2</sup> K. Determinare la perdita di calore dalla tubazione (ovvero, il flusso termico totale).

Dato che la tubazione è molto più lunga del suo diametro e non vi sono disuniformità circonferenziali, la temperatura può essere considerata funzione unicamente del raggio. Il problema si può risolvere determinando la conduttanza di parete dalle tre resistenze termiche in serie (vedi Esempi 2-2 e 2-8 e Tab.5):

$$\begin{cases} W_T = U (T_1 - T_2) \\ U = (R_{r1} + R_{r2} + R_{r3})^{-1} = \left( \frac{1}{A_1 \alpha_1} + \frac{s}{A_m k} + \frac{1}{A_2 \alpha_2} \right)^{-1} \end{cases}$$

notare che in questo caso, a causa della geometria cilindrica, le aree di scambio che compaiono nelle tre resistenze termiche sono diverse. In particolare

$$\begin{cases} A_1 = \pi (D - 2s) L = 0.94 \text{ m}^2 \\ A_m = 2\pi \frac{s}{\ln\left(\frac{D}{D - 2s}\right)} L = 1.09 \text{ m}^2 \\ A_2 = \pi D L = 1.26 \text{ m}^2 \end{cases}$$

si ha quindi

$$U = \left( \frac{1}{0.94 \cdot 5000} + \frac{0.005}{1.09 \cdot 16} + \frac{1}{1.26 \cdot 15} \right)^{-1} = 18.72 \text{ W/K}$$

$$W_T = 18.72 \cdot (300 - 20) = 5.24 \text{ kW}$$

□

### Trasmissione del calore in condizioni non stazionarie.

Fino a questo momento, abbiamo considerato la trasmissione del calore in *condizioni stazionarie*. Il concetto di resistenza termica, o del suo reciproco, la conduttanza di parete, permette di risolvere agevolmente tali problemi. Nell'esempio che segue, affronteremo invece un semplice caso di *transitorio termico*.

#### **ESEMPIO 2.9 - Studio semplificato della tempra di un cilindro metallico.**

Un cilindro di acciaio al carbonio ( $c_p = 434 \text{ J/kg K}$ ,  $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$ ) di diametro  $D = 10 \text{ mm}$  e lunghezza  $L = 40 \text{ mm}$ , inizialmente alla temperatura uniforme  $T_0 = 1200 \text{ °C}$ , viene gettato in un bagno di tempra alla temperatura  $T_a = 25 \text{ °C}$ . Si può considerare che il bagno si mantenga a temperatura costante (capacità termica infinita) e che il coefficiente di convezione, anch'esso costante, valga  $\alpha = 20\,000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Determinare dopo quanto tempo il cilindro raggiunge la temperatura di  $300 \text{ °C}$ .

📄 *La soluzione è riportata nel file C2TEMPRA.XLS*

In questo caso dobbiamo trattare un problema di transitorio. Il cilindro può essere considerato un sistema chiuso, e possiamo adottare le seguenti ipotesi:

- il lavoro scambiato con l'esterno (dovuto unicamente alla variazione di volume del cilindro) può decisamente essere trascurato (in altri termini, il materiale può essere considerato indilatabile);
- se il materiale è indilatabile,  $c_p = c_v = c$ ;

- la temperatura all'interno del cilindro può essere ritenuta uniforme (ovvero indipendente da  $z$  ed  $r$ ): una giustificazione accurata di tale ipotesi esula dagli scopi del corso, ma si può intuire che la elevata differenza di temperatura tra interno ed esterno (dovuta alla elevata “resistenza termica” alla superficie) rende trascurabili le disuniformità di temperatura all'interno del corpo (dove la corrispondente “resistenza termica” è minore).

In tali condizioni l'equazione di bilancio dell'energia (I principio della t.d.) può essere scritta come

$$\frac{dU}{dt} = W_T$$

ricordando che

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= M \frac{du}{dt} = \rho V \frac{du}{dt} \\ \frac{du}{dt} &= c \frac{dT}{dt} \quad (\text{materiale indilatabile}) \\ W_T &= -\alpha A (T(t) - T_a) \end{aligned}$$

si ottiene infine il problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \rho V c \frac{dT}{dt} = -\alpha A (T(t) - T_a) \\ T(t=0) = T_0 \end{cases}$$

Il problema può essere riarrangiato in una forma più generale introducendo le due grandezze ausiliarie  $\Theta$  (theta) e  $\tau$  (tau)

$$\begin{cases} \tau = \frac{\rho V c}{\alpha A} \\ \Theta = T(t) - T_a \end{cases}$$

$\tau$  [s] è detta costante di tempo, per motivi che appariranno evidenti nel seguito. Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\Theta}{\tau} \\ \Theta(t=0) = \Theta_0 = T_0 - T_a \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$\Theta(t) = \Theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Nel caso in esame si ha quindi

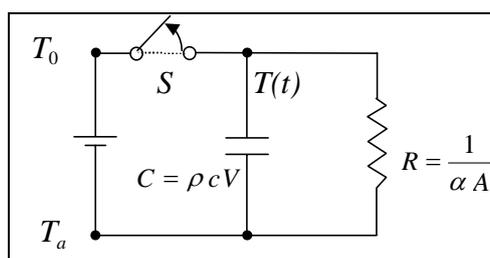
$$V = \frac{\pi D^2}{4} L = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$A = \pi D L + 2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.00141 \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{\rho c V}{\alpha A} = \frac{7830 \cdot 434}{20000} 0.0022 = 0.378 \text{ s}$$

$$t = \tau \ln \left( \frac{\Theta_0}{\Theta} \right) = 0.378 \ln \left( \frac{1200 - 25}{300 - 25} \right) = 0.55 \text{ s}$$

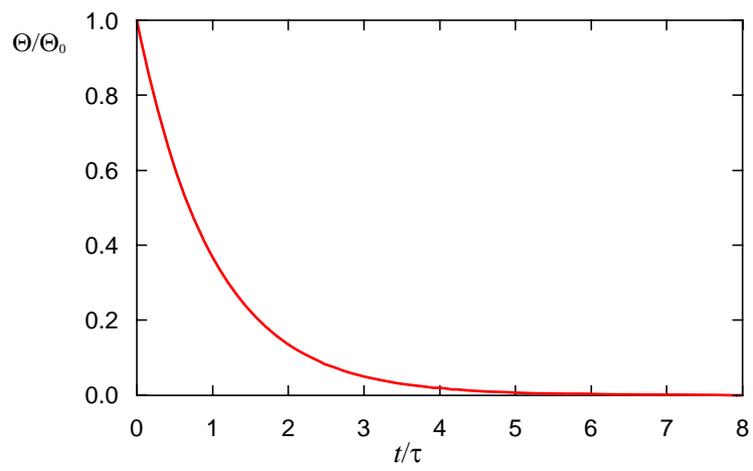
L'esempio trattato costituisce un caso di *sistema dinamico del primo ordine* (in quanto governato da una equazione differenziale del primo ordine). Molti altri sistemi fisici si comportano secondo questo modello: ad esempio, la carica e scarica di un condensatore in un circuito RC (v. Fig.4), od il riempimento di una vasca che ha una perdita proporzionale al livello di liquido in essa. Non è difficile verificare che, sebbene in teoria il transitorio si estingua in un tempo infinito (il cilindro impiega un tempo infinito a raggiungere la temperatura del bagno) in pratica esso può essere considerato concluso dopo un intervallo pari a 4-5 costanti di tempo. Questo è ben visibile anche nel grafico di Fig.5 che rappresenta l'andamento di  $\Theta/\Theta_0$  (che varia dal valore iniziale 1 a quello asintotico finale 0) in funzione di  $t/\tau$ .



**Figura 4:** Rete elettrica equivalente al fenomeno di tempra di un cilindro metallico. al tempo  $t = 0$  viene aperto l'interruttore S.

E' noto che affinché il pezzo si tempri il transitorio deve essere il più veloce possibile; dall'esame dell'espressione della costante di tempo  $\tau$  si vede che essa diviene più piccola (e quindi il transitorio si accorcia) se

- $\alpha$  aumenta: per questo spesso si ricorre a fluidi che scambiano più efficacemente o all'agitazione del bagno (convezione forzata);
- il rapporto  $V/A$  diminuisce: tale rapporto è minore per pezzi sottili rispetto a quelli tozzi (è massimo nella sfera, che ha la minor superficie a parità di volume) e non è difficile verificare che per corpi geometricamente simili cresce all'aumentare di  $V$ .
- Inoltre si vede ovviamente che il transitorio è tanto più rapido quanto è minore la capacità termica  $\rho c V$  del corpo



**Figura 5.** Andamento della temperatura adimensionalizzata in funzione del tempo adimensionalizzato.

□

CONFIGURAZIONE	LIMITI	CORRELAZIONE	RIFERIMENTI - NOTE
Convezione forzata interna Moto laminare Moto pienamente sviluppato	$Re < 2100$ $Pr > 0.7$ $L/D \gg 0.05 Re Pr$	$Nu = 3.66 \quad (T_s = const)$ $Nu = 4.36 \quad (q = const)$	Valore locale di Nu per moto pienamente sviluppato. Possono essere usate se il tubo e' molto lungo rispetto alla zona di imbocco e la viscosita' non varia molto con la temperatura. V. Incropera p.460.
Convezione forzata interna Moto laminare T parete costante	$Re < 2100$ $Pr > 0.7$	$Nu = 1.86 \left( \frac{Re Pr}{L/D} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14}$	Incropera p.460 $\mu$ viscosita' a T miscela ( $T_m$ ) $\mu_s$ viscosita' a T parete ( $T_s$ ) Raccomandata se: $(Re Pr D / L)^{1/3} (\mu / \mu_s)^{0.14} > 2$
Convezione forzata interna Moto turbolento Condotti lunghi	$Re > 6000$ $Pr > 0.7$ $L/D > 10$	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33}$ (Precisione del 25%)	Incropera p.445, Lienhard p.323. Esistono correlazioni piu' complesse con precisioni migliori del 10%.
Convezione forzata interna Moto turbolento Condotti lunghi	$Re > 10000$ $0.6 < Pr < 160$ $L/D > 10$	$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$ $n = 0.4$ per $T_s > T_m$ $n = 0.3$ per $T_s < T_m$	Incropera p.445.
Convezione forzata interna Metalli liquidi	$Pr < 0.1$	$Nu = 4.0 + 0.025(Re Pr)^{0.8} \quad (T_s = const)$ $Nu = 5.0 + 0.025(Re Pr)^{0.8} \quad (q = const)$	
Convezione forzata esterna Cilindro in "crossflow" (ovvero investito da una corrente infinita perpendicolare al suo asse)	$2 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$ $Re Pr > 0.2$	$Nu = 0.3 + \left\{ 0.62 Re^{1/2} Pr^{1/3} \left[ 1 + (0.4/Pr)^{2/3} \right]^{1/4} \right\} \left[ 1 + (Re/282000)^{5/8} \right]^{4/5}$ (Precisione del 20%)	Incropera p.395, Lienhard p.329. Precisione migliore se divisa in piu' parti.
Convezione naturale Piastra verticale	$Gr_L > 10^9$	$Nu = 0.13 (Pr Gr_L)^{1/3}$	Kreith p.394.
Convezione naturale Piastra verticale	$Pr Gr_L < 10^4$	$Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387(Pr Gr_L)^{1/6}}{\left[ 1 + (0.492/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	Incropera p.493.
Convezione naturale Piastra orizzontale Moto laminare Superficie superiore di piastra calda o inferiore di piastra fredda	$10^4 < Pr Gr_L < 10^7$	$Nu = 0.54 (Pr Gr_L)^{1/4}$	Incropera p.498 $Gr_L \equiv \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2}$ $\beta$ = coeff. di dilatazione termica $L$ = area / perimetro
Convezione naturale Piastra orizzontale Moto turbolento Superficie superiore di piastra calda o inferiore di piastra fredda	$10^7 < Pr Gr_L < 10^{11}$	$Nu = 0.15 (Pr Gr_L)^{1/3}$	v. sopra
Convezione naturale Piastra orizzontale Superficie inferiore di piastra calda o superiore di piastra fredda	$10^5 < Pr Gr_L < 10^{10}$	$Nu = 0.27 (Pr Gr_L)^{1/4}$	v. sopra
Convezione naturale Cilindro orizzontale	$10^{-5} < Pr Gr_D < 10^{12}$	$Nu = \left\{ 0.60 + \frac{0.387(Pr Gr_D)^{1/6}}{\left[ 1 + (0.559/Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	Incropera p.502. Per $10^3 < Gr_D < 10^9$ si puo' usare: $Nu = 0.53 (Pr Gr_D)^{1/4}$ (v. Kreith p.396)
Convezione naturale Cilindro verticale	$D/L \geq (35/Gr_L^{1/4})$	Usare la correlazione per piastre verticali	Incropera p.494. Correlazioni piu' accurate, V. Lienhard p.360.

NOTE: Se non specificato altrimenti, le proprieta' fisiche devono essere valutate alla temperatura del  $T_f = (T_r + T_s) / 2$ . La  $T_r$  e' la temperatura all'infinito per flussi esterni, mentre per flussi interni e' la temperatura di miscela.

**Tabella 6:** principali correlazioni di scambio termico per convezione.

## **BIBLIOGRAFIA**

Per approfondimenti sulla trasmissione del calore si può consultare:

- Y.A. Cengel, *Termodinamica e Trasmissione del Calore*, McGraw-Hill, 1998, capp. 10-14.

Inoltre esistono numerosi testi italiani ed inglesi dedicati esclusivamente alla trasmissione del calore. Tra essi si citano

- G. Guglielmini, C. Pisoni, *Elementi di Trasmissione del Calore*, Veschi, 1990.
- A. Bejan, *Heat Transfer*, Wiley, 1993.
- F.P. Incropera, D.P. De Witt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley, 1996.
- F. Kreith, *Principi di Trasmissione del Calore*, Liguori, Napoli, 1974.

## Appendice 2-1 – La conduzione in regime stazionario in strutture multidimensionali

In ogni sistema bidimensionale, nel quale del calore viene trasmesso da una superficie a temperatura costante  $T_1$  ad un'altra superficie a temperatura costante  $T_2$  di un corpo solido, la potenza termica scambiata dipende solo dalla differenza di temperatura ( $T_1 - T_2$ ), dalla conducibilità termica  $k$  del mezzo attraverso il quale avviene lo scambio termico e dalla forma geometrica del sistema. In particolare, la potenza termica scambiata tra queste due superfici può essere espressa come:

$$W_T = k S (T_1 - T_2) \quad (\text{a1-1})$$

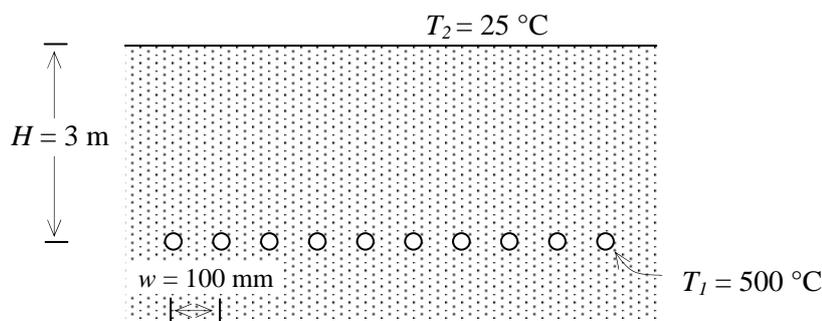
dove  $S$ , detto *fattore di forma conduttivo*, dipende solo dalla geometria del corpo. Esso ha le dimensioni di una lunghezza e la sua espressione analitica è generalmente riportata nei testi di trasmissione del calore per differenti configurazioni geometriche che possono incontrarsi nella pratica. Alcuni esempi sono riportati nella Tab.A1, tratta dal testo di Y.A. Cengel.

In questo caso la *resistenza termica*, è data da:

$$R_T = \frac{T_1 - T_2}{W_T} = \frac{1}{k S} \quad (\text{a1-2})$$

### ESEMPIO

Un dittatore mediorientale ribelle alle disposizioni internazionali ha nascosto nel sottosuolo un fascio di barrette di ossido di uranio di lunghezza  $L = 1$  m e di diametro  $D = 10$  mm. Esse sono interrate nel suolo parallelamente una all'altra ad una profondità  $H = 3$  m, come mostrato in figura, ed il passo è  $w = 100$  mm. La conducibilità termica del suolo  $k = 0.9$  W/(m K). Se la temperatura superficiale delle barrette e del suolo valgono rispettivamente  $T_1 = 500$  °C e  $T_2 = 25$  °C, determinare la potenza termica scambiata da ciascuna di esse.

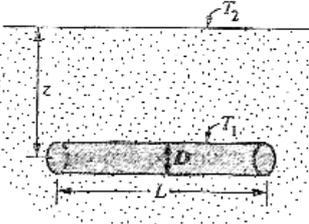
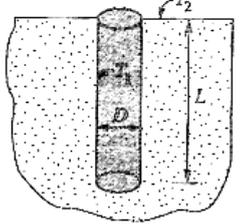
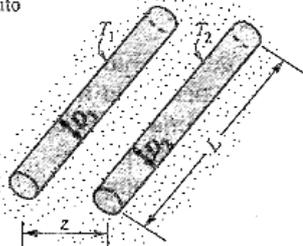
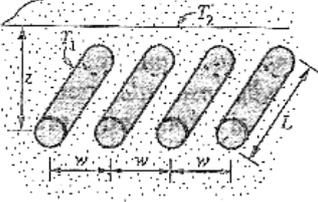
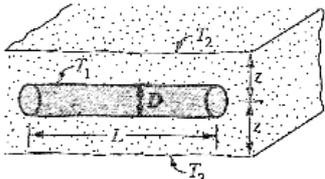
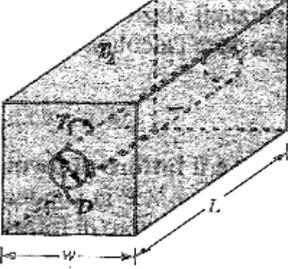
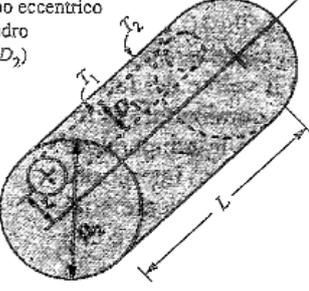
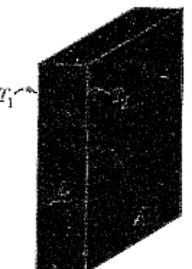


La potenza termica scambiata può essere determinata sfruttando l'eq.(a1-1) dove  $S$  è l'appropriato fattore di forma conduttivo che in questo caso vale:

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh \frac{2\pi H}{w}\right)} = 0.076 \text{ m}$$

La potenza termica persa da ogni singola barretta vale quindi:  $W_i = k S (T_1 - T_2) = 32.5$  W

□

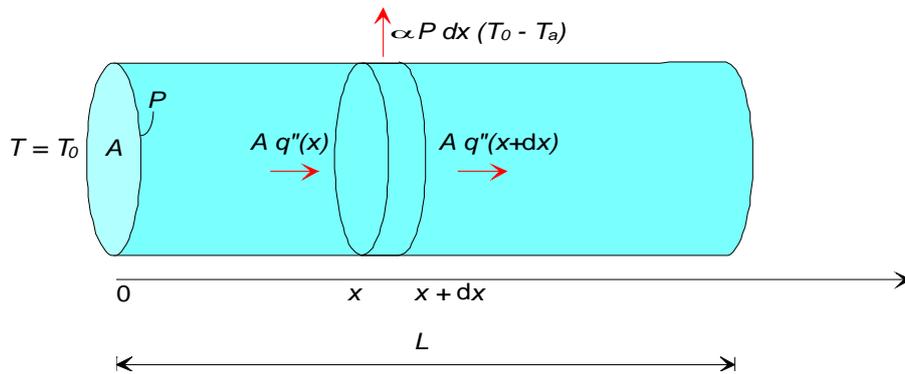
<p>(1) Cilindro isoterma di lunghezza <math>L</math> interrato in un mezzo semi-infinito (<math>L \gg D</math> e <math>z &gt; 1.5D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$ 	<p>(2) Cilindro verticale isoterma di lunghezza <math>L</math> interrato in un mezzo semi-infinito (<math>L \gg D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$ 
<p>(3) Due cilindri paralleli isotermi immersi in un mezzo infinito (<math>L \gg D_1, D_2, z</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$ 	<p>(4) Una fila di cilindri paralleli equidistanti isotermi interrati in un mezzo semi-infinito (<math>L \gg D, z</math> e <math>w &gt; 1.5D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D} \sinh \frac{2\pi z}{w}\right)}$ <p>(per cilindro)</p> 
<p>(5) Cilindro circolare isoterma di lunghezza <math>L</math> nel piano medio di una parete infinita (<math>z &gt; 0.5D</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$ 	<p>(6) Cilindro circolare isoterma di lunghezza <math>L</math> al centro di una barra quadra solida della stessa lunghezza</p> $S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$ 
<p>(7) Cilindro circolare isoterma eccentrico di lunghezza <math>L</math> in un cilindro di uguale lunghezza (<math>L &gt; D_2</math>)</p> $S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1 D_2}\right)}$ 	<p>(8) Ampia parete piana</p> $S = \frac{A}{L}$ 

**Tabella A1:** Fattori di forma conduttivi, (tratto da Y.A. Cengel, cap. 10, Tab. 10.7).

## Appendice 2-2 – Lo scambio termico attraverso superfici alettate

Se il gradiente di temperatura in un solido è molto alto lungo la direzione  $x$ , rispetto al gradiente lungo le altre due direzioni, e se ci si trova in condizioni stazionarie è possibile considerare la temperatura funzione della sola coordinata  $x$ . Questo caso si presenta in genere nelle *alette* che rivestono le superfici al fine di aumentare lo scambio termico.

Consideriamo quindi l'aletta mostrata in Fig.A2-1, ovvero un solido prismatico (a sezione costante  $A$ , il cui perimetro è  $P$ ): in essa il calore entrante per conduzione attraverso la sua base (ad  $x = 0$ ), che è in contatto con la superficie riscaldata, viene dissipato per convezione dalla superficie laterale verso l'ambiente a temperatura  $T_a$  con un coefficiente di scambio termico  $\alpha$ .



**Figura A2-1:** schematizzazione di un'aletta sottile a sezione costante

Dal bilancio di energia per il disco di spessore  $dx$  in corrispondenza alla posizione assiale  $x$  si ottiene la seguente espressione

$$A q''(x) - A q''(x+dx) = \alpha P dx [T(x) - T_a] \quad (\text{a2-1})$$

che indica come la differenza tra il calore che entra dalla faccia di destra per conduzione e quello che esce, sempre per conduzione, dalla faccia di sinistra del disco è pari al calore smaltito per convezione dalla superficie laterale. Il flusso termico conduttivo  $q''$  è dato da

$$q'' = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_x \quad (\text{a2-2})$$

e quindi sviluppando in serie di Taylor

$$q''(x+\Delta x) - q''(x) = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x+\Delta x} + k \left. \frac{dT}{dx} \right|_x = -k \left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_x dx \quad (\text{a2-3})$$

Da cui sostituendo nell'eq.(a2-1) si ottiene

$$k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dx = \alpha P dx [T(x) - T_a] \quad (\text{a2-4})$$

Se si introduce la nuova variabile  $\theta(x) \equiv T(x) - T_a$  e si elimina  $dx$  si ottiene:

$$\frac{d^2 \theta(x)}{d x^2} = \frac{\alpha P}{A k} \theta(x) \quad (\text{a2-5})$$

ovvero

$$\frac{d^2 \theta(x)}{d x^2} - m^2 \theta(x) = 0, \quad m^2 \equiv \frac{\alpha P}{k A} \quad (\text{a2-6})$$

che rappresenta la tipica equazione differenziale per alette di sezione trasversale costante. Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione generale ha, come è noto, la forma

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (\text{a2-7})$$

Per ottenere la soluzione particolare sono necessarie due condizioni al contorno. La prima, abbastanza ovviamente, consiste nell'imporre la temperatura alla base dell'aletta

$$\theta(x=0) = \theta_0 = T_0 - T_a \quad (\text{a2-8})$$

Per la seconda condizione sono possibili diverse alternative (v. ad es. Incropera, cap.3). Ci limiteremo a considerare il caso in cui la superficie estrema dell'aletta, a  $x = L$ , scambia una quantità di calore trascurabile, per cui può ritenersi adiabatica e quindi

$$\left. \frac{d \theta}{d x} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{a2-9})$$

Con l'ipotesi aggiuntiva di aletta molto lunga (si può dimostrare che essa si verifica quando  $mL > 3$ , v. Incropera) la soluzione particolare cercata si semplifica in

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-mx}; \quad T(x) = T_0 + (T_0 - T_a) e^{-mx} \quad (\text{a2-10})$$

e la potenza termica asportata dall'aletta, pari a quella che attraversa la sua base a  $x = 0$ , è

$$W_T = q'' A = -k A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = k A m (T_0 - T_a) = \sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a) \quad (\text{a2-11})$$

Si definisce *efficacia dell'aletta*,  $\varepsilon_a$ , il rapporto tra la potenza termica asportata dall'aletta e quella che fluirebbe per convezione dalla base in sua assenza, ovvero

$$\varepsilon_a = \frac{q'' A}{\alpha A (T_0 - T_a)} \quad (\text{a2-12})$$

Nel nostro caso si ha

$$\varepsilon_a = \frac{\sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a)}{\alpha A (T_0 - T_a)} = \sqrt{\frac{k P}{\alpha A}} \quad (\text{a2-13})$$

Affinchè sia conveniente installare un'aletta, l'efficacia deve essere notevolmente superiore ad uno. Si vede chiaramente che, a parità di altri fattori, l'efficacia aumenta al diminuire di  $\alpha$ : per questa ragione le superfici esposte all'aria (basso  $\alpha$ ) sono frequentemente allettate, mentre quelle esposte all'acqua non lo sono quasi mai.

Si definisce *efficienza dell'aletta*,  $\eta_a$ , il rapporto tra la potenza termica asportata dall'aletta e quella massima asportabile, che si avrebbe nel caso in cui tutta la superficie *laterale* dell'aletta si trovasse alla stessa temperatura della base,  $T_0$ . Essa è pertanto data da

$$\eta_a = \frac{W_T}{W_{T,\max}} = \frac{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L}}{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}} = \frac{-k A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L}}{\alpha PL(T_0 - T_a)} \quad (\text{a2-14})$$

Dove  $A_{al} = PL$  rappresenta l'area *laterale* dell'aletta. Nel nostro caso

$$\eta_a = \frac{\sqrt{k A P \alpha} (T_0 - T_a)}{P L \alpha (T_0 - T_a)} = \frac{\sqrt{k A}}{P \alpha} \frac{1}{L^2} = \frac{m^2}{L^2} \quad (\text{a2-15})$$

La eq.(a2-15) mostra quali sono i limiti della superficie alettata: via via che ci si allontana dalla base, la temperatura dell'aletta deve diminuire perché il calore possa fluire per conduzione all'interno di essa; ma tale diminuzione di temperatura implica anche una riduzione dello scambio termico per convezione e quindi una riduzione di efficienza dell'aletta.

E' evidente che per funzionare bene un'aletta deve essere fatta di un materiale che sia *un buon conduttore termico* e deve essere *sottile*, in modo che il rapporto  $P/A$  diminuisca. L'eq.(a2-15) mostra anche che a parità di altri fattori le alette hanno maggiore efficienza quando il coefficiente di scambio è basso. Anche per tale ragione vengono frequentemente alettate le superfici esposte all'aria e non quelle esposte a fluidi che consentono alti coefficienti di scambio termico convettivo visto che, in quest'ultimo caso, raramente si raggiungono condizioni di buona efficienza; in ogni caso le alette per liquidi sono molto tozze e per esse l'approssimazione unidimensionale da noi fatta non sempre è valida.

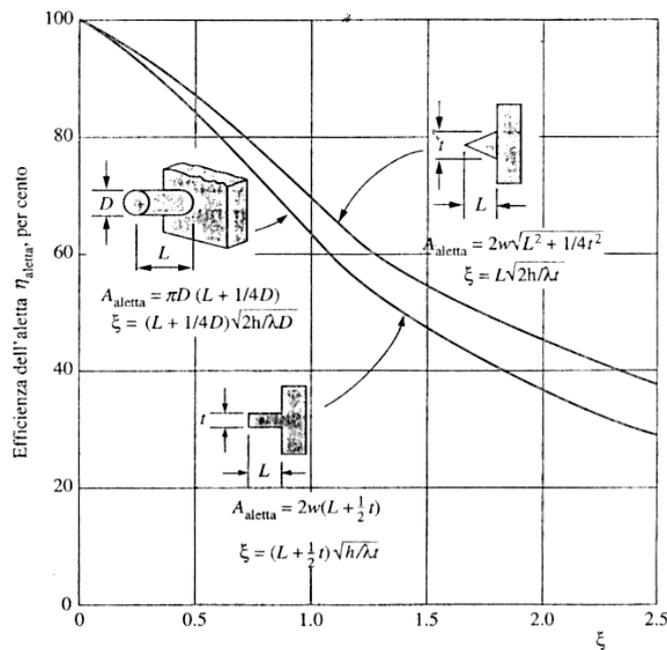


Figura A2-2: Efficienza di un'aletta (tratto da Y.A. Cengel, cap. 10)

L'eq.(a2-15) fornisce anche una semplice ed importante relazione per calcolare il calore smaltito da un'aletta

$$W_T = \eta_a \alpha P L (T_0 - T_a) = \eta_a \alpha A_{al} (T_0 - T_a) \quad (\text{a2-16})$$

Nei casi più complessi (condizioni al contorno diverse da quelle da noi adottate, alette di sezione non costante) la eq.(a2-16) rimane comunque applicabile e l'efficienza dell'aletta è riportata in diagrammi in funzione di un opportuno parametro adimensionale  $\xi$  (v. Fig.A2-2). A questo punto siamo in grado di calcolare l'*efficienza termica di una superficie alettata*, che supponiamo divisa in due parti: una parte  $A_{con}$  ricoperta da alette di efficienza  $\eta_a$ , ed una  $A_{senza}$  (che include gli interstizi tra un'aletta e l'altra) non ricoperta da esse. Supponendo che il coefficiente convettivo  $\alpha$  si mantenga costante su tutta la superficie si ha pertanto

$$W_T = \eta_a A_{con} \alpha (T_0 - T_\infty) + A_{senza} \alpha (T_0 - T_\infty)$$

e la resistenza termica risulta data da

$$R_T = \frac{T_0 - T_\infty}{W_T} = \frac{1}{\eta_a A_{con} \alpha + A_{senza} \alpha} \quad (\text{a2-17})$$

Nella pratica, spesso il secondo termine a denominatore è trascurabile e la resistenza termica si riduce a

$$R_T \cong \frac{1}{\eta_a A_{con} \alpha} \quad (\text{a2-18})$$

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 2.1

Consideriamo una parete di laterizio di spessore  $s=0.25$  m. Il laterizio ha una conducibilità pari a  $0.5$  W/mK. Tale parete separa due ambienti, a temperatura  $T_i$  e  $T_e$  pari rispettivamente a  $20$  °C e  $0$ °C. Supposto che i coefficiente di scambio termico lato esterno e lato interno siano  $\alpha_i = 10$  W/m<sup>2</sup> K e  $\alpha_e = 25$  W/m<sup>2</sup> K, calcolare:

- la conduttanza della parete
  - il flusso termico scambiato
  - le temperature delle due estremità della parete
- [a)  $1.56$  W/m<sup>2</sup> K; b)  $31.25$  W/m<sup>2</sup>; c)  $16.9$  °C,  $1.25$  °C]

### ESERCIZIO 2.2

L'involucro di un frigorifero si può considerare un parallelepipedo di dimensioni  $L \times P \times H = 0.6 \times 0.6 \times 1.5$  m. La parete è costituita da uno strato di schiuma espansa di spessore  $s_1 = 3$  cm e di conducibilità termica  $k_1 = 0.05$  W/m K, ricoperto da una lamiera in acciaio di spessore  $s_2 = 0.5$  mm e di conducibilità termica  $k_2 = 40$  W/m K. La base del frigorifero si può considerare adiabatica. Le altre pareti hanno un coefficiente di convezione interno  $\alpha_i = 3$  W/m<sup>2</sup> K e uno esterno  $\alpha_E = 10$  W/m<sup>2</sup> K. La temperatura interna all'ambiente vale  $T_A = 20$  °C e quella interna vale  $T_i = -25$  °C. Trascurando l'effetto degli spigoli, valutare la potenza termica che è necessario asportare tramite la macchina frigorifera in condizioni di regime per compensare l'afflusso di calore attraverso le pareti stesse

[171 W] (NOTA: questa costituisce solo un'aliquota della potenza del frigorifero, dato che ulteriore potenza è necessaria per refrigerare i cibi introdotti a temperatura ambiente e per compensare gli afflussi di aria calda dovuti alle aperture dello sportello).

### ESERCIZIO 2.3

Una parete in muratura di dimensioni  $4 \times 3$  m reca al centro una finestra di  $1.5 \times 1$  m. Il materiale della parete, che si può considerare omogeneo, ha uno spessore  $s_1 = 12$  cm ed una conducibilità termica  $k_1 = 0.5$  W/m K. La finestra, in vetro, ha uno spessore  $s_2 = 2$  mm ed una conducibilità termica  $k_2 = 1.1$  W/m K. Il coefficiente di convezione interno vale  $\alpha_i = 5$  W/m<sup>2</sup> K e quello esterno vale  $\alpha_E = 15$  W/m<sup>2</sup> K. Entrambi i coefficienti sono stati già corretti per tenere conto dell'irraggiamento. La temperatura interna all'ambiente vale  $T_I = 20$  °C e quella esterna vale  $T_E = 5$  °C. Nell'ipotesi che la parete si possa considerare piana ed infinita, in modo che la temperatura in essa vari solo con lo spessore, determinare la potenza termica scambiata attraverso la medesima e le percentuali di detta potenza scambiate attraverso il muro ed attraverso la finestra.

[395 W, di cui il 21 % attraverso la finestra]

### ESERCIZIO 2.4

La superficie di sabbia di una spiaggia riceve dal sole in una giornata estiva una potenza  $W_{irr} = 400$  W/m<sup>2</sup>, che viene integralmente assorbita da essa. Il coefficiente di scambio termico con l'aria soprastante (corretto per tener conto dell'irraggiamento) vale  $\alpha = 15$  W/m<sup>2</sup> K e la temperatura dell'aria esterna vale  $T_A = 35$  °C. Calcolare la temperatura a cui si porta la sabbia in condizioni di regime. Ripetere il calcolo per una superficie che, essendo opportunamente verniciata, rinvia senza assorbire il 90% della potenza solare incidente.

NOTA: Trascurare lo scambio termico conduttivo tra la superficie ed il sottosuolo.

[61 °C; 38 °C]

### ESERCIZIO 2.5

Il tetto di una baracca in lamiera, di dimensioni  $P \times L = 4 \times 3.5$  m, è costituito da un lamierino di acciaio di spessore  $s_1 = 1.5$  mm e di conducibilità termica  $k_1 = 40$  W/m K. Il coefficiente di convezione interno vale  $\alpha_I = 5$  W/m<sup>2</sup> K e quello esterno vale  $\alpha_E = 15$  W/m<sup>2</sup> K (entrambi i coefficienti sono stati già corretti per tenere conto dell'irraggiamento). La temperatura interna all'ambiente vale  $T_I = 20$  °C e quella esterna vale  $T_E = 5$  °C. Valutare la potenza termica scambiata attraverso il tetto. Determinare quale spessore,  $s_2$ , di conducibilità termica  $k_2 = 0.05$  W/m K debba essere posto sul tetto per ridurre del 90% tale potenza.  
[787 W; 12 mm]

### ESERCIZIO 2.6

Si calcoli la spessore di lana di vetro isolante ( $k = 0,03$  W/m K) necessario affinché la temperatura della superficie esterna di un forno da cucina non sia maggiore di 50 °C. Un termostato garantisce che la temperatura dell'aria interna del forno non superi  $T_I = 300$  °C, la temperatura dell'ambiente esterno vale  $T_E = 14$  °C e il coefficiente di convezione tra la parete del forno e l'ambiente circostante (sia interno che esterno) è  $\alpha_E = \alpha_I = 10$  W/m<sup>2</sup> K. (Sugg. Si può trascurare il contributo delle pareti metalliche del forno stesso).  
[17.8 mm]

### ESERCIZIO 2.7

In una barra cilindrica di un materiale metallico del diametro di 3 cm è presente una generazione volumetrica di calore pari a  $q_s = 10^6$  W/m<sup>3</sup> che supponiamo uniformemente distribuita. La barra è lambita da un gas alla temperatura  $T_a = 30$  °C con coefficiente di scambio termico  $\alpha = 100$  W/m<sup>2</sup>K (convezione forzata). Calcolare:  
a) la temperatura superficiale  $T_p$  della barra;  
b) la potenza termica ceduta dal gas per unità di lunghezza.  
[a) 105 °C; b) 707 W/m]

### ESERCIZIO 2.8

Una barra di rame di un conduttore elettrico, di spessore  $t = 1$  cm, di altezza  $H$  e di lunghezza  $L$  molto maggiore delle due dimensioni precedenti, è percorsa da una corrente in bassa tensione di 5000 A. La potenza dissipata in essa è data, come è noto, da  $W = RI^2$ , dove  $R = \rho L / t H$  è la resistenza elettrica della barra e la resistività elettrica del rame vale  $\rho = 0.017$  μOhm m. Il coefficiente di scambio termico con l'aria circostante (corretto per tener conto dell'irraggiamento) vale  $\alpha = 10$  W/m<sup>2</sup> K e la temperatura dell'aria esterna vale  $T_A = 20$  °C. Calcolare quale altezza deve avere la barra affinché la sua temperatura superficiale non superi i 40 °C.  
[0.32 m]

### ESERCIZIO 2.9

Una certa quantità di carbone giace disposta in posizione orizzontale su una superficie. Lo spessore dello strato di carbone è di 2 metri. Tale letto genera una quantità volumetrica di calore pari a 20 W/m<sup>3</sup>. La temperatura del carbone è uniforme. La temperatura dell'ambiente  $T_\infty$  è pari a 25 °C e il coefficiente di scambio termico tra la massa di carbone e il gas è pari a 5 W/m<sup>2</sup> K. Calcolare la temperatura della superficie superiore della massa di carbone. Si consideri la superficie inferiore è isolata.  
[33 °C]

### **ESERCIZIO 2.10**

Una resistenza da scaldabagno ha la forma di un cilindro di lunghezza  $L = 600$  mm e diametro  $D = 20$  mm. In condizioni normali essa dissipa una potenza  $W = 1$  kW, stando sommersa in acqua alla temperatura  $t_l = 20$  °C, avente un coefficiente di scambio convettivo di  $h_w = 800$  W/m<sup>2</sup> K.

- a) Quale è la temperatura a regime della superficie esterna della resistenza? (Si trascuri il calore dissipato dalle basi del cilindro).
- b) Quale è il valore della temperatura della superficie esterna a regime se viene a mancare l'acqua e la resistenza viene a trovarsi in aria a 20 °C con coefficiente di convezione  $h_a = 20$  W/m<sup>2</sup> K? (Si supponga di poter trascurare anche l'effetto dell'irraggiamento).

[a)  $T = 53.2$  °C, b)  $T = 1346$  °C] (NOTA: in questo secondo caso il risultato abbastanza irrealistico è indice del fatto che in realtà la resistenza brucia).

### **ESERCIZIO 2.11 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)**

Con riferimento all'esercizio precedente, se la resistenza ha una massa  $M = 100$  g e un calore specifico  $c = 700$  J/kg K

- a) stimare la durata del transitorio, ovvero il tempo che trascorre da quando viene a mancare l'acqua e quando la resistenza raggiunge una temperatura molto vicina al valore di regime. (Sugg.: porla uguale a cinque costanti di tempo).

Supponendo che la resistenza bruci alla temperatura di 700 °C, valutare il tempo necessario a raggiungere tale temperatura nei seguenti casi:

1.  $h_a = 20$  W/m<sup>2</sup> K
2.  $h_a = 40$  W/m<sup>2</sup> K
3.  $h_a = 100$  W/m<sup>2</sup> K

[ 1) ~ 450 s]

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 2. Termodinamica degli stati

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.01 – 13.11.06.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo delle metodologie per il calcolo delle proprietà delle sostanze in differenti stati. Una volta introdotti alcuni concetti fondamentali sul comportamento delle sostanze e sulle loro transizioni di fase, vengono illustrati i diagrammi di stato e le tavole termodinamiche, che sono la fonte primaria per ottenere i dati richiesti. Verranno quindi sviluppati modelli di comportamento semplificati, di validità più ristretta, che spesso consentono una più agevole valutazione delle proprietà stesse.

## Stati di aggregazione, fasi e transizione di fase

Si dice che un sistema è costituito da una *sostanza pura* se in esso è presente una sostanza di composizione omogenea e invariabile nel tempo. Si definisce invece *componente* una sostanza di composizione chimica fissata. Una sostanza pura, quindi può essere costituita da un solo componente o da diversi componenti. L'acqua distillata, ad esempio, avendo una formula chimica definita, è una sostanza pura avente un solo componente, mentre l'acqua potabile, a causa dei sali in essa disciolti, è una sostanza pura multicomponente. L'aria, essendo una miscela di gas, è una sostanza pura multicomponente, mentre l'ossigeno è una sostanza pura monocomponente. Fino a quando non si verificano cambiamenti di stato, non vi sono differenze di comportamento tra le sostanze pure monocomponente e pluricomponente.

Una sostanza pura può presentarsi in differenti *stati di aggregazione* fisica: *solido*, *liquido*, *aeriforme*. Per quanto a prima vista questo sia accettabile per tutti, le stesse definizioni di solido, liquido ed aeriforme sono per certi aspetti ambigue e variano a seconda del contesto scientifico in cui ci si trova: nel campo dell'ingegneria, usualmente si definisce *solido* lo stato di aggregazione dotato di forma e volume proprio, *liquido* lo stato di aggregazione dotato di volume, ma non di forma propria e *aeriforme* lo stato di aggregazione caratterizzato dal non avere né forma né volume proprio. Tuttavia, ad un esame più approfondito ed in presenza di misure accurate queste definizioni appaiono carenti, in quanto, indipendentemente dallo stato di aggregazione, una sostanza subisce comunque variazioni di volume per effetto delle variazioni di temperatura e/o di pressione. In chimica, per esempio, si usa definire solida una sostanza caratterizzata dall'aver un reticolo cristallino: in tale contesto, sostanze amorfe (ovvero prive di reticolo cristallino) quali il vetro e l'asfalto dovrebbero essere definiti liquidi!

Ciascuno degli stati di aggregazione di una sostanza pura è chiamato *fase*; più propriamente si definisce fase l'insieme di tutte le parti omogenee di un sistema aventi lo stesso valore delle proprietà intensive e specifiche: es. l'insieme delle bolle di vapore all'interno di un liquido. All'interno di un sistema, possono essere presenti più fasi che sono delimitate da *interfacce* attraverso le quali alcune proprietà (ad es. la densità) sono *discontinue* (nel caso precedente, attraversando la superficie di una bolla la densità passa bruscamente dal valore tipico del liquido a quello tipico del vapore). Caratteristica tipica delle fasi è che esse possono essere separate meccanicamente (es. se si pone in quiete un sistema contenente bolle di vapore, per gravità tutto il vapore si porterà verso l'alto).

Descriviamo adesso un semplice esperimento allo scopo di esaminare il comportamento di una sostanza pura monocomponente che cambia fase

Nel seguito, ci renderemo conto che non sempre le transizioni di fase avvengono nel modo descritto, e che per particolari valori della pressione del sistema le trasformazioni possono avvenire con modalità leggermente diverse.

Si consideri una massa unitaria di sostanza pura monocomponente in fase solida contenuta in un sistema pistone-cilindro. Si supponga che la trasformazione sia reversibile. Essendo la trasformazione isobara, segue che il calore ceduto al sistema è pari all'incremento di entalpia (vedi Cap.1), il che si manifesta con un aumento della temperatura e del volume. La dilatazione per effetto del riscaldamento è tuttavia di piccolissima entità. Somministrando ancora calore ha inizio il processo di  *fusione*  (il processo inverso è detto  *solidificazione* ), ossia inizia a comparire la fase liquida e contemporaneamente si nota che la temperatura cessa di crescere e resta costante. In questa condizione il sistema è detto  *bifasico* . Sebbene la pressione e la temperatura siano uniformi all'interno del sistema bifasico, le proprietà specifiche, come la densità, presentano una discontinuità passando da una fase all'altra. La ulteriore somministrazione di calore comporta un aumento progressivo della massa della fase liquida fino alla completa scomparsa della fase solida.

La quantità di calore fornita al sistema per effettuare il  *cambiamento di fase*  dell'intera massa presente è una misura dell' *entalpia di fusione* . Quest'ultima può anche essere vista come somma della variazione di energia interna del sistema e del lavoro di dilatazione scambiato con l'ambiente durante la trasformazione del solido in liquido.

Quando la fase solida è completamente scomparsa, la temperatura comincia nuovamente ad aumentare fino a quando non compare la fase aeriforme ed ha inizio l' *evaporazione*  (il processo inverso è detto  *condensazione o liquefazione* ). L'energia termica fornita successivamente comporta un aumento della quantità di aeriforme a temperatura costante. Quando la sostanza è tutta in fase aeriforme, il suo volume è notevolmente maggiore di quello della fase liquida, e, continuando a somministrare calore al sistema, la temperatura cresce nuovamente.

Ripetendo l'esperimento per differenti valori di pressione si osserva che i passaggi di fase solido-liquido e liquido-aeriforme avvengono sempre a temperatura costante, ma il valore di tale temperatura varia al variare della pressione.

Ad esempio, per l'acqua, alla pressione di 0.5 bar la transizione liquido-vapore avviene alla temperatura di 76 °C; alla pressione di 1 atm (1.01325 bar) la transizione avviene a  $T = 100$  °C; alla pressione di 2 bar la transizione avviene a  $T = 120.2$  °C. In alta montagna (2000 m) dove la pressione atmosferica media vale 79.5 kPa, la transizione avviene a 93 °C.

La  *regola delle fasi*  (o  *di Gibbs* ) dà importanti informazioni sui legami tra temperatura e pressione per una sostanza pura monocomponente

$$V = 3 - F \quad (2.1)$$

dove  $F$  indica il numero delle fasi coesistenti in equilibrio e  $V$ , detta  *varianza* , indica il numero di variabili indipendenti tra  $p$  e  $T$ . Da tale regola si evince che:

- un sistema costituito da  *una sola*  fase è  *bivariante* : è possibile variare arbitrariamente sia la pressione che la temperatura senza mutare il numero di fasi presenti.
- un sistema costituito da  *due*  fasi in equilibrio è  *monovariante* : una volta assegnata o la pressione o la temperatura, non é possibile cambiare arbitrariamente l'altra variabile senza

mutare il numero di fasi presenti; ovvero, esiste una *corrispondenza biunivoca* tra la temperatura e la pressione di un sistema bifasico in equilibrio.

- un sistema costituito da tre fasi in equilibrio è *zerovariante*: ovvero, esiste una sola coppia di valori di temperatura e di pressione per cui questo può avvenire. Tali valori sono detti *pressione tripla e temperatura tripla*.

### LA SUPERFICIE $p-v-T$

Abbiamo più volte ribadito che lo stato di una sostanza pura è completamente identificato da due variabili di stato indipendenti, oltre alla massa del sistema stesso.

Più precisamente, il *principio di stato* stabilisce ulteriori limitazioni a questa regola: in particolare, il sistema deve interagire con l'esterno scambiando solo calore e lavoro meccanico e l'influenza del moto macroscopico e del campo gravitazionale deve essere trascurabile. Un tale sistema viene detto *sistema semplice*.

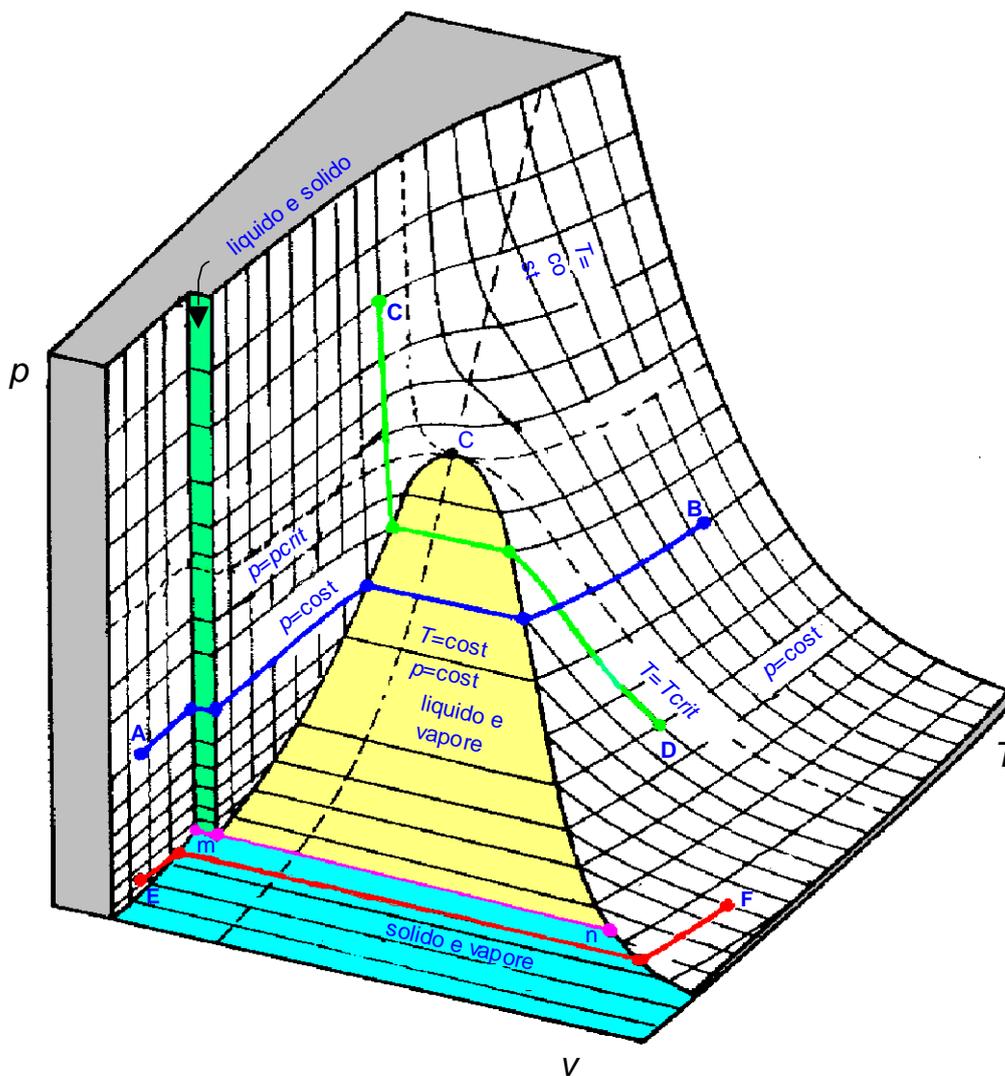


Figura 1. Superficie  $p-v-T$

Conseguentemente tutti gli stati di equilibrio di un tale sistema possono essere rappresentati da una superficie in uno spazio a tre dimensioni  $p, v, T$ ; tale superficie è detta *superficie caratteristica*, o *superficie  $p$ - $v$ - $T$*  della sostanza. La superficie suddetta ha qualitativamente l'aspetto indicato in Fig.1. E' da notare che la figura non è in scala in quanto i volumi specifici del solido e del liquido sono in genere di alcuni ordini di grandezza inferiori a quello dell'aeriforme.

Si nota che i punti rappresentativi dei possibili *stati monofasici* costituiscono tre regioni corrispondenti alle fasi solida, liquida ed aeriforme. Tali regioni sono separate da altre tre (in colore) che rappresentano gli *stati bifasici*: un sistema plurifasico in equilibrio è detto *saturo*. Osservando la superficie caratteristica  $f(p, v, T) = 0$  appare chiaro che nelle tre regioni monofasiche lo stato è univocamente determinato dalla conoscenza dei valori di una qualsiasi coppia di coordinate tra  $p, v$  e  $T$ , in quanto le tre proprietà sono tra loro indipendenti.

Nelle regioni bifasiche, invece, temperatura e pressione sono tra loro dipendenti; fissata ad esempio la temperatura, due fasi possono coesistere in equilibrio in corrispondenza di un solo valore di pressione. Per tale motivo le tre regioni bifasiche sono dei settori cilindrici con generatrice parallela all'asse dei volumi specifici. La conoscenza di  $p$  e  $T$ , in questo caso, non permette di individuare univocamente lo stato, ma il segmento luogo degli infiniti possibili stati di equilibrio per la miscela, ciascuno dei quali corrisponde ad un diverso valore del volume specifico.

Si osserva ancora che le zone di coesistenza delle fasi liquido-vapore, solido-liquido e solido-vapore confinano lungo una linea ( $m$ - $n$ ): in queste condizioni le tre fasi coesistono in equilibrio e lo stato è quindi detto *stato triplo*: come anticipato precedentemente, questo stato è caratterizzato da un'unica coppia di valori di pressione e temperatura, (detti *pressione tripla* e *temperatura tripla*) caratteristici della sostanza considerata.

Sul diagramma è anche rappresentato l'andamento di trasformazioni a *pressione costante* (A-B, E-F) ed a *temperatura costante* (C-D).

Per continuare le nostre considerazioni sulla superficie caratteristica, appare più opportuno considerare le sue proiezioni sul piano  $p$ - $v$  (diagramma di Andrews) e sul piano  $p$ - $T$  (diagramma di Regnault).

### **Diagramma pressione-volume specifico (diagramma di Andrews)**

Il diagramma  $p$ - $v$ , ottenuto proiettando la superficie caratteristica  $f(p, v, T) = 0$  sul piano pressione-volume specifico, è riportato qualitativamente in Fig.2 per una sostanza pura monocomponente con una sola fase solida che fondendo espande. Sia le regioni monofasiche che quelle bifasiche della superficie caratteristica si proiettano in questo piano come aree. La linea tratteggiata  $abcdef$  rappresenta una *trasformazione isoterma*. Si nota che le curve *isoterme* (luogo degli stati che corrispondono alla stessa temperatura) hanno un tratto orizzontale all'interno delle zone bifasiche: infatti, poiché in tali regioni pressione e temperatura non sono indipendenti, le isoterme divengono anche isobare (e per questo talvolta sono dette isotermobariche).

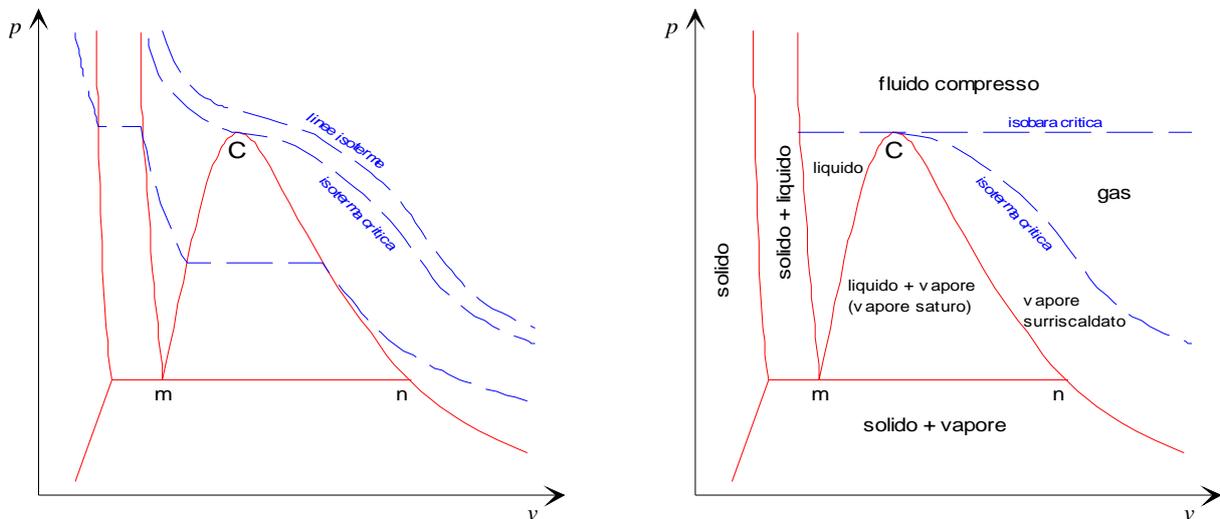
Le linee che delimitano le regioni bifasiche sono rappresentative di stati in cui la sostanza è ancora in condizioni di saturazione: in particolare per la miscela liquido-aeriforme si avranno rispettivamente solo liquido saturo e solo vapore saturo secco, e quindi le linee  $mC$  ed  $nC$  sono dette *curva limite inferiore* e *curva limite superiore*. Tali curve tendono a convergere con l'aumento della pressione (il che vuol dire che la differenza tra il volume specifico del vapore saturo secco e del liquido saturo diminuisce all'aumentare della pressione) e si

uniscono in un punto che viene detto *punto critico*. I valori di temperatura e pressione corrispondenti a tale stato sono detti *temperatura critica* e *pressione critica* e sono caratteristici di ogni particolare sostanza (es. per l'acqua si ha  $p_c = 221$  bar,  $T_c = 364$  °C; per le altre sostanze, vedi Tab.a1 in appendice). La particolare isoterma che passa per il punto critico viene detta *isoterma critica*.

Si denotano inoltre con le dizioni di (v. Fig.2):

- *liquido sottoraffreddato* o *compresso* gli stati il cui punto rappresentativo è a sinistra della curva limite inferiore e al di sotto della isobara critica;
- *liquido saturo* gli stati che sono sulla curva limite inferiore;
- *vapore saturo* o *miscela bifase* gli stati interni alla regione bifasica liquido-gas;
- *vapore saturo secco* gli stati che sono sulla curva limite superiore;
- *vapore surriscaldato* gli stati compresi tra la curva limite superiore e l'isoterma critica.
- *gas* gli stati compresi al di sopra della isoterma critica ed al di sotto della isobara critica.
- *fluido compresso* gli stati al di sopra della isobara critica;

Le definizioni di *gas* e *fluido compresso* variano leggermente da un testo ad un altro. Alcuni testi definiscono *gas* tutti gli stati al di sopra dell'isoterma critica.



**Figura 2.** Diagramma di Andrews ( $p-v$ ) e relative zone di esistenza delle fasi

### **Titolo del vapore saturo**

Osservando il piano  $p-v$  si nota che la conoscenza del volume specifico e della pressione (oppure della corrispondente temperatura) identifica lo stato di un vapore saturo. Risulta comodo definire una nuova proprietà di stato, detta *titolo* del vapore saturo ed indicata con  $x$ , che esprime la composizione massica della miscela

$$x = \frac{\text{massa del vapore}}{\text{massa totale del sistema}} = \frac{M_g}{M_{TOT}} \quad (2.2)$$

Il titolo è una grandezza adimensionale definita solo per il vapore saturo, e può assumere valori compresi tra 0 (curva limite inferiore) ed 1 (curva limite superiore).

Il luogo dei punti aventi eguale titolo definisce sui diagrammi di stato le curve *isotitole* che, come quelle estreme coincidenti con le curve limiti inferiore e superiore, convergono tutte nel punto critico.

Il volume specifico può essere espresso in funzione del titolo e dei volumi del liquido saturo e del vapore saturo secco sfruttando il fatto che il volume è una proprietà additiva (nel seguito, i pedici *f* e *g* fanno riferimento rispettivamente al liquido saturo ed al vapore saturo secco)

$$V = V_f + V_g = M_f v_f + M_g v_g$$

$$v = \frac{V}{M} = \frac{M_f}{M} v_f + \frac{M_g}{M} v_g = (1-x)v_f + xv_g \quad (2.3)$$

da cui infine

$$v = v_f + x(v_g - v_f)$$

La relazione precedente mostra che per un vapore saturo esiste, a ciascuna pressione o temperatura, una corrispondenza biunivoca tra volume specifico e titolo; lo stato può quindi essere caratterizzato anche dalla coppia di proprietà *p* (oppure *T*) ed *x*.

La relazione suddetta ha anche una facile interpretazione grafica: il titolo nel punto *d* di Fig.2 è dato infatti dal rapporto delle lunghezze dei segmenti,  $\frac{cd}{ce}$ .

Relazioni simili valgono ovviamente per le altre proprietà specifiche, ovvero energia interna, entalpia ed entropia (la dimostrazione è analoga a quella riportata sopra per *v*):

$$u = u_f + x(u_g - u_f)$$

$$h = h_f + x(h_g - h_f) \quad (2.4)$$

$$s = s_f + x(s_g - s_f)$$

Le relazioni suddette permettono di ricavare *v*, *u*, *h* e *s* per una miscela bifase noti *x* e le corrispondenti proprietà del liquido saturo e del vapore saturo secco. Consentono anche, viceversa, di ricavare il titolo, una volta nota una qualsiasi tra le variabili *v*, *u*, *h* e *s*, e le corrispondenti proprietà del liquido saturo e del vapore saturo secco.

Oltre al titolo, in alcune applicazioni ha interesse definire il *grado di vuoto*,  $\epsilon$ , ovvero il rapporto tra il *volume* occupato dalla fase vapore ed il volume totale, come illustrato nel seguente esempio.

### **ESEMPIO 2.1**

Si consideri una bombola del volume  $V = 15$  L che contiene  $M = 2$  kg di propano, a temperatura ambiente di  $20$  °C. Determinare titolo e grado di vuoto.

 *La soluzione è riportata nel file C2GVUOTO.XLS*

Il volume specifico vale:

$$v = \frac{V}{M} = \frac{0.015}{2} = 0.0075 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Le tabelle termodinamiche forniscono per il propano in condizioni di saturazione alla temperatura di  $20$  °C, una pressione di saturazione di  $0.83$  MPa, ed i volumi specifici del liquido saturo e del vapore saturo secco valgono rispettivamente  $v_f = 0.001999$  e  $v_g = 0.05525$

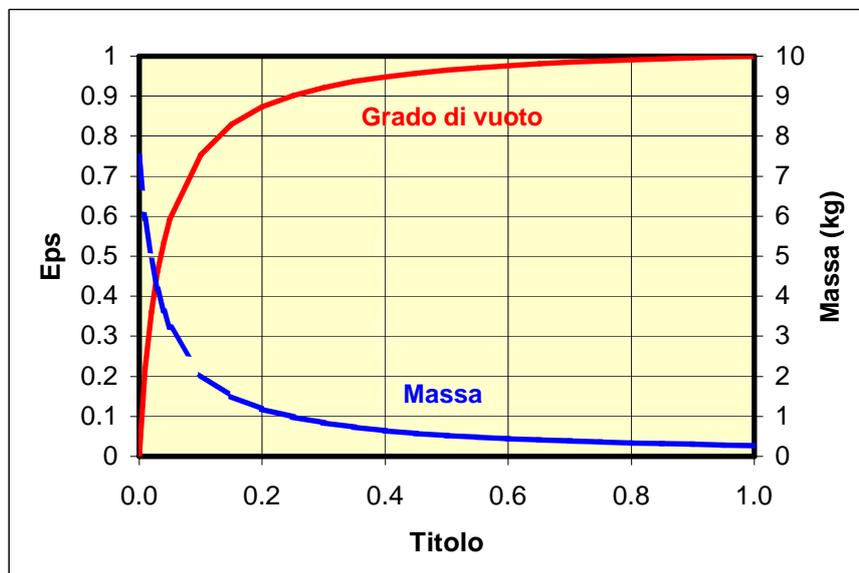
m<sup>3</sup>/kg. Conseguentemente, dato che il volume specifico è compreso tra i due valori indicati, il fluido è effettivamente in condizioni di saturazione ed il titolo è dato da, v. Eq.(2.3)

$$x = \frac{v - v_f}{v_g - v_f} = \frac{0.0075 - 0.001999}{0.05525 - 0.001999} = 0.1033$$

Il grado di vuoto si può determinare da

$$\varepsilon = \frac{V_g}{V} = \frac{M_g v_g}{V} = \frac{x M v_g}{V} = \frac{x v_g}{v} = \frac{0.1033 \cdot 0.05525}{0.0075} = 0.761$$

Notare che a causa dell'alto volume specifico della fase vapore, il grado di vuoto cresce molto più rapidamente del titolo. Questo è mostrato in Fig.3 , dove, *a parità di volume totale del recipiente*, si riporta in funzione del titolo la massa di fluido contenuta nel recipiente ed il corrispondente grado di vuoto. Inoltre, trattandosi di fluido in saturazione, la pressione della bombola dipende solo dalla temperatura e non dà alcuna indicazione sulla massa di fluido contenuta nel recipiente.



**Figura 3.** Variazione della massa contenuta nel recipiente e del titolo con il grado di vuoto.

□

### **Diagramma $p-T$ (diagramma di Regnault)**

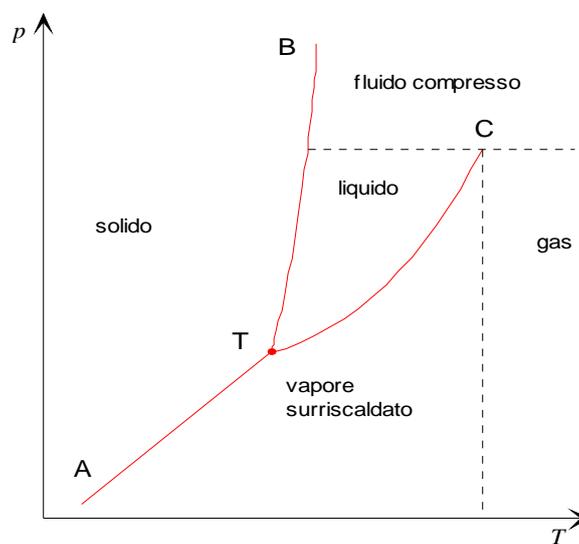
La proiezione della superficie caratteristica sul piano  $p-T$  è detta appunto diagramma  $p-T$  o *diagramma di Regnault* o anche *diagramma di fase*. In Fig.4 è riportato il diagramma  $p-T$  relativo ad una sostanza pura monocomponente che fondendo espande.

Poiché, come si è visto le regioni bifasiche della superficie caratteristica sono rappresentate da settori cilindrici con generatrice parallela all'asse del volume specifico, le loro proiezioni sul piano  $p-T$  sono delle linee e, in particolare, la linea comune alle tre regioni bifasiche (linea tripla) si proietta in un punto detto *punto triplo*. La linea AT è detta di *sublimazione o condensazione*, la linea BT è detta di *fusione o solidificazione*, la linea CT è detta di *evaporazione o condensazione*. Esse delimitano i domini di esistenza delle fasi solida, liquida ed aeriforme, come indicato in Fig.4.

La linea di solidificazione ha pendenza positiva nella figura, mentre il contrario accade per sostanze che solidificando espandono (come l'acqua).

La corrispondenza biunivoca tra  $p$  e  $T$  per sistemi bifasici in equilibrio, è di notevole importanza applicativa; in questo ambito lo è soprattutto quella relativa alle miscele liquido vapore in condizioni di saturazione. Il legame funzionale rappresentato dalla linea CT è fornito in forma tabellare per i vari fluidi nelle cosiddette *tabelle del vapore saturo*, che riportano anche altre grandezze utili che utilizzeremo in seguito. Un esempio per l'acqua è riportato in Tab.1.

E' bene sottolineare infine che la conoscenza della pressione e della temperatura sebbene non sempre consenta l'identificazione dello stato, permette in ogni caso d'individuare la fase o le fasi presenti, come chiarito dal seguente esempio.



**Figura 4.** Diagramma di fase o di Regnault ( $p$ - $T$ ) e relativi campi di esistenza delle fasi.

### **ESEMPIO 2.2 – Identificazione dello stato**

Si consideri un sistema costituito da acqua alla temperatura di 60 °C ed alla pressione di  $7 \times 10^5$  Pa; ci si chiede se lo stato è identificato e quali fasi costituiscono il sistema.

Consultando la Tab.1, od un programma di calcolo delle proprietà termodinamiche, si deduce che la pressione è maggiore di quella a cui il sistema dovrebbe trovarsi per essere in condizione di saturazione alla temperatura di 60 °C, (ovvero 0.2 bar) ed inferiore alla pressione critica (221.5 bar). Esso è quindi costituito dalla sola fase liquida (liquido sottoraffreddato) e, per la regola delle fasi, lo stato è identificato dalla conoscenza dei valori di pressione e temperatura.

□

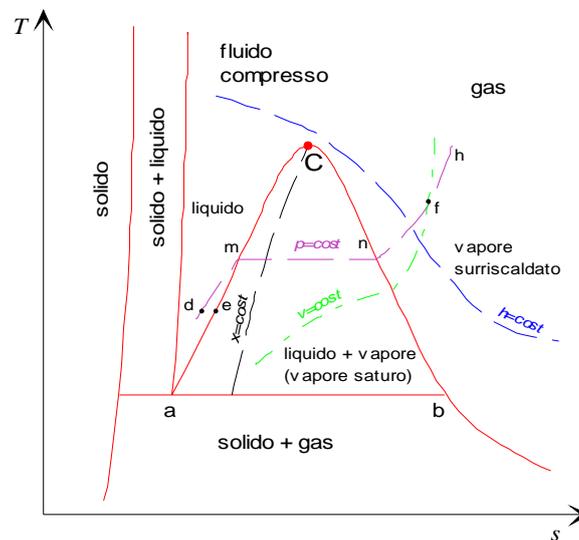
### **Altri diagrammi di stato**

#### **Diagramma temperatura-entropia**

In Fig.5 è riportato un diagramma qualitativo temperatura-entropia specifica per una sostanza pura monocomponente con una sola fase solida che fondendo espande. La zona bifasica

liquido-aeriforme è delimitata dall'isoterma del punto triplo (segmento  $ab$ ) e dalle curve limiti inferiore e superiore,  $ac$  e  $bc$ . All'interno di questa regione le isoterme sono anche isobare. Le curve a pressione costante (dette *isobare*) hanno andamento  $d-m-n-h$ . Nella regione del liquido le isobare si addensano sulla curva limite inferiore in quanto, come si vedrà in seguito, l'entropia della sostanza in fase liquida è poco dipendente dalla pressione. Pertanto in due stati di equilibrio caratterizzati dalla stessa temperatura ma da valori di pressione diversi, come i punti  $d$  ed  $e$  riportati in Fig.5, il valore dell'entropia specifica è praticamente lo stesso e quindi i due punti sono di fatto coincidenti.

Si noti che in Fig.5 la zona del liquido sottoraffreddato è stata esageratamente espansa per meglio evidenziare quanto detto; su di un diagramma quantitativo la regione del liquido è praticamente coincidente con la curva limite inferiore. Una rappresentazione in scala per l'acqua è riportata in appendice, Fig.a2.



**Figura 5.** Diagramma entropico o  $T$ - $s$  e relativi campi di esistenza delle fasi. La isobara critica (che delimita inferiormente la zona del fluido compresso) e la isoterma critica (che divide la zona del gas da quella del vapore surriscaldato) non sono riportate per non sovraccaricare il disegno.

La pendenza di un'isobara può essere valutata dalla relazione tra entropia, temperatura e pressione:

$$ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{(B_h - v)}{T} dp$$

da cui

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \quad , \quad \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p}$$

Ne segue che l'isobara è una curva monotona crescente, avendo pendenza positiva pari a  $T/c_p$ . In relazione a questo ultimo punto si nota che spostandosi lungo un'isobara verso valori crescenti della temperatura, dal punto  $n$  al punto  $h$  di Fig.5, la pendenza della curva aumenta, essendo trascurabile la variazione di  $c_p$  rispetto a quella di  $T$ .

Dalla seconda relazione di Gibbs ( $dh = Tds + vdp$ ) segue che le aree sottese dalle isobare rappresentano le variazioni di entalpia specifica; in particolare, l'area sottesa al tratto di isobara-isoterma compreso tra le curve limiti rappresenta l'entalpia di vaporizzazione.

Sul diagramma possono essere tracciate anche le linee a volume costante, dette *isocore*. Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per le isobare, si determina che la loro pendenza è data da  $T/c_v$ . Dato che è sempre  $c_v < c_p$ , le isocore sono più inclinate delle isobare.

### Diagramma entalpia-entropia

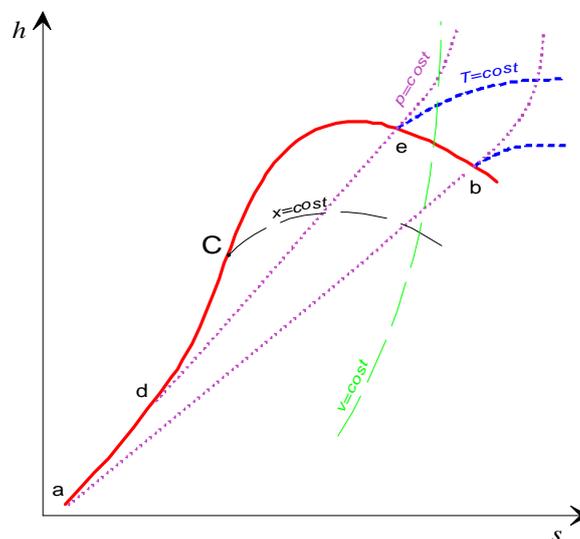
Il diagramma entalpia-entropia specifiche, introdotto nel 1904 dal triestino Ricard Mollier (1863-1935), è, come si vedrà nel seguito, di grande utilità pratica per il calcolo dei sistemi aperti a regime.

In Fig.6 è riportato un diagramma qualitativo  $h-s$ , per una sostanza pura monocomponente, relativamente alle zone di maggior interesse, ovvero alla regione bifasica liquido-gas ed a quella dell'aeriforme. Iniziando col considerare la regione bifasica, si osserva che le isobare-isoterme hanno andamento lineare; infatti, la seconda equazione di Gibbs fornisce:

$$ds = \frac{1}{T} dh - \frac{v}{T} dp$$

da cui

$$\left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_p = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T \tag{2.6}$$



**Figura 6.** Diagramma di Mollier ( $h-s$ )

Dalla Fig.6 si rileva che l'isobara  $de$  ha pendenza maggiore della  $ab$ ; ciò è deducibile dalla equazione precedente notando che la temperatura di saturazione corrispondente alla pressione della  $de$  è maggiore di quella corrispondente alla pressione della  $ab$ . Si deduce ancora che al punto critico è:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T_c \neq 0 \quad (2.7)$$

e che quindi il punto critico *non* è il massimo della curva *acb* (vedi Fig.6).

Dalla Eq.(2.7) segue anche che l'isobara è una curva monotona crescente. Le isoterme in corrispondenza della curva limite superiore si separano dalle isobare e tendono, al diminuire della pressione, a diventare orizzontali. Come vedremo in seguito, ciò è in accordo con il fatto che l'entalpia, secondo il modello di gas ideale, è funzione soltanto della temperatura.

Percorrendo l'isobara nel verso delle temperature crescenti la pendenza (data dalla temperatura stessa) va aumentando, pertanto le curve a pressione costante presentano la concavità rivolta verso l'alto.

In Appendice è riportato il diagramma di Mollier per l'acqua, Fig.a3. Lo stato scelto come riferimento è quello in cui si ha solo liquido saturo al punto triplo; per tale stato si ritiene arbitrariamente  $h = s = 0$ .

### Diagramma pressione-entalpia

In Fig.7 è riportato un diagramma qualitativo pressione-entalpia specifica per una sostanza pura monocomponente, relativamente alle zone di maggior interesse nell'ambito della termodinamica applicata. Questo diagramma è di particolare utilità per il calcolo delle proprietà nei componenti costituenti un ciclo frigorifero.

La zona delle miscele bifasiche è delimitata dalle curve limite; il vertice di tale regione è il punto critico, C. La lunghezza del tratto di isobara nella regione bifasica rappresenta l'entalpia di vaporizzazione corrispondente a quella pressione di saturazione. La lunghezza di questi segmenti decresce all'aumentare della pressione. Le isoterme hanno andamento praticamente verticale nella zona dei liquidi in quanto, come si vedrà successivamente, la dipendenza dell'entalpia di un liquido dalla pressione è trascurabile. Nella regione bifasica l'isoterma è ovviamente orizzontale; nella zona del vapore surriscaldato assume pendenza negativa e tende a diventare verticale nel campo delle basse pressioni in quanto (vedi in seguito) l'entalpia di un aeriforme a bassa pressione è funzione solo della temperatura.

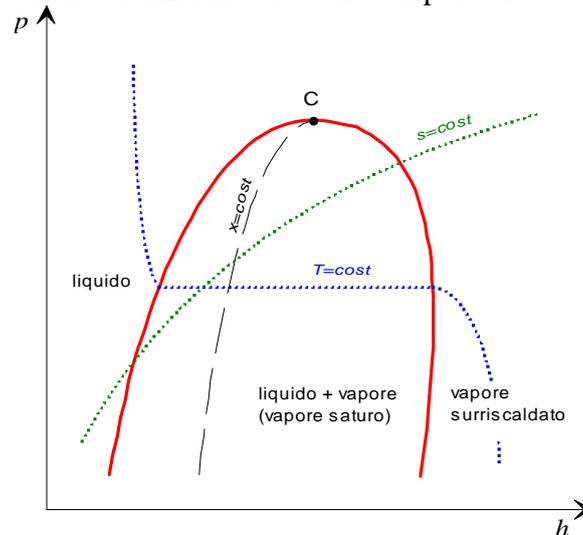


Figura 7. Diagramma  $p-h$

Le *isoentropiche*, linee ad entropia costante, sono anch'esse rappresentate in Fig.7.

Dalla seconda equazione di Gibbs si può ricavare che le isoentropiche hanno in ciascun punto pendenza pari al valore della densità nel punto stesso.

### Le tavole termodinamiche ed i programmi di calcolo

I diagrammi termodinamici forniscono utili informazioni qualitative sull'andamento delle trasformazioni ed anche risultati quantitativi non troppo accurati. Per ottenere tali risultati con una migliore precisione, si ricorre alle tabelle termodinamiche o ai programmi per il calcolo delle proprietà termodinamiche.

Le tabelle termodinamiche sono in genere di due tipi: *tabelle del vapore saturo* (notare che il termine vapore non fa necessariamente riferimento all'acqua) e *tabelle del liquido compresso e del vapore surriscaldato*.

La tabella del vapore saturo fa riferimento alla sostanza in condizioni di saturazione. Sebbene talvolta essa possa avere una forma leggermente differente, essa contiene in genere le informazioni riportate in Tab.1. Le colonne A e B contengono rispettivamente la pressione e la temperatura di saturazione: esse rappresentano quindi quantitativamente il legame funzionale rappresentato dalla linea di evaporazione-condensazione sul diagramma  $p-T$ . Le colonne C e D contengono rispettivamente il volume specifico del liquido saturo e quello del vapore saturo secco: da esse, noto (oltre naturalmente alla pressione od alla temperatura) il titolo e tramite la Eq.(2.3) è possibile ricavarsi il volume specifico della miscela bifasica. Tali colonne sono anche la rappresentazione numerica delle curve limite inferiore e superiore sul diagramma  $p-v$ . Le colonne E e F rappresentano rispettivamente la entalpia specifica del liquido saturo e quella del vapore saturo secco (curve limiti inferiore e superiore nel diagramma  $p-h$ ). Infine le colonne G ed H rappresentano l'entropia specifica del liquido saturo e quella del vapore saturo secco (curve limiti inferiore e superiore nel diagramma  $T-s$ ). Ovviamente, noto il titolo (oltre naturalmente alla pressione od alla temperatura) è possibile con questa tabella calcolare il volume specifico, l'entalpia e l'entropia specifica di una miscela bifasica utilizzando le Eqq.(2.3)-(2.4). Anche l'energia interna può essere calcolata sottraendo il prodotto  $pv$  al valore dell'entalpia.

Le tabelle del liquido compresso e vapore surriscaldato hanno l'aspetto riportato in Tab.2. Esse contengono l'andamento delle proprietà  $v$ ,  $h$  ed  $s$  in funzione della temperatura lungo una isobara. Si noti il brusco salto che tali proprietà subiscono quando la temperatura supera il valore di saturazione e si passa dalla fase liquida quella di vapore surriscaldato (tra 120 e 130°C nel caso considerato).

Le tabelle termodinamiche presentano una serie di inconvenienti, tra cui il maggiore consiste nella necessità di interpolare il valori quando non è riportato in esse il valore esatto di temperatura o pressione richiesto. Nel caso del vapore surriscaldato, è talvolta necessario interpolare tra due tabelle relative a differenti pressioni. A questo ha fatto di recente rimedio la disponibilità di programmi di calcolo che sono in grado di fornire le proprietà di una ampia gamma di sostanze per qualunque valore delle variabili di ingresso (vedi bibliografia).

**ESEMPIO 2.3 – Riscaldamento a volume costante**

Si consideri una bombola del volume  $V = 15$  L che contiene  $M = 2$  kg di propano, a temperatura ambiente di  $20$  °C. Determinare il valore raggiunto dalla pressione se il contenitore si porta alla temperatura di  $80$  °C e l'energia che è necessario fornire.

Abbiamo a che fare con un sistema chiuso, dal contorno rigido: questo implica che non ci sono scambi di lavoro con l'esterno ed il volume si mantiene costante.

Il volume specifico della miscela (calcolato nell'esempio 2.1) vale  $0.0075$  m<sup>3</sup>/kg.

Lo stati iniziale e finale sono identificati dalla coppia di variabili di stato volume specifico (costante) e temperatura (variabile)

Tramite il programma CATT, si ottengono i dati seguenti per il propano nello stato iniziale e finale.

Stato	T	p	v	u	h	s	x	
	°C	MPa	m <sup>3</sup> /kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg K		
1.	20	0.8362	0.0075	-18.23	-11.95	4.577	0.1033	Miscela bifase
2.	80	3.131	0.0075	217.7	241.1	5.305	0.5271	Miscela bifase

Da cui si vede che nello stato finale il fluido è ancora in condizioni di saturazione e la pressione supera i 3 MPa (30 bar): questo potrebbe provocare il cedimento del contenitore ed illustra chiaramente il pericolo derivante dall'espore bombole chiuse alle fonti di calore.

La energia necessaria per la trasformazione viene fornita sotto forma di calore (abbiamo escluso gli scambi di lavoro essendo il recipiente rigido) e per il primo principio della termodinamica abbiamo

$$du = dq$$

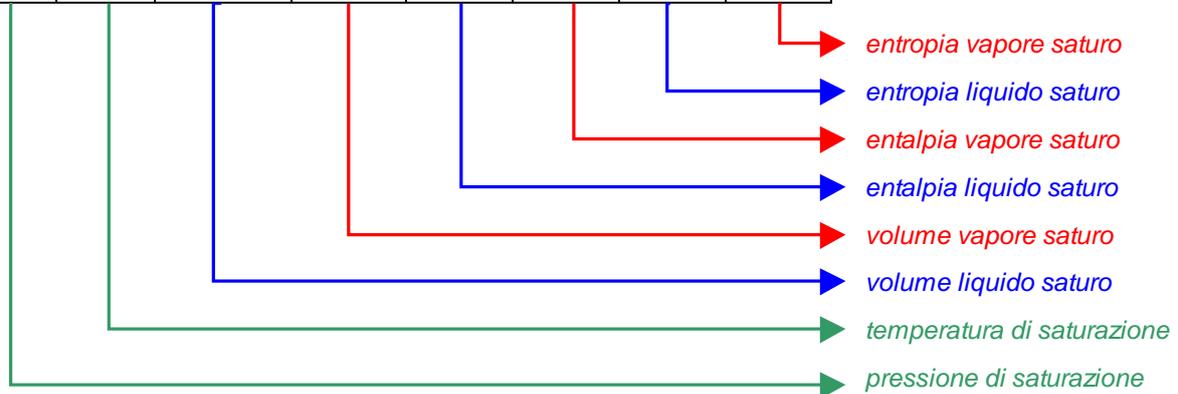
$$q_{12} = u_2 - u_1$$

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = M (u_2 - u_1) = 2 \cdot (217.7 + 18.2) = 472 \text{ kJ}$$

Si potrebbe in seguito determinare, in base a considerazioni di trasmissione del calore, il tempo necessario perché la trasformazione avvenga (ovvero il tempo necessario a trasferire la quantità di calore  $Q_{12}$ ), che è importante conoscere per stabilire i tempi di intervento di eventuali sistemi di sicurezza.



A	B	C	D	E	F	G	H
$p$ [bar]	$T$ [°C]	$v_f$ [m <sup>3</sup> /Kg]	$v_g$ [m <sup>3</sup> /Kg]	$h_f$ [kJ/Kg]	$h_g$ [kJ/Kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
0.05	32.898	0.0010052	28.19	137.77	2561.6	0.4763	8.3960
0.07	39.025	0.0010074	20.53	163.38	2572.6	0.5591	8.2767
0.08	41.534	0.0010084	18.10	173.86	2577.1	0.5925	8.2296
1.0	99.362	0.0010434	1.694	417.51	2675.4	1.3027	7.3598
2.0	120.23	0.0010608	0.8854	504.70	2706.3	1.5301	7.1298
10.0	179.98	0.0011274	0.1943	762.61	2776.2	2.1382	6.5828
15.0	198.29	0.0011539	0.1317	844.67	2789.9	2.3145	6.4406
17.0	204.31	0.0011633	0.1166	871.84	2793.4	2.3713	6.3957
20.0	212.37	0.0011766	0.09954	908.59	2797.2	2.4469	6.3367
30.0	233.84	0.0012163	0.06663	1008.4	2802.3	2.6455	6.1837
40.0	250.33	0.0012521	0.04975	1087.4	2800.3	2.7965	6.0685
50.0	263.91	0.0012858	0.03943	1154.5	2794.2	2.9206	5.9735
60.0	275.55	0.0013187	0.03244	1213.7	2785.0	3.0273	5.8908
70.0	285.79	0.0013513	0.02737	1267.4	2773.5	3.1219	5.8162
90.0	303.31	0.0014179	0.02050	1363.7	2744.6	3.2867	5.6820
100	310.96	0.0014526	0.01804	1408.0	2727.7	3.3605	5.6198
110	318.05	0.0014887	0.01601	1450.6	2709.3	3.4304	5.5595
120	324.65	0.0015268	0.01428	1491.8	2689.2	3.4972	5.5002
130	330.83	0.0015672	0.01280	1532.0	2667.0	3.5616	5.4408
140	336.64	0.0016106	0.01150	1571.6	2642.4	3.6242	5.3803
148	341.06	0.0016481	0.01056	1603.1	2620.7	3.6736	5.3305
150	342.13	0.0016579	0.01034	1611.0	2615.0	3.6859	5.3178
160	347.33	0.0017103	0.009308	1650.5	2584.9	3.7471	5.2531
170	352.26	0.0017696	0.008371	1691.7	2551.6	3.8107	5.1855
180	356.96	0.0018399	0.007498	1734.8	2513.9	3.8765	5.1128
200	365.70	0.0020370	0.005877	1826.5	2418.4	4.0149	4.9412



**Tab.1 - Proprietà termodinamiche del vapor d'acqua saturo**

$p=2$ bar			
Temp.	Volume Specifico	Entalpia Specifica	Entropia Specifica
°C	m <sup>3</sup> /kg	kJ/kg	kJ/kg/K
10	0.001	42.19	0.151
20	0.001002	84.13	0.2965
30	0.001004	125.9	0.4368
40	0.001008	167.7	0.5724
50	0.001012	209.5	0.7036
60	0.001017	251.3	0.831
70	0.001023	293.1	0.9547
80	0.001029	335	1.075
90	0.001036	377	1.192
100	0.001043	419.1	1.307
110	0.001052	461.3	1.418
120	0.00106	503.7	1.528
130	0.9102	2727	7.179
140	0.935	2748	7.23
150	0.9596	2769	7.279
175	1.02	2820	7.397
200	1.08	2870	7.507
225	1.14	2921	7.61
250	1.199	2971	7.709
275	1.258	3021	7.802
300	1.316	3072	7.893
350	1.433	3174	8.063
400	1.549	3277	8.222
450	1.665	3381	8.371
500	1.781	3487	8.513
550	1.897	3595	8.648
600	2.013	3704	8.777

**Tab.2 - Acqua compressa e vapore surriscaldato a  $p=2$  bar**

## MODELLI SEMPLIFICATI DEI FLUIDI TERMODINAMICI: IL GAS IDEALE E IL LIQUIDO INCOMPRESSIBILE.

La equazione di stato  $f(p, v, T) = 0$  assume nel caso generale una forma matematica assai complessa che la rende inutilizzabile, salvo l'uso con un calcolatore. Tuttavia, per alcune classi di sostanze essa assume una forma matematica semplice che permette di utilizzarla direttamente, come vedremo in seguito.

### Il modello di fluido incompressibile

L'equazione di stato  $f(p, v, T) = 0$  per una sostanza pura in fase liquida si fonda usualmente sull'ipotesi di *comportamento incompressibile*, ovvero sull'ipotesi di ritenere il volume specifico costante lungo una qualunque trasformazione.

E' bene precisare che nessuna sostanza reale è incompressibile e che il modello di liquido incompressibile, a differenza del modello di gas ideale che verrà esposto in seguito, non rappresenta un comportamento asintotico, ma un'idealizzazione che consente di semplificare

notevolmente la metodologia per il calcolo delle proprietà. L'assunzione fatta risulta comunque soddisfacentemente verificata negli stati termodinamici del liquido lontani dallo stato critico. Per tale ragione, porre costante il volume specifico non corrisponde ad assegnarli un determinato valore numerico (come accade ad es. nel caso della costante dei gas). Nella pratica si sceglie come costante un idoneo valor medio nel campo di pressione e temperatura di interesse.

Nell'ipotesi di comportamento incomprimibile, l'equazione di stato per una sostanza pura in fase liquida è semplicemente:

$$v = \text{cost} \quad (2.8)$$

E' evidente quindi che una sostanza a comportamento incomprimibile non ha possibilità di scambiare lavoro reversibile di dilatazione con l'ambiente.

Il calcolo della variazione di energia interna risulta immediato, semplificando la relazione generale per  $dv=0$

$$du = c_v dT \quad (2.9)$$

dato che ovviamente per un fluido incomprimibile i coefficienti di  $\beta$  e  $k$  sono nulli, dalle relazioni generali (v. Tab.4 del Cap.1) segue che i calori specifici a pressione costante e a volume costante sono uguali: usualmente il pedice viene quindi soppresso.

La variazione di entalpia è data quindi da

$$dh = d(u + pv) = du + pdv + vdp = c dT + vdp \quad (2.10)$$

Infine, nell'ipotesi di  $v = \text{cost.}$ , la prima equazione di Gibbs diventa:

$$ds = \frac{c}{T} dT \quad (2.11)$$

La quale mostra che per un fluido incomprimibile temperatura ed entropia *non sono variabili indipendenti*. Le relazioni presentate, consentono di valutare le variazioni delle proprietà  $u$ ,  $h$   $s$  per una sostanza pura in fase liquida, ovviamente nell'ambito dell'approssimazione di tale modello idealizzato.

## Il modello di gas ideale

### Equazione di stato

Osservazioni sperimentali su sostanze in fase gassosa consentono di asserire che in condizioni particolari (che esamineremo in dettaglio in seguito) l'equazione di stato  $f(p, v, T) = 0$  assume una forma relativamente semplice:

$$pV = n \mathfrak{R}T \quad (2.12)$$

dove  $n$  è il numero di moli della sostanza ed  $\mathfrak{R}$  è una costante, il cui valore è pari a 8315 J/kmol K e non dipende dal tipo di gas considerato, per cui essa viene detta *costante universale dei gas*. Questo vuol dire che il comportamento di questa sostanza dipende solo dal numero di moli presenti e non dalla natura delle molecole. Tale fluido viene detto *gas ideale* o anche *gas perfetto*.

E' stato dimostrato che un comportamento del tipo indicato dall'equazione precedente è predicibile teoricamente considerando il gas come un insieme di punti materiali (che rappresentano le singole molecole) che interagiscono tra di loro e con le pareti unicamente tramite urti elastici.

Dato che di solito facciamo riferimento, anziché ad una mole, ad una massa unitaria di fluido, è opportuno riarrangiare l'equazione precedente facendovi comparire il volume specifico. Riferendosi ad una mole di sostanza e dividendo ambo i membri per la massa molecolare,  $\mu = M/n$ , si ottiene:

$$p \frac{V}{M} = \frac{n}{M} \mathfrak{R} T \quad (2.13)$$

$$pv = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T = RT$$

dove è evidente che la costante  $R$  (detta talvolta *costante caratteristica* del gas) assume un valore diverso per ciascun gas. I valori di  $\mu$  ed  $R$  sono riportati, per alcune sostanze, in Tab.a2. Ovviamente, la relazione precedente può essere riscritta in termini del volume totale e della massa

$$pV = MRT \quad (2.14)$$

#### **ESEMPIO 2.4 – Massa di gas contenuta in una bombola**

Una bombola del volume di 14 L contiene ossigeno alla pressione di 70 bar ed alla temperatura di 20 °C. Assumendo la validità del modello di gas ideale, calcolare la massa di gas contenuta nella bombola.

Dalla Tab.a1, per l'ossigeno si ha  $R= 260.83 \text{ J/kg K}$ ; dalla relazione precedente quindi (esprimendo tutte le grandezze in unità SI)

$$M = \frac{pV}{RT} = \frac{7 \cdot 10^6 \cdot 0.014}{260.83 \cdot 293.15} = 1.28 \text{ kg}$$

Notare che dal programma CATT si ottiene  $v = 0.01043 \text{ m}^3/\text{kg}$ , da cui  $M = V/v = 1.34 \text{ kg}$ : il modello di gas ideale ha quindi in queste condizioni un errore di circa il 4.5 %.

□

#### **Calcolo delle variazioni di energia interna, entalpia ed entropia per un gas ideale.**

Per un gas ideale, l'energia interna e l'entalpia *dipendono unicamente dalla temperatura*. Ne segue anche che per un gas ideale  $u$ ,  $h$  e  $T$  *non sono variabili di stato indipendenti* e assegnare un valore determinato ad una coppia tra loro non consente di determinare univocamente lo stato del sistema.

Ciò fu mostrato come risultato sperimentale da Joule e Thompson, che idearono un celebre esperimento per dimostrare che l'espansione isoentalpica di un gas, in condizioni prossime a quelle ideali, è anche isoterma. Il fatto che nel diagramma  $h-s$  (illustrato in precedenza) le isoterme tendano a diventare isoentalpiche per bassi valori della pressione conferma ulteriormente quanto affermato.

In altri termini, i coefficienti  $B_u$  e  $B_h$  nelle Eq.(1.48) e (1.50) del Cap.1 sono *identicamente nulli* per un gas ideale e tali relazioni possono essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned} du &= c_v(T) dT \\ dh &= c_p(T) dT \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove i calori specifici a pressione e volume costante dipendono al più dalla temperatura, come illustrato in Fig.8.

Le variazioni di entropia sono quindi esprimibili nella forma

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp \end{aligned} \quad (2.16)$$

che, ricavando  $p/T$  e  $v/T$  dalla equazione, di stato possono essere espresse anche come

$$\begin{aligned} ds &= c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Infine, combinando opportunamente le Eq. (2.13) e (2.15) è possibile verificare che

$$R = c_p - c_v \quad (\text{detta relazione di Mayer}) \quad (2.18)$$

introducendo il rapporto tra  $c_p$  e  $c_v$ , indicato generalmente con  $k$ , si ottengono ancora le relazioni

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} \quad c_v = \frac{R}{k-1} \quad \text{con } k = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.19)$$

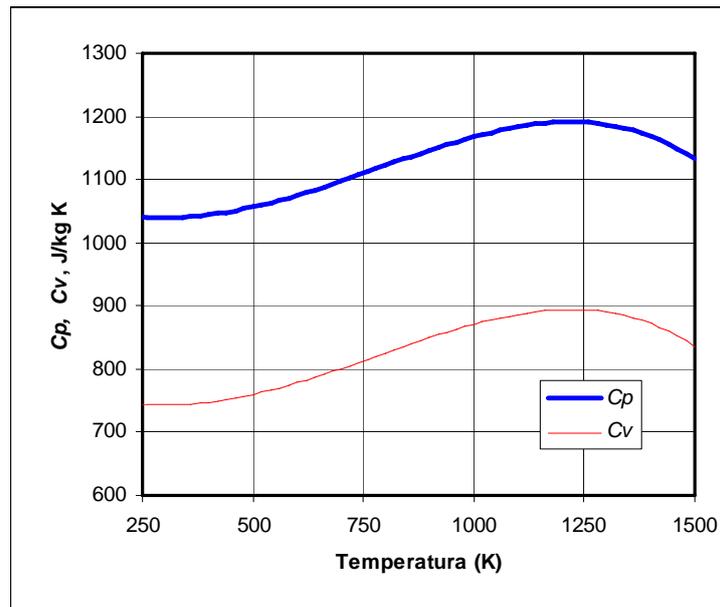
da cui risulta che *tutte le proprietà del gas ideale sono calcolabili una volta nota una coppia qualsiasi* tra i coefficienti  $k$ ,  $c_p$ ,  $c_v$  ed  $R$ .

Per integrare le equazioni presentate tra due generici stati di equilibrio occorre esplicitare il legame funzionale tra i calori specifici e la temperatura. Fortunatamente, è stato sperimentalmente osservato che, per le sostanze di più comune impiego, la variazione di dei calori specifici, relativa ad intervalli di temperatura non molto ampi, è sufficientemente limitata. E' pertanto possibile, con buona approssimazione, ritenere costanti i calori specifici in tali intervalli della temperatura. In Tab.a2 sono riportati, per alcuni gas, i valori medi di  $c_p$  e  $c_v$ , impiegabili nell'intervallo di temperatura 0-100°C

Laddove non sia possibile ritenere i calori specifici costanti, o perché si è in presenza di un salto di temperatura molto ampio, o perché è richiesta una maggiore accuratezza, risulta necessario correlare i dati sperimentali con funzioni analitiche. Di solito si adottano espressioni polinomiali del tipo:

$$\frac{c_p}{R} = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 + \varepsilon T^4 \quad (2.20)$$

i cui coefficienti sono riportati in Tab.a3. La Fig.8 riporta le variazioni di  $c_p$  e  $c_v$  con la temperatura per l'azoto.



**Figura 8.** Variazione di  $c_p$  e  $c_v$  con la temperatura per l'azoto. La differenza tra i due valori vale comunque  $c_p - c_v = R$ .

### ESEMPIO 2.5 – Variazioni di entalpia ed entropia per un gas

Determinare la variazioni di entalpia ed entropia specifiche dell'azoto in una trasformazione che lo porta dalle condizioni  $p_1 = 0.1$  MPa,  $T_1 = 300$  K alle condizioni  $p_2 = 3$  MPa,  $T_2 = 1000$  K.

☞ La soluzione per i casi a e b è riportata nel file *C2GASPROP.XLS*

#### Metodo a ( $c_p$ costante)

Considerando l'azoto un gas ideale con  $c_p = \text{cost} = 1039.2$  J/kg K e  $R = 296.91$  J/kg K si ha integrando le Eqq. (2.15) e (2.17)

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1) = 727.4 \text{ kJ/kg}$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = 241.3 \text{ J/kg K}$$

#### Metodo b ( $c_p$ dipendente da T)

Considerando l'azoto un gas ideale con  $c_p$  dipendente dalla temperatura, secondo la Tab.a3, si ha

$$h_2 - h_1 = R \left[ \alpha (T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{\gamma}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\delta}{4} (T_2^4 - T_1^4) + \frac{\varepsilon}{5} (T_2^5 - T_1^5) \right] = 764.5 \text{ kJ/kg}$$

$$s_2 - s_1 = R \left[ \alpha \ln \frac{T_2}{T_1} + \beta (T_2 - T_1) + \frac{\gamma}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{\delta}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\varepsilon}{4} (T_2^4 - T_1^4) \right] - R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = 289.3 \text{ J/kg K}$$

**Metodo c (tabelle termodinamiche)**

Infine dalle tabelle termodinamiche (programma CATT) si ottiene

$$h_2 - h_1 = 766.7 \text{ kJ/kg}$$

$$s_2 - s_1 = 289 \text{ J/kg K}$$

□

**Trasformazioni e diagrammi di stato per un gas ideale.**

Per un gas ideale una trasformazione isoterma è retta dall'equazione

$$pv = RT = \text{cost.} \quad (2.21)$$

E quindi è rappresentata da un ramo di iperbole equilatera sul diagramma  $p-v$ .

Una relazione per la trasformazione adiabatica reversibile (ovvero, isoentropica) può essere ricavata imponendo  $dS = 0$  nella seconda delle Eq.(2.17)

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p} \quad (2.22)$$

Da cui integrando tra due estremi generici, per  $c_p = \text{cost}$

$$c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = R \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} \Rightarrow c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (2.23)$$

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{c_p} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^R \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{k-1}$$

e quindi infine

$$T p^{\frac{1-k}{k}} = \text{cost} \quad (2.24)$$

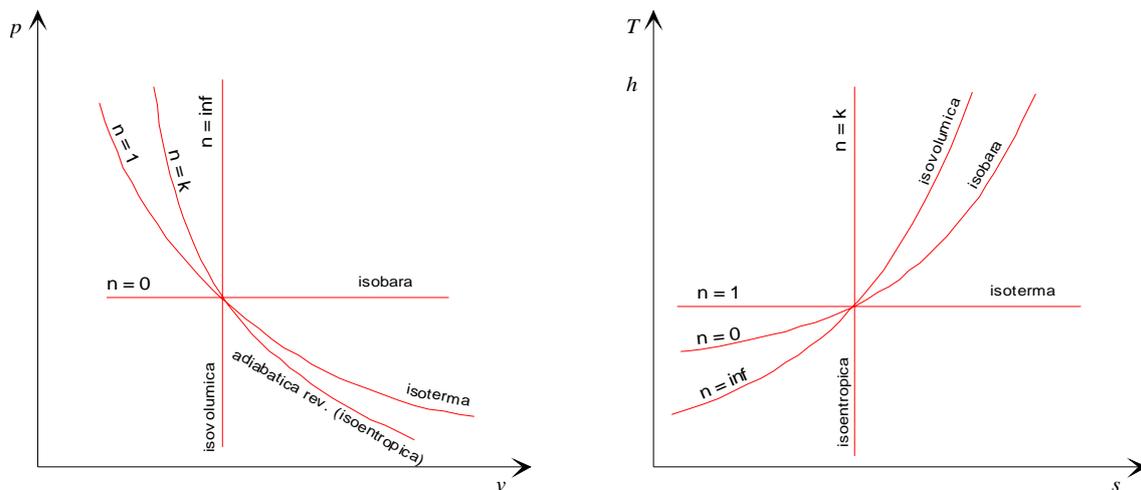
Sfruttando l'equazione di stato dei gas ideali, Eq.(2.13), si vede che due espressioni alternative per la trasformazione adiabatica sono

$$T v^{k-1} = \text{cost} \quad p v^k = \text{cost} \quad (2.25)$$

Tutte le trasformazioni suddette non sono che dei casi particolari di una trasformazione detta politropica che può esprimersi nelle tre forme seguenti

$$T p^{\frac{1-n}{n}} = \text{cost} , \quad T v^{n-1} = \text{cost} , \quad p v^n = \text{cost} \quad (2.26)$$

In particolare, per una isoterma si ha  $n = 1$ , per un'adiabatica  $n = k$  e per una isobara  $n = 0$ . Anche una isovolumica può essere vista come un caso particolare della trasformazione suddetta per  $n = \infty$ .



**Figura 9.** Diagrammi di stato per gas ideale.

Sui diagrammi di stato del gas ideale non si riporta la zona di coesistenza delle fasi, in quanto, come vedremo in dettaglio in un prossimo paragrafo, per il gas ideale non si hanno cambiamenti di fase e tale modello è applicabile per stati sufficientemente lontani dal punto critico della sostanza. Inoltre, dato che l'entalpia e la temperatura sono legati da una relazione diretta, i diagrammi  $h-s$  e  $T-s$  differiscono unicamente per il fattore di scala dell'asse  $y$  (ovvero il fattore  $c_p$ , non necessariamente costante lungo l'asse stesso) e hanno qualitativamente lo stesso andamento. Le linee che rappresentano le varie trasformazioni su tali diagrammi possono, almeno nel caso in cui  $c_p$  sia costante, essere tracciate con semplici considerazioni di geometria analitica una volta note una coppia di costanti del gas (ad es.  $R$  e  $k$ ). Tali diagrammi sono riportati in Fig.9.

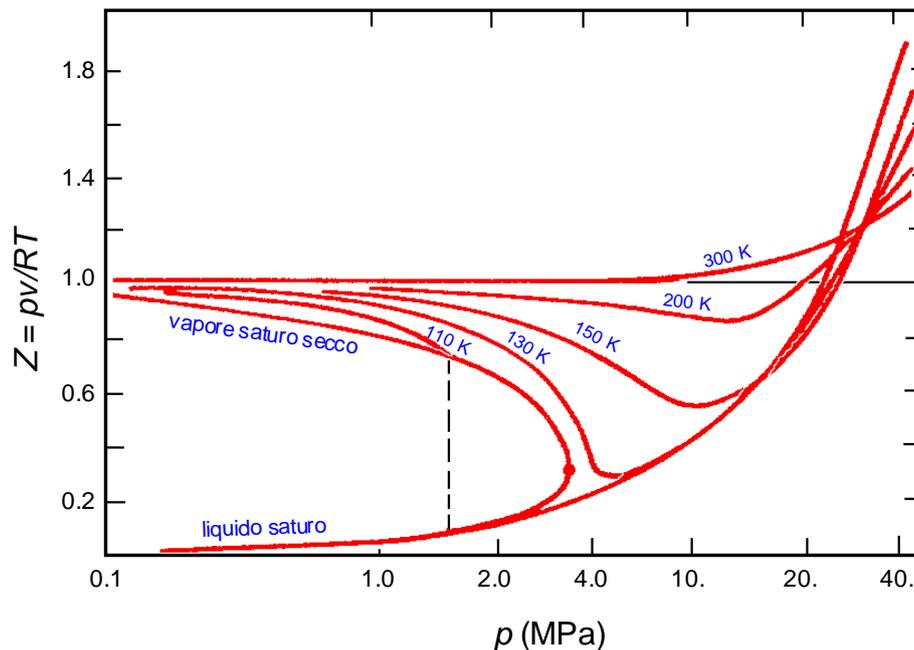
Alla luce delle espressioni riportate in questo paragrafo, è abbastanza semplice ricavare il lavoro ed il calore scambiati reversibilmente da un gas ideale nelle principali trasformazioni: tramite integrazione diretta del  $p dv$ ,  $-v dp$ ,  $T ds$ : le relative espressioni sono riportate in App.2.

### **Comportamento reale dei gas**

Nessuna sostanza si comporta esattamente secondo il modello di gas ideale; pur tuttavia, tale modello costituisce, per qualsiasi sostanza, il comportamento asintotico al decrescere della pressione o al crescere della temperatura. Per valutare se una sostanza si comporta o meno secondo il modello di gas ideale, si può calcolare il cosiddetto fattore di comprimibilità,  $Z$

$$Z = \frac{pv}{RT} \quad (2.27)$$

È evidente che quando il gas segue il comportamento ideale  $Z=1$ . Ad esempio, in Fig.10, è riportato il fattore di comprimibilità  $Z$  dell'azoto in funzione della pressione, per differenti valori della temperatura. Dall'osservazione del diagramma si può notare che quando la pressione tende a zero, per qualunque valore della temperatura, il rapporto  $Z$  tende ad uno, ossia l'azoto si comporta da gas ideale. Si noti inoltre che alla temperatura di 300 K, ovvero a temperatura ambiente, è possibile adoperare per l'azoto l'equazione del modello gas ideale fino ad una pressione di circa 10 MPa (per cui si ha  $Z= 1.0056$ ); tale limite è ovviamente funzione della precisione che si desidera ottenere).



**Figura 10.** Fattore di comprimibilità dell'azoto

Si supponga di raffreddare isobaricamente il gas, inizialmente alla temperatura di 300 K, alla pressione di 4 Mpa: il rapporto  $Z$  decresce al diminuire della temperatura ed assume valori minori di uno, ossia la densità aumenta più di quanto previsto dal modello del gas ideale. Ciò può essere giustificato intuitivamente notando che la riduzione della distanza tra le molecole comporta l'allontanamento dal campo di validità dell'ipotesi di assenza di forze intermolecolari, assunta per il modello del gas ideale. In queste condizioni di pressione e temperatura, le forze molecolari sono del tipo attrattivo e pertanto il modello ideale *sottostima* il valore di densità del gas. Al contrario, per pressioni molto elevate, maggiori di 30 MPa, il rapporto  $Z$  è sempre maggiore di uno: in queste condizioni le forze intermolecolari sono *repulsive* e pertanto la densità del gas è *minore* di quella corrispondente al comportamento ideale.

Un grafico molto più significativo del precedente si ottiene riportando il valore di  $Z$  in funzione della *pressione ridotta* e della *temperatura ridotta*, definite rispettivamente come

$$p_r = \frac{p}{p_c} \quad T_r = \frac{T}{T_c} \quad (2.28)$$

dove  $p_c$  e  $T_c$  sono rispettivamente la pressione e la temperatura critica della sostanza. Tale grafico è riportato in Fig.11: si nota che i punti sperimentali relativi a diversi fluidi si raggruppano lungo le stesse linee, cosicché si può asserire che i parametri suddetti individuano quantitativamente un comportamento generale, valido per qualunque sostanza.

**ESEMPIO 2.6 – Fattore di comprimibilità**

Si calcoli il fattore di comprimibilità del metano a  $p = 20.88 \text{ MPa}$  e  $T = 13.2 \text{ °C}$ . Si confronti il risultato con i dati del diagramma di Fig.11.

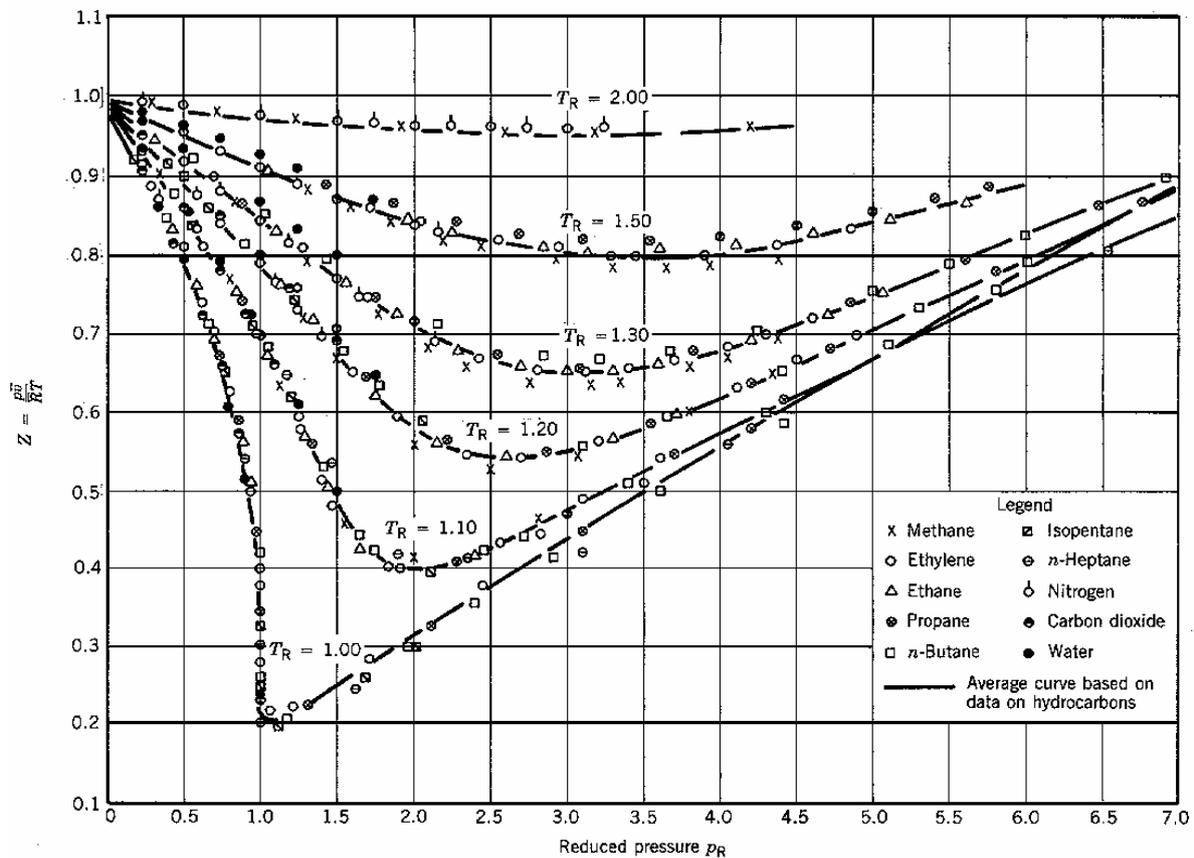
Dalle tabelle del metano si ha che nelle condizioni specificate  $v = 0.005683 \text{ m}^3/\text{kg}$ . Dalla Tab.a2, si ha inoltre  $R = 518.46 \text{ kJ/kg}$ ,  $p_c = 4.64 \text{ MPa}$ ,  $T_c = 190.9 \text{ K}$ . Pertanto

$$Z = \frac{pv}{RT} = 0.80$$

si ha inoltre

$$p_r = \frac{p}{p_c} = 4.5 \quad T_r = \frac{T}{T_c} = 1.5$$

dalla Fig.11 si ha pertanto approssimativamente  $Z = 0.82$ .



**Figura 11.** Fattore di comprimibilità generalizzato.

**Applicabilità del modello di gas ideale**

Nell'affrontare un calcolo, spesso ci si chiede se il modello di gas ideale sia applicabile o meno al fluido considerato: l'applicabilità di tale modello infatti semplifica notevolmente i calcoli ed evita il ricorso alle tabelle termodinamiche. Nel seguito sono esposti alcuni criteri di giudizio. Naturalmente tali criteri hanno valore puramente indicativo e in definitiva si può

affermare che l'applicabilità o meno del modello di gas ideale dipende dal grado di precisione con cui si vogliono ottenere i risultati.

Il criterio più generale consiste nel calcolare il fattore di comprimibilità  $Z$  facendo uso delle tabelle o di un programma di calcolo: il suo scostamento dal valore unitario ci dà l'idea della precisione con cui il modello di gas ideale è accettabile. Indicativamente, si può ritenere accettabile un valore di  $Z$  superiore a 0.95.

L'uso del diagramma generalizzato di Fig.11 ci mostra che per  $T_r > 2$  il valore di  $Z$  si mantiene sempre superiore a 0.95: questo indica che *quando la temperatura supera il doppio della temperatura critica il modello di gas ideale è comunque applicabile* (tale affermazione cade però in difetto per pressioni molto alte, indicativamente per  $p_r > 10$ ).

Inoltre, si vede dalla stessa Fig.11 che tutte le curve tendono ad 1 al diminuire della pressione ridotta: *quindi il modello di gas ideale risulta comunque applicabile per  $p_r < 0.01$*  (ma questo limite aumenta al crescere del valore della temperatura ridotta).

Infine, un aiuto indicativo ci può venire dall'esame dei diagrammi di stato  $T$ - $s$ ,  $h$ - $s$  e  $p$ - $h$  nelle zone di tali diagrammi *dove le isoterme tendono a diventare anche isoentalpiche* (e viceversa) si può pensare che il fluido abbia un comportamento prossimo a quello del gas ideale.

Generalmente si può dire che i gas che costituiscono l'aria (azoto più ossigeno) in condizioni di temperatura ambiente o superiore (300 K) possono essere considerati gas ideali. Lo stesso non vale per il vapore acqueo nelle condizioni di pressione e temperatura tipiche all'ingresso in turbina ( $p \approx 10$  MPa e  $T \approx 500^\circ\text{C}$ ). Invece, il vapore acqueo nelle condizioni in cui si trova disperso nell'aria atmosferica, avendo una pressione parziale molto bassa (0.002 MPa) può essere considerato un gas ideale. Ovviamente, per qualunque sostanza in condizioni bifasiche il modello di gas ideale è inapplicabile, per non parlare delle sostanze allo stato liquido.

Da notare infine che il fatto che il modello di gas ideale sia applicabile non implica assolutamente che  $c_p$  possa essere considerato costante: quest'ultima è un'ipotesi ulteriormente restrittiva e può essere applicata se le variazioni di temperatura non sono alte (indicativamente, inferiori a 100 K). Anche in questo caso, la decisione dipende dal grado di accuratezza dei risultati desiderato.

## CALCOLO DELLE VARIAZIONI DI ENTALPIA

Come vedremo in seguito, per poter portare a termine i calcoli correlati al bilancio di energia, è molto spesso necessario determinare la variazione di entalpia nella trasformazione compiuta dal fluido. Ovviamente, lo stato iniziale e finale della trasformazione devono essere fissati, ovvero (per sistemi bivarianti, quali sono tutti quelli che noi consideriamo) deve essere noto il valore di due variabili di stato *indipendenti*, che di solito sono pressione e temperatura. Tuttavia, se il fluido si trova nello stato di vapore saturo, tali variabili non sono indipendenti e occorre sostituircene una con il titolo  $x$  od un'altra variabile specifica ( $v, u, s$ ) da cui si può ricavare il titolo con le note relazioni del vapore saturo.

Una volta fissato lo stato del sistema, le variazioni di entalpia possono essere determinati con i seguenti metodi:

- tramite *tabelle*, specifiche per il fluido considerato;
- con il calcolatore, tramite appositi *codici di calcolo*;
- graficamente, tramite *diagrammi*, specifici per il fluido considerato;

- mediante *calcolo diretto*; questo è possibile solo in casi particolari (gas ideale, fluido incomprimibile).

Per quanto riguarda il calcolo diretto, si ricorda che in generale la variazione di entalpia (per *fluidi monofase*) è data da

$$dh = c_p(p, T) dT + B_h(T, p) dp \quad (2.29)$$

Nel caso di *trasformazione isobara* si ha comunque, per qualunque fluido

$$dh = c_p(T, p) dT \quad (2.30)$$

Per i *gas ideali*, indipendentemente dal fatto che la trasformazione sia isobara o meno, l'entalpia dipende solo dalla temperatura e la sua variazione è data da

$$dh = c_p(T) dT \quad (2.31)$$

Per i *fluidi incomprimibili*, la variazione di entalpia assume la forma

$$dh = c(T) dT + v dp \quad (2.32)$$

molto spesso, dato il basso valore del volume specifico dei liquidi, il secondo termine è trascurabile. Si può pertanto affermare che, con buona approssimazione, anche l'entalpia dei liquidi incomprimibili dipende solo dalla temperatura. In mancanza di dati più accurati, la si può porre uguale a quella del liquido in condizioni di saturazione *alla stessa temperatura* (e non alla stessa *pressione!*).

Infine, consideriamo una *trasformazione isobara* (e quindi anche *isoterma*) di un *vapore saturo*. Applicando la relazione che lega l'entalpia al titolo, è facile convincersi che la variazione infinitesima di entalpia è data in questo caso da

$$dh = (h_g - h_f) dx = h_{fg} dx \quad (2.33)$$

### **ESEMPIO 2.7 – Calcolo delle variazioni di entalpia dell'acqua**

Determinare l'entalpia dell'acqua alla temperatura di 40 °C ed alla pressione di 200 bar.

#### **Metodo a (esatto)**

Tramite le tabelle termodinamiche dell'acqua compressa e vapore surriscaldato o tramite un programma per calcolatore si ricava il valore più accurato

$$h = 185.14 \text{ kJ/kg}$$

#### **Metodo b (liquido incomprimibile)**

Considerando l'acqua un liquido incomprimibile si ha

$$dh = c(T) dT + v dp$$

ed integrando rispetto allo stato di riferimento (punto triplo dell'acqua,  $p_t = 611 \text{ Pa}$ ,  $T_t = 0.01 \text{ °C}$ ,  $h_t = 0 \text{ kJ/kg}$ ), considerando come costanti  $c = 4.186 \text{ kJ/kg K}$ ,  $v = 0.001 \text{ m}^3/\text{kg}$  si ha

$$h = h_t + c(T - T_t) + v(p - p_t) =$$

$$= 4186(40 - 0.001) + 0.001(2 \cdot 10^7 - 611) = 167440 + 20000 = 187.44 \text{ kJ/kg}$$

con un errore di circa l'1%. Si vede che in molti casi il secondo termine è trascurabile e l'entalpia dell'acqua sottoraffreddata può essere valutata come

$$h = c (T - T_i) \cong 4.2 T \text{ (kJ/kg)}$$

dove la temperatura è espressa in centigradi (il risultato è 168 kJ/kg). Quest'ultima formula è utilissima per un calcolo di prima approssimazione che molto spesso è più che soddisfacente.

**Metodo b (entalpia del liquido saturo)**

Tramite la tabella del vapore saturo si pone l'entalpia circa uguale a quella del liquido saturo alla stessa temperatura:

$$h \cong 167.54 \text{ kJ/kg}$$

come si vede, l'errore è di circa il 10% (ma si potrebbe eliminare quasi totalmente aggiungendo il termine  $vp$ ).

□

**CALCOLO DELLE VARIAZIONI DI ENTROPIA**

Analogamente alle variazioni di entalpia, anche le variazioni di entropia possono essere ricavate da tabelle, diagrammi o codici di calcolo. Per quanto riguarda il calcolo diretto, per i gas ideali il problema è stato già affrontato nell'esempio 2.5. Per i *fluidi incomprimibili*, e anche per i solidi, la variazione di entalpia assume la forma, v. Eq.(2.11)

$$ds = \frac{c(T)}{T} dT \tag{2.34}$$

che, nel caso in cui il calore specifico sia costante, è facilmente integrabile. Il problema del calcolo delle variazioni di entropia per materiali incomprimibili è affrontato nell'esempio 2.8. Infine, per una *trasformazione isobara* (e quindi anche *isoterma*) di un *vapore saturo*, si ha, analogamente all'Eq.(2.33),

$$ds = (s_g - s_f) dx = s_{fg} dx \tag{2.35}$$

**ESEMPIO 2.8 – Calcolo delle variazioni di energia ed entropia per un sistema adiabatico**

Un blocchetto di acciaio al carbonio ( $c_{pl} = 434 \text{ J/kg K}$ ) della massa di 200 g, alla temperatura  $T_{in,1} = 400 \text{ °C}$  è gettato in un recipiente adiabatico che contiene 2 kg di acqua ( $c_{p2} = 4187 \text{ J/kg K}$ ) alla temperatura  $T_{in,2} = 20 \text{ °C}$ . Entrambi i materiali possono essere considerati incomprimibili e con calore specifico costante. Determinare la temperatura del sistema all'equilibrio e la sua variazione di entropia.

Non essendovi variazioni di volume, sono nulli gli scambi di lavoro con l'esterno. Essendo in aggiunta il sistema chiuso ed adiabatico, si ha per il primo principio

$$U_f - U_i = 0$$

Si assume che il sistema si porti in una condizione finale di equilibrio termico e quindi che l'acqua ed il ferro raggiungano la stessa temperatura finale,  $T_f$ . Essendo l'energia interna una proprietà additiva, la sua variazione può essere considerata la somma delle variazioni delle due parti del sistema e quindi, essendo per i materiali incomprimibili (v. Eq.(2.9)9)

$$du = c dT$$

$$U_f - U_i = (U_{f,1} - U_{i,1}) - (U_{f,2} - U_{i,2})$$

da cui

$$M_1 c_{p,1} (T_{i,1} - T_f) = M_2 c_{p,2} (T_f - T_{i,2})$$

Dall'ultima relazione si ricava  $T_f$

$$T_f = \frac{M_1 c_{p,1} T_{i,1} + M_2 c_{p,2} T_{i,2}}{M_1 c_{p,1} + M_2 c_{p,2}} = 23.9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La variazione di entropia specifica dell'acqua può essere ricavata integrando l'espressione dell'energia per un liquido incomprimibile tra lo stato iniziale e finale, v. Eq.(2.11)

$$ds = c_p \frac{dT}{T}$$

$$s_{f,1} - s_{i,1} = c_{p,1} \ln \frac{T_f}{T_{i,1}} = 55.3 \text{ J/kg K}$$

$$s_{f,2} - s_{i,2} = c_{p,2} \ln \frac{T_f}{T_{i,2}} = -355 \text{ J/kg K}$$

Nelle quali, si ricorda, è indispensabile esprimere le temperature in kelvin. Si noti che l'entropia del blocco di ferro diminuisce (perchè la sua temperatura decresce). Dato che anche l'entropia è una grandezza estensiva e quindi additiva, la variazione totale di entropia dell'acqua si ricava moltiplicando le variazioni precedenti per le relative masse e sommando

$$S_f - S_i = M_1 c_{p,1} \ln \frac{T_f}{T_{i,1}} + M_2 c_{p,2} \ln \frac{T_f}{T_{i,2}} = 39.6 \text{ J/K}$$

La variazione totale di entropia del sistema è positiva, e quindi, essendo il sistema adiabatico, la trasformazione è irreversibile. Si potrebbe anche dimostrare che ogni ulteriore trasformazione che porti il sistema in uno stato in cui la temperatura dell'acciaio differisce da quella dell'acqua, anche se rispetta il primo principio, implica una diminuzione di entropia, ed è pertanto impossibile. In altri termini, l'entropia del nostro sistema *adiabatico* ha raggiunto un *massimo*, il che corrisponde a una condizione di equilibrio stabile, da cui è impossibile uscire in assenza di azioni esterne.

□

## BIBLIOGRAFIA

### *Tabelle termodinamiche*

- L. Haar, J.S. Gallagher, G.S. Kell, NBS/NRC Steam Tables, Hemisphere, 1983 (tabelle del vapore acqueo approvate dal National Bureau of Standards).
- C. Borgnakke e R.E. Sonntag, Thermodynamic and Transport Properties, Wiley, 1997 (contiene anche un dischetto con il programma di calcolo CATT, v. sotto)
- W.C. Reynolds, Thermodynamic Properties in SI, Stanford University Press, 1979 (tabelle diagrammi e formule per il calcolo delle proprietà di molte sostanze in unità SI)

### *Programmi di calcolo (alcuni esempi)*

- Il programma CATT, (C. Borgnakke, R.E. Sonntag, v. sopra) che gira su un PC in ambiente Windows, riporta le proprietà termodinamiche di 25 sostanze dando la scelta all'utente tra 8 possibili coppie di variabili di input.
- Il programma ALLPROPS (<http://www.webpages.uidaho.edu/~cats/software.htm>), che gira su un PC in ambiente Windows, riporta le proprietà termodinamiche di circa 40 sostanze dando la scelta all'utente tra molte coppie di variabili di input. E' anche possibile costruire diagrammi e tabelle.
- La libreria di funzioni TPX, (<http://www.me.caltech.edu/me/software/tpx/>) sviluppata da D. Goodwin presso il California Institute of Technology e disponibile gratuitamente in rete permette di calcolare le proprietà termodinamiche di alcune sostanze (acqua, azoto, ossigeno, metano, idrogeno, R134a) importando una macro direttamente nei fogli di lavoro Microsoft Excel.

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 2.1

Una bombola di volume  $V = 5$  L contiene argon (Ar) alla pressione  $p = 200$  bar e temperatura  $T = 20$  °C. Determinare a) la massa  $M$  del gas; b) il volume che esso occuperebbe alla pressione di 1 bar e alla temperatura di 0 °C (tale volume è talvolta indicato come *volume normale* e misurato in normal-metri cubi, Nm<sup>3</sup>).

*Dati:* considerare l'Ar come un gas ideale con  $k = c_p / c_v = 1.667$  e  $c_p = \text{cost.} = 520.3$  J/kg K  
 $[M = 1.639$  kg,  $V = 0.932$  Nm<sup>3</sup> ( $R = 208.18$  J/kg K)]

### ESERCIZIO 2.2

Un cilindro verticale chiuso da un pistone senza attrito contiene azoto a temperatura  $T = 100$  °C. Il pistone ha una massa  $M_p = 5$  kg ed un diametro  $D = 100$  mm. La pressione dell'ambiente esterno è 97 kPa. Se il cilindro ha un volume  $V = 2$  dm<sup>3</sup>, determinare la massa  $M$  di gas contenuta nel cilindro.

*Dati:* considerare l'azoto come un gas ideale con  $R = 296.8$  J/kg K,  $k = 1.41$ .  
 $[M = 1.864$  g]

### ESERCIZIO 2.3 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Servendosi delle tabelle del vapore o di un programma di calcolo delle proprietà termodinamiche, determinare lo stato dell'acqua (liquido sottoraffreddato, miscela bifase, vapore surriscaldato, gas) in ciascuna delle condizioni seguenti:

- a) 120 °C, 150 kPa      d) 160 °C, 0.4 m<sup>3</sup>/kg  
 b) 300 °C, 0.01 m<sup>3</sup>/kg    e) 0.35 Mpa, 0.4 m<sup>3</sup>/kg  
 c) 200 kPa, 110 °C      f) 5 kPa, 10 °C

[a) *vap surr*; b) *bifase*  $x = 0.424$ ; c) *liquido sottoraff.*; d) *vap surr*; e) *bifase*  $x = 0.763$ ; e) *liquido sottoraff.*]

### ESERCIZIO 2.4

Un serbatoio cilindrico alto 10 m contiene acqua e vapore in equilibrio alla temperatura  $T = 180$  °C. Il livello del liquido all'interno è 2 m. Calcolare il titolo e la differenza di pressione tra la parte più alta e quella più bassa del serbatoio.

*Dati:*  $v_l = 0.001127$  m<sup>3</sup>/kg,  $v_v = 0.194045$  m<sup>3</sup>/kg.  
 $[x = 0.022, p = 17813$  Pa]

### ESERCIZIO 2.5

Un recipiente di volume assegnato  $V = 100$  dm<sup>3</sup> contiene 10.79 kg di R12 a  $p = 0.6$  MPa. Determinare il titolo ed entalpia specifica.

*Dati:*  $v_f = 0.000757$  m<sup>3</sup>/kg,  $v_v = 0.029132$  m<sup>3</sup>/kg,  $h_f = 56.799$  kJ/kg,  $h_v = 196.568$  kJ/kg  
 $[x = 0.3, h = 98.73$  kJ/kg]

### ESERCIZIO 2.6

Un recipiente di volume assegnato  $V = 100$  dm<sup>3</sup> contiene 1.5 kg di ammoniaca a  $p = 1$  MPa. Determinare il titolo.

*Dati:*  $v_f = 0.001658$  m<sup>3</sup>/kg,  $v_v = 0.128528$  m<sup>3</sup>/kg  
 $[x = 0.515]$

### ESERCIZIO 2.7

Valutare le variazioni di energia interna, entalpia ed entropia per azoto nelle seguenti condizioni:  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $p_2 = 13 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 1100 \text{ K}$ ., nelle seguenti ipotesi

- supponendolo un gas ideale con  $R = 296.91 \text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.4$ .
- adottando la seguente formula per  $c_p$

$$\frac{c_p}{R} = 3.765 - 1.208 \cdot 10^{-3} T + 2.324 \cdot 10^{-6} T^2 - 0.632 \cdot 10^{-9} T^3 - 0.226 \cdot 10^{-12} T^4$$

*Sugg. ci si può aiutare con il file EXCEL C2GASPROP.XLS*

- $\Delta u = 593.8 \text{ kJ/kg}$ ;  $\Delta h = 831.4 \text{ kJ/kg}$ ;  $\Delta s = 588 \text{ J/kg K}$  ( $c_p = 1039 \text{ J/kg K}$ );
- $\Delta u = 644.6 \text{ kJ/kg}$ ;  $\Delta h = 882.1 \text{ kJ/kg}$ ;  $\Delta s = 649.6 \text{ J/kg K}$

### ESERCIZIO 2.8

Valutare il fattore di compressibilità ( $Z = pv/RT$ ) per l'ammoniaca a  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $2 \text{ Mpa}$ , usando un diagramma di stato. Ripetere il calcolo con un grafico del fattore di compressibilità generalizzato.

Dati:  $p_c = 112.8 \text{ bar}$ ,  $T_c = 405.4 \text{ K}$ .

[ $Z = 0.905$ ]

### ESERCIZIO 2.9

Un recipiente rigido del volume di  $15 \text{ litri}$  contiene  $10 \text{ kg}$  di acqua in condizioni di saturazione a  $30 \text{ }^\circ\text{C}$  e viene lentamente riscaldato.

- Al momento in cui il sistema diviene monofase, esso sarà costituito da liquido sottoraffreddato o da vapore surriscaldato?
- Ripetere il calcolo nel caso che la massa di acqua sia  $1 \text{ kg}$ .

[a. liquido sottoraffreddato; b. vapore surriscaldato;]

### ESERCIZIO 2.10

Valutare la massa di metano trasportato in un recipiente di  $0.5 \text{ m}^3$  nelle seguenti condizioni:

- $p = 200 \text{ bar}$ ,  $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$
- vapore saturo a  $p = 5 \text{ bar}$  ( e quindi  $T = -138 \text{ }^\circ\text{C}$ ),  $x = 0.01$ .

Confrontare i risultati per il caso a) utilizzando il modello di gas ideale e le tabelle termodinamiche.

*Per rispondere alla domanda b) occorre consultare le tabelle termodinamiche.*

[a]  $64.7 \text{ kg}$  (gas ideale)  $78.5 \text{ kg}$  (tabelle); b)  $130.89 \text{ kg}$

### ESERCIZIO 2.11

Una massa  $M = 0.25 \text{ kg}$  di vapore saturo secco alla pressione  $0.1 \text{ Mpa}$ , contenuto in un sistema chiuso cilindro-pistone, viene compresso reversibilmente ed a temperatura costante fino allo stato di liquido saturo. Determinare la variazione di entropia e di energia interna nonché il lavoro ed il calore trasferiti.

[ $\Delta U = -522 \text{ kJ}$ ;  $\Delta S = -1.51 \text{ kJ/K}$ ;  $L = -42.3 \text{ kJ}$ ;  $Q = -564 \text{ kJ}$ ]

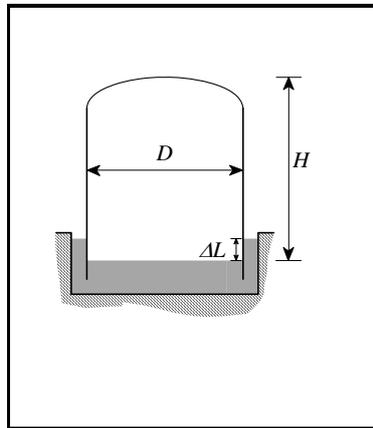
### ESERCIZIO 2.12

Un gas (considerato ideale e con calore specifico costante) avente  $R = 287 \text{ J/Kg K}$ ;  $c_p = 992 \text{ J/kg K}$  e contenuto in un sistema pistone-cilindro senza aperture viene compresso secondo una isoterma reversibile dalla pressione  $p_1 = 1 \text{ bar}$  e dalla temperatura  $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  fino alla pressione  $p_2 = 20 \text{ bar}$  per essere poi riespanso adiabaticamente e reversibilmente fino alla pressione  $p_3 = 1 \text{ bar}$ .

Determinare la temperatura ed il volume specifico finali del gas nonché i valori del lavoro netto e del calore scambiato con l'esterno per unità di massa.

$[T_3 = 125.3 \text{ K}; v_3 = 0.36 \text{ m}^3/\text{kg}; l = -135 \text{ kJ/kg}; q = -256 \text{ kJ/kg}]$

**ESERCIZIO 2.13**



Un gasometro (vedi figura) è schematizzabile come un cilindro di diametro  $D = 40 \text{ m}$  e altezza  $H = 15 \text{ m}$  e contiene metano alla temperatura di  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . La pressione atmosferica esterna è  $980 \text{ hPa}$  e il mantello ha una massa complessiva di  $500 \text{ t}$ . Determinare:

1. la pressione all'interno del gasometro;
2. il dislivello  $\Delta L$  nella guardia idraulica;
3. la massa del metano contenuto;
4. la variazione di quota del mantello se la pressione atmosferica diviene  $1040 \text{ hPa}$ .
5. il dislivello nella guardia idraulica nel caso di cui sopra.

[1)  $1019 \text{ hPa}$ ; 2)  $390 \text{ mm}$ ; 3)  $12400 \text{ kg}$ ; 4)  $0.83 \text{ m}$ ; 5) rimane invariato]

**ESERCIZIO 2.14**

Un recipiente di volume  $40 \text{ L}$  contiene aria alla pressione di  $5 \text{ MPa}$  e temperatura di  $400 \text{ K}$ . Determinare:

1. la massa di aria contenuta;
2. la pressione nel recipiente dopo che l'aria si è raffreddata a temperatura ambiente ( $27 \text{ }^\circ\text{C}$ )
3. il calore scambiato durante tale processo.

[1)  $1.72 \text{ kg}$ ; 2)  $3.75 \text{ MPa}$  3)  $-123 \text{ kJ}$ ]

**ESERCIZIO 2.15**

Un tubo di vetro sigillato contiene R22 alla temperatura di  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Se lo si raffredda fino alla temperatura di  $-20 \text{ }^\circ\text{C}$ , iniziano a formarsi piccole gocce di liquido sulla parete del tubo (vale a dire, il sistema raggiunge le condizioni di saturazione). Determinare quale è la pressione nel tubo a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

*Suggerimento:* si ha a che fare con una trasformazione a volume costante il cui stato finale è vapore saturo secco. Per risolvere questo esercizio si deve disporre delle tabelle termodinamiche del fluido R22.

$[p = 0.2896 \text{ Mpa}]$

**ESERCIZIO 2.16**

In un sistema chiuso pistone-cilindro, 50 kg di vapore si trovano alla temperatura  $T_1 = 70\text{ °C}$  con un titolo  $x_1 = 0.40$ . Determinare il lavoro da spendere per portare il vapore nelle condizioni di liquido saturo ( $x_2 = 0$ ) mediante una compressione adiabatica reversibile, e la temperatura finale del sistema. Tracciare la trasformazione sul diagramma  $T$ - $s$ .

[ $L_{12} = -20.750\text{ kJ}$ ,  $T_1 = 341.5\text{ °C}$ ]

**ESERCIZIO 2.17**

Un sistema costituito da 0.2 kg di vapore, alla pressione di 200 kPa ed alla temperatura di 200 °C, è compresso isotermicamente in maniera reversibile in un sistema chiuso cilindro-pistone con un rapporto di compressione 10.

- Mostrare il processo su un diagramma  $T$ - $s$ .
- Trovare il volume all'inizio ed alla fine del processo.
- Trovare il calore ed il lavoro scambiati.

[b)  $V_1 = 0.216\text{ m}^3$ ,  $V_2 = 2.31 \times 10^{-4}\text{ m}^3$ ; c)  $Q_{12} = -489.7\text{ kJ}$ ,  $L_{12} = -130\text{ kJ}$ ]

## APPENDICE 2.1 – TABELLE, FIGURE E DIAGRAMMI

	<u>temp. critica</u> K	<u>pressione critica</u> Mpa	<u>vol. spec. critico</u> (cm <sup>3</sup> /g)	<u>temp. tripla</u> K	<u>pressione tripla</u> kPa
Acqua, H <sub>2</sub> O	647	22.1	3.1	273.16	0.611
Alcool etilico, C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	516.5	6.39	3.6		
Alcool metilico, C <sub>3</sub> H <sub>3</sub> OH	513.2	7.98	3.7		
Ammoniaca, NH <sub>3</sub>	405.4	11.3	4.25	195.4	6.060
Anidride carbonica, CO <sub>2</sub>	304.3	7.40	2.2	216.55	517
Anidride solforosa, SO <sub>2</sub>	430.8	7.88	1.9	197.68	0.167
Argon, Ar	150.9	4.86	1.88	83.81	68.9
Aria	133.2	3.77	2.9		
Azoto, N <sub>2</sub>	125.9	3.39	3.25	63.18	12.5
<i>n</i> -Butano, C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	425.9	3.65	4.4	2.19	5.1
Cloro, Cl	417	7.71			
Cloroformio, C H Cl <sub>3</sub>	536.6	5.47			
Elio, He	5.2	0.228	14.4		
<i>n</i> -Esano, C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	508.2	2.99	4.25		
Etano, C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	305.4	4.94	4.75	89.89	8x10 <sup>-4</sup>
Etilene, C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	282.6	5.85	4.6	104.00	0.12
Freon 12 CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	384.7	4.01			
Idrogeno, H <sub>2</sub>	33.2	1.30	32.3	13.84	7.02
Kripton; Kr	209.4	5.50			
Mercurio, Hg				234.20	1.65x10 <sup>-7</sup>
Metano, CH <sub>4</sub>	190.9	4.64	6.2	90.68	11.7
Monoss. di carbonio, CO	132.9	3.50	3.32	68.10	2.03
Neon, Ne	44.2	2.7	2.1	24.57	43.1
Ossigeno, O <sub>2</sub>	154.3	5.03	2.3	54.36	0.152
Ottano, C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	569.3	2.5	4.25		
Propano, C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	368.7	4.36	1.94		
R134a, C F <sub>3</sub> C H <sub>2</sub> F	374.3	4.067			
Xenon, Xe	289.8	5.88			

Tab. a1: Dati critici e tripli di alcune sostanze

SOSTANZA	$\mu$	$R = \mathcal{R}/\mu$	$c_p$	$c_v$	$k$
	kg/kmol	J/kgK	J/kgK	J/kgK	
Acetilene, C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26,039	319,43			
Acqua, H <sub>2</sub> O	18,016	461,70	1872.3	1410.8	1.327
Alcool etilico C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46.069	180.48	2496.3	2315.8	1.078
Alcool metilico, C <sub>3</sub> H <sub>3</sub> OH	32.04	259.5			
Ammoniaca, NH <sub>3</sub>	17,032	488,38	2130.0	1641.8	1.297
Anidride carbonica, CO <sub>2</sub>	44,012	188,99	841.8	652.9	1.289
Anidride solforosa, SO <sub>2</sub>	64,066	129,83			
Argon, Ar	39,950	208,21	520.3	312.2	1.667
Aria	28,968	287,13	1003.5	716.5	1.400
Azoto, N <sub>2</sub>	28,014	296,91	1041.6	744.8	1.400
<i>n</i> -Butano, C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58,124	143,04	1716.4	1573.4	1.091
Cloro, Cl	70.91	117.3			
Cloroformio, C H Cl <sub>3</sub>	119.38	69.64			
Elio, He	4,0028	2078,0	5192.6	3115.6	1.667
<i>n</i> -Esano, C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	507.9	3.03			
Etano, C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30,071	276,60	1766.2	1489.7	1.186
Etilene, C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,055	296,48	1548.2	1251.8	1.237
Freon 12 CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120,914	68,77			
Idrogeno, H <sub>2</sub>	2,0158	4126,4	14209.1	10084.9	1.409
Kripton, Kr	83.8	99.21			1.667
Metano, CH <sub>4</sub>	16,044	518,46	2253.7	1735.4	1.299
Metanolo CH <sub>3</sub> OH	32.042	259.48	1405.0	1145.5	1.227
Monoss. di carbonio, CO	28,012	296,93	1041.3	744.5	1.400
Neon, Ne	20,184	412,10	1029.9	617.9	1.667
Ossido di azoto, NO	30,007	277,19			
Ossigeno, O <sub>2</sub>	31,891	260,83	921.6	661.8	1.393
Ottano, C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114.23	72.79	1711.3	1638.5	1.044
Propano, C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44,097	188,55	1679.4	1490.9	1.126
R134a, C F <sub>3</sub> C H <sub>2</sub> F	102.03	81.49			
Xenon, Xe	131.3	63.32			1.667

**Tab. a2: Proprietà di vari gas ideali ( $c_p$ ,  $c_v$  e  $k$  valutati a 300 K)**

Gas	$\alpha$	$\beta \times 10^3$	$\gamma \times 10^6$	$\delta \times 10^9$	$\varepsilon \times 10^{12}$
CO	3.710	-1.619	3.692	-2.032	0.240
CO <sub>2</sub>	2.401	8.735	-6.607	2.002	0
H <sub>2</sub>	3.057	2.677	-5.810	5.521	-1.812
H <sub>2</sub> O	4.070	-1.108	4.152	-2.964	0.807
O <sub>2</sub>	3.626	-1.878	7.055	-6.764	2.156
N <sub>2</sub>	3.675	-1.208	2.324	-0.632	-0.226
Aria	3.653	-1.337	3.294	-1.913	0.2763
SO <sub>2</sub>	3.267	5.324	0.684	-5.281	2.559
CH <sub>4</sub>	3.826	-3.979	24.558	-22.733	6.963
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	1.410	19.057	-24.501	16.391	-4.135
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	1.426	11.383	7.989	-16.254	6.749
Gas monatomici*	2.5	0	0	0	0

$$\frac{c_p}{R} = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 + \varepsilon T^4$$

$T$  espressa in K, equazioni valide da 300 a 1000 K

- per i gas monoatomici, es. He, Ne, e Ar,  $c_p$  è costante in un ampio intervallo di temperatura e pari a  $5/2 R$

**Tab. a3: Espressioni approssimate per il calcolo di  $c_p$  per gas ideali**

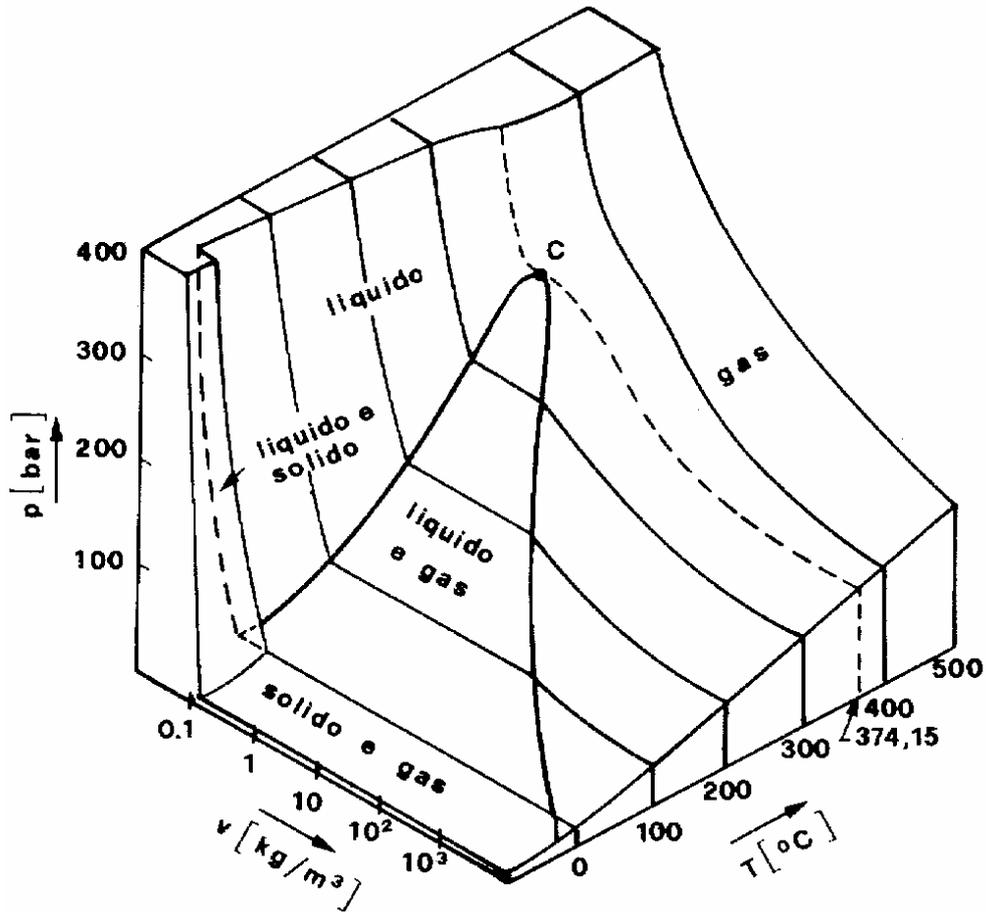


Figura a1. Superficie  $p$ - $v$ - $T$  per l'acqua.

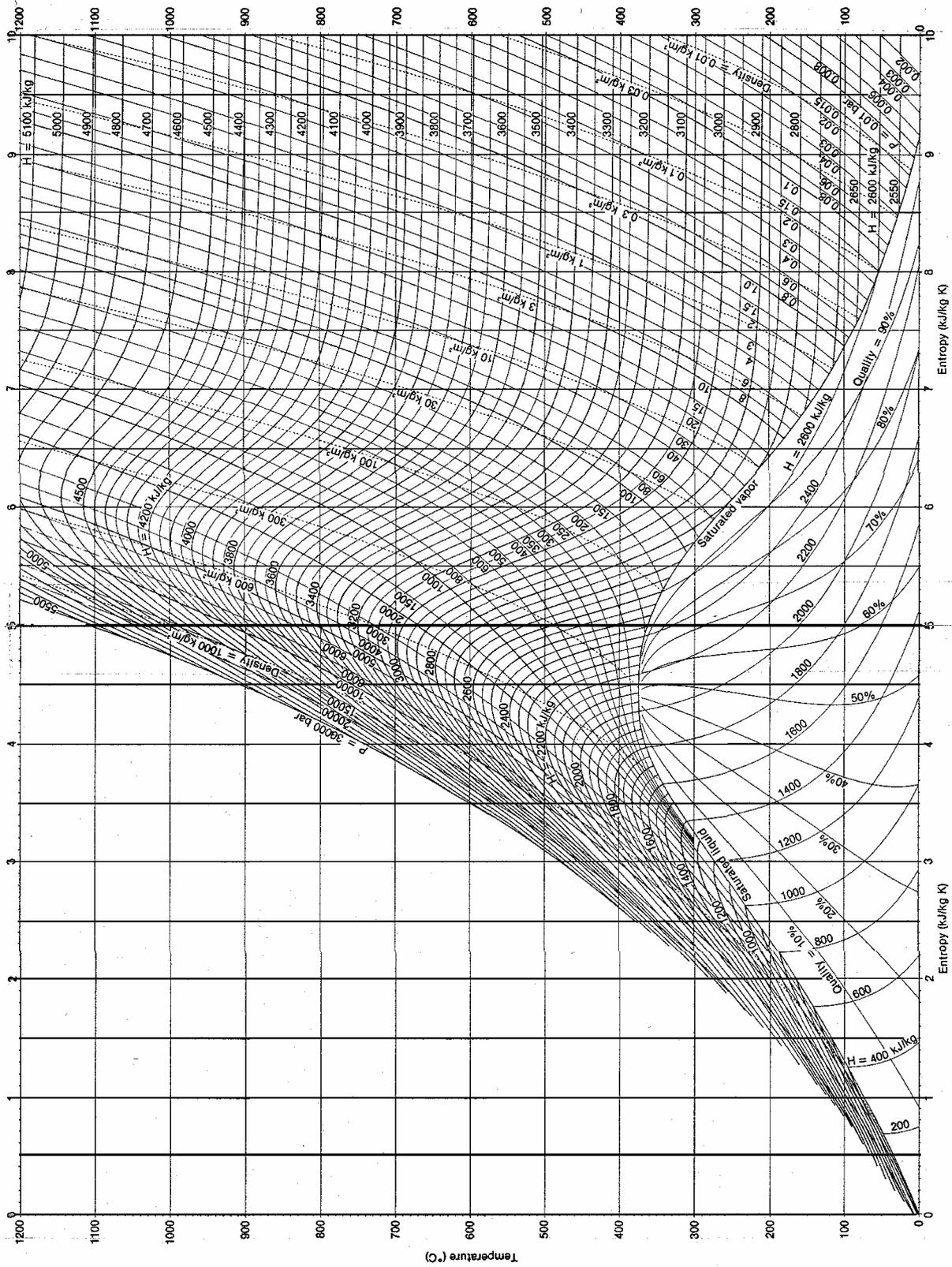


Figura a2. Diagramma T-s per l'acqua.

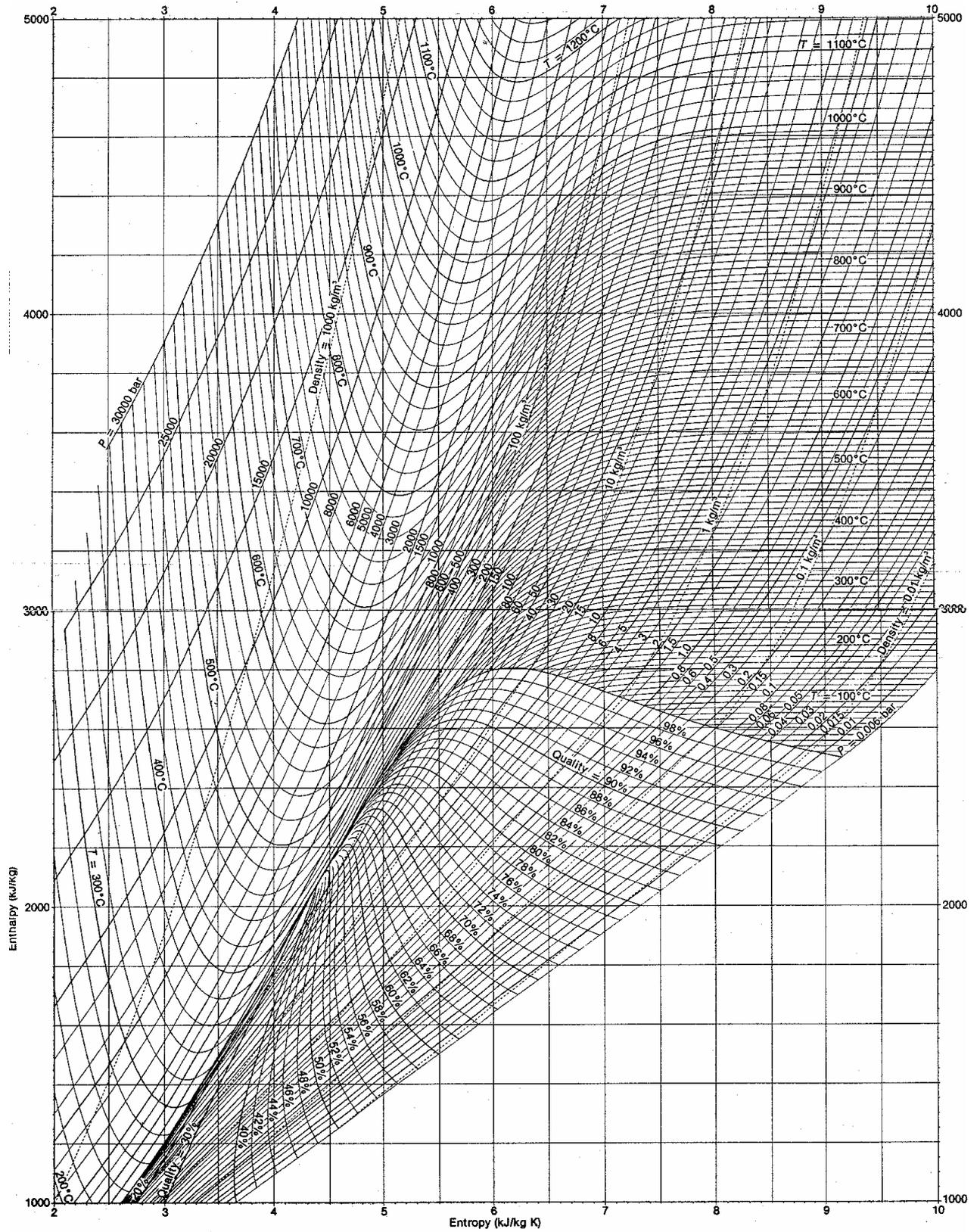


Figura a3. Diagramma di Mollier per l'acqua.

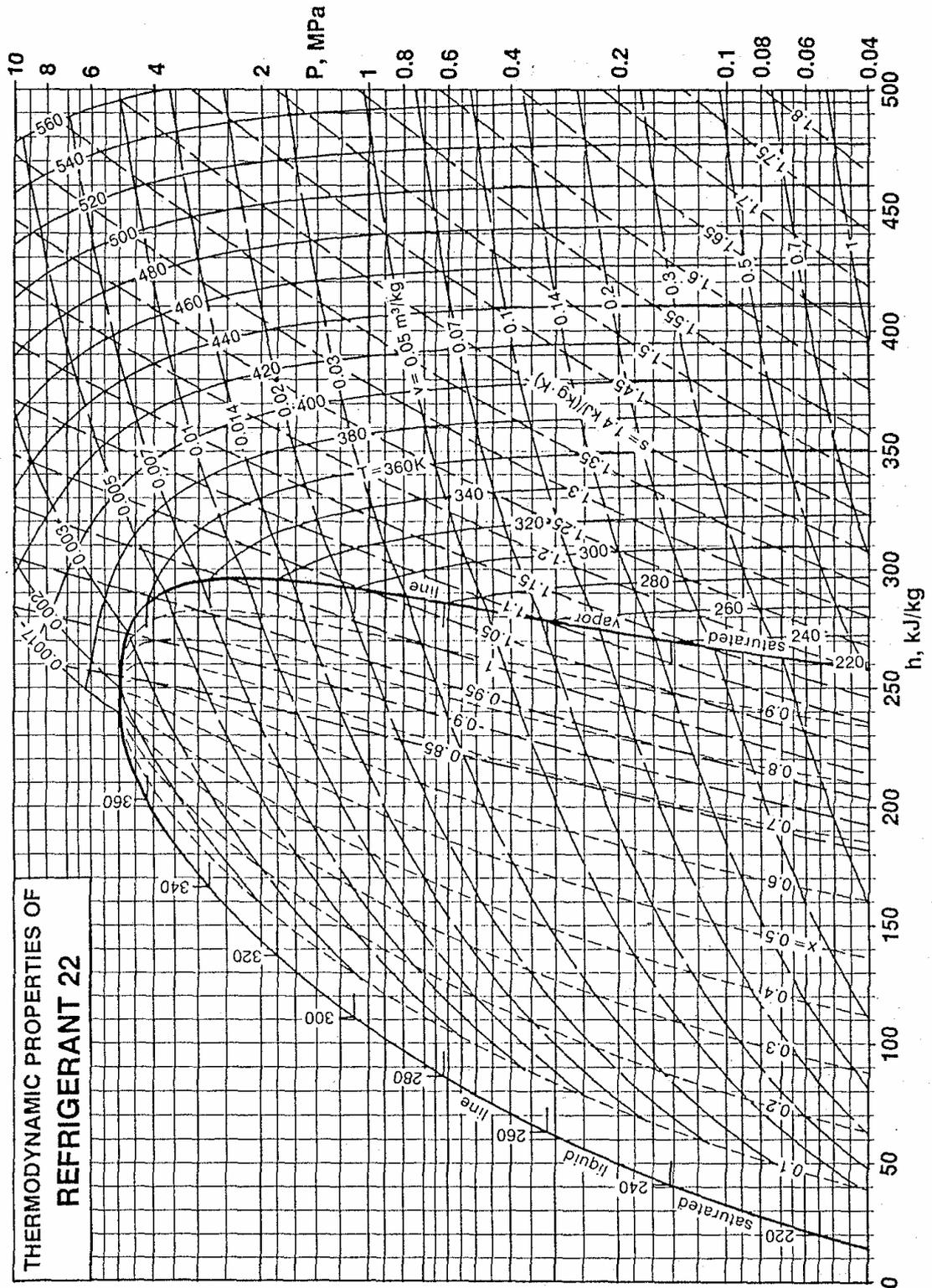


Figura a4. Diagramma  $p-h$  per il refrigerante R-22.

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 3. Le equazioni di bilancio di massa, energia ed entropia

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.01 –13.11.06.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione

Nel presente capitolo vengono introdotte le equazioni di bilancio della massa, dell'energia e dell'entropia nella forma più generale in cui vengono affrontate nel presente corso. Queste equazioni costituiscono la parte centrale del corso: nei capitoli seguenti, esse verranno opportunamente semplificate ed applicate allo studio dei sistemi aperti e delle macchine termiche, che rappresenta il nostro principale obiettivo. Risulta quindi evidente che è necessario comprenderle in maniera approfondita. La comprensione del concetto di "bilancio", unita naturalmente alla capacità di metterlo in pratica in varie situazioni, costituisce inoltre, a parere di chi scrive, una delle abilità fondamentali dell'ingegnere.

E' bene ricordare che le equazioni di bilancio della termodinamica sono valide indipendentemente dal fluido considerato e dal tipo di trasformazione che avviene (reversibile o meno). Le ipotesi sul fluido e sul tipo di trasformazione vengono introdotte in una fase successiva dello studio.

## GENERALITA' SUL BILANCIO DI UNA GRANDEZZA ESTENSIVA

Per una qualunque proprietà *estensiva*,  $X$ , è possibile scrivere un'equazione di bilancio che si esprime generalmente nella forma:

$$\begin{aligned} \text{Variazione nel tempo } \Delta t \text{ di } X = & \quad \text{Quantità di } X \text{ generata nel sistema nel tempo } \Delta t \\ & - \text{Quantità di } X \text{ distrutta nel sistema nel tempo } \Delta t \\ & + \text{Quantità di } X \text{ entrata (per flusso o convezione) nel sistema nel} \\ & \quad \text{tempo } \Delta t \\ & - \text{Quantità di } X \text{ uscita (per flusso o convezione) dal sistema nel} \\ & \quad \text{tempo } \Delta t \end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli ultimi due termini (entrata ed uscita) è possibile operare una ulteriore distinzione al loro interno: infatti la proprietà  $X$  può uscire dal sistema *fluendo* attraverso le pareti del sistema stesso oppure esserne *trasportata fuori* insieme alla massa uscente: nel primo caso si parla di *termine di flusso*, nel secondo di *termine convettivo* (dal latino *conveho*, trasporto insieme) o, talvolta, *advettivo*. Ad esempio, l'energia può uscire dal sistema attraverso le pareti (sotto forma di calore o lavoro) od esserne trasportata fuori insieme alla massa uscente, che porta via con sé la propria energia cinetica, potenziale ed interna.

Non sempre tutti i termini suddetti sono presenti. In particolare, valgono le regole seguenti, che consentono spesso di semplificare notevolmente l'equazione di bilancio:

- Se un sistema è a *regime*, il termine di **variazione** è nullo.
- Se un sistema è *isolato*, tutti i termini di **entrata ed uscita** sono nulli.
- Se un sistema è *chiuso*, i termini **convettivi** sono nulli.
- Se una grandezza ammette un *principio di conservazione* (cioè non si crea né si distrugge) i termini di **generazione** o **distruzione** sono per definizione nulli.

Il concetto di bilancio è applicabile non solo alle grandezze che abbiamo incontrato in termodinamica, ma anche con modifiche non sostanziali a grandezze non proprie della fisica (ad es. al flusso di denaro, alla popolazione di un paese, alle specie animali in un ecosistema ...). E' inoltre possibile fare un *bilancio di quantità di moto*, molto usato in fluidodinamica.

## Bilancio di massa

Il *principio di conservazione della massa* è uno dei cardini della fisica classica, quindi assumeremo nulli i termini di produzione e distruzione di tale grandezza.

$$\frac{dM}{dt} = \sum_i G_i - \sum_u G_u \quad (3.1)$$

L'equazione suddetta rappresenta in forma matematica un concetto abbastanza evidente intuitivamente: la variazione di massa per unità di tempo in un sistema è data dalla differenza tra le somme delle portate entranti meno quelle uscenti.

### ESEMPIO 3.1 – Bilancio di massa

In una vasca, che inizialmente contiene 100 kg di acqua, entrano attraverso un rubinetto 5 kg/s di acqua, mentre dallo scarico ne escono 2 kg/s. Determinare la massa di acqua contenuta nella vasca dopo 4 minuti.

Abbiamo a che fare con un sistema (la massa di acqua contenuta nella vasca) *non a regime, aperto*, con un solo ingresso ed una sola uscita.

L'equazione di bilancio della massa può allora essere scritta nella forma

$$\frac{dM}{dt} = G_i - G_u \Rightarrow dM = (G_i - G_u) dt$$

essendo le portate costanti, l'equazione può essere facilmente integrata tra gli stati iniziale e finale

$$\int_{M_i}^{M_f} dM = \int_{t_i}^{t_f} (G_i - G_u) dt$$

da cui infine:

$$\int_{M_i}^{M_f} dM = (G_i - G_u) \int_{t_i}^{t_f} dt \Rightarrow M_f - M_i = (G_i - G_u)(t_f - t_i)$$

$$M_f = 100 + (5 - 2) \cdot (240 - 0) = 820 \text{ kg}$$

□

Per i sistemi chiusi, si ha per definizione che tutte le portate sono nulle (essendo la superficie del sistema impermeabile alla massa) e quindi la equazione precedente si riduce a

$$\begin{cases} G_u = G_i = 0 \\ M = \text{cost} \end{cases} \quad (3.2)$$

questa è la ragione per cui i sistemi chiusi vengono detti anche masse di controllo (in quanto si studia la evoluzione di una quantità di massa fissata).

Nel caso di sistemi aperti *a regime* la massa contenuta è ugualmente costante (in quanto, essendo il sistema a regime, nessuna proprietà dipende dal tempo) ma in questo caso, dato che le portate non sono nulle, la equazione di bilancio di massa si riduce a

$$\begin{cases} \sum_i G_i = \sum_u G_u = G \\ M = \text{cost} \end{cases} \quad (3.3)$$

ed in particolare, per sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita

$$G_u = G_i = G \quad (3.4)$$

### Bilancio di energia

Analogamente alla massa, la fisica classica assume anche che *l'energia si conserva*.

Nel corso di questo secolo, la fisica relativistica ha sostituito i due principi di conservazione della massa e dell'energia con un unico *principio di conservazione della massa-energia* (o più propriamente, principio di conservazione dell'energia relativistica): ovvero la *somma* delle due grandezze (che naturalmente in questo caso vanno espresse nelle stesse unità) si conserva. Tuttavia nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche le trasformazioni di massa in energia e viceversa sono trascurabili, per cui si può continuare a ipotizzare che le due grandezze si conservino separatamente.

Anche nel caso dell'energia dunque i termini di generazione e distruzione dovrebbero essere nulli. Tuttavia, nella maggioranza dei casi si considera solo *un bilancio parziale* di energia. Ad esempio, quando nel nostro sistema sono presenti reazioni chimiche, si può pensare che l'energia chimica di combustione, anziché essere introdotta con i reagenti, sia *“prodotta”* all'interno del sistema; diversamente, dovremmo aggiungere un termine di natura chimica all'entalpia dei prodotti entranti. Analogamente, nel caso di reazioni nucleari, bisognerebbe considerare il bilancio massa-energia ed è più semplice pensare che l'energia venga *“creata”* dentro il sistema stesso anziché essere dovuta alla distruzione di massa (di entità comunque trascurabile) derivante dalle trasmutazioni atomiche. In tutti questi casi, si aggiunge un termine  $W_c$ , ovviamente *fittizio*, di *creazione di energia* alla equazione di bilancio.

Nella sua forma più generale, il bilancio di energia si scrive quindi come

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W_m + \sum_i G_i (u_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \quad (3.5)$$

E' bene ribadire ancora una volta la natura *fittizia* del termine  $W_c$ : esso deriva dal fatto che alcune forme di energia sono state *escluse* dal bilancio.

Nella  $W_t$  e  $W_m$  indicano rispettivamente la potenza termica e la potenza meccanica scambiate. Dal punto di vista ingegneristico, risulta utile suddividere la potenza meccanica scambiata in due termini: la prima rappresenta la potenza scambiata attraverso la parte di superficie del sistema non attraversata dalla massa, la seconda quella scambiata in corrispondenza delle aperture del sistema

$$W_m = W'_m + W_p \quad (3.6)$$

la differenza consiste nel fatto che, mentre la prima aliquota è *utilizzabile dal punto di vista tecnico* (ed è pertanto detta *potenza utile*) la seconda, pur dovendo essere computata tra i contributi di scambio meccanico, rappresenta la potenza scambiata nella introduzione od estrazione di fluido dal sistema: pertanto essa costituisce un *contributo intrinseco* al funzionamento di un sistema aperto e *non è utilizzabile tecnicamente*.

Ovviamente, tale distinzione non ha significato per un sistema chiuso.

La potenza di estrazione/introduzione è detta anche *potenza di pulsione* e per una apertura di superficie  $A$  su cui agisce la pressione  $p$ , attraversata dal fluido con velocità  $w$ , è esprimibile come

$$|W_{pi}| = F_i w_i = p_i A_i w_i = p_i v_i \rho_i A_i w_i = p_i v_i G_i \quad (3.7)$$

dove si è sfruttata la identità  $\rho v=1$ . Il segno deve considerarsi *negativo* per le aperture di ingresso (lavoro fatto sul sistema) e *positivo* per le bocche di uscita.

Si ha pertanto

$$W_p = - \sum_i p_i v_i G_i + \sum_u p_u v_u G_u \quad (3.8)$$

e sostituendo nella equazione di bilancio

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W'_m + \sum_i p_i v_i G_i - \sum_u p_u v_u G_u + \sum_i G_i (u_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \quad (3.9)$$

le sommatorie al secondo membro possono essere raggruppate come segue

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W'_m + \sum_i G_i (u_i + p_i v_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + p_u v_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \quad (3.10)$$

ed infine si può introdurre l'entalpia ( $h=u+pv$ ) al posto della energia interna

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W'_m + \sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) + W_c \quad (3.11)$$

Questo vuol dire che la variazione nella unità di tempo della energia totale (cinetica più potenziale più interna) del sistema è pari alla potenza termica entrante, meno la potenza *utile* (ovvero quella utilizzabile dal punto di vista tecnico, che per convenzione si considera positiva se uscente), più l'energia introdotta nel sistema dal flusso di massa entrante, meno l'energia estratta dal sistema dal flusso di massa uscente. Questi ultimi due termini sono appunto termini *convettivi*, dato che rappresentano il flusso di energia trasportato dal flusso di massa, ed includono il lavoro necessario per la introduzione/estrazione del flusso stesso.

A questo punto dovrebbe essere chiaro perché nei termini convettivi compaia l'entalpia al posto della energia interna. La ragione è che alla introduzione (o alla estrazione) di una quantità di massa dal sistema è associato un lavoro per unità di tempo, pari a  $G_i p_i v_i$ . Tale termine, pur dovendo figurare tra i contributi meccanici al bilancio di energia, non è utilizzabile tecnicamente e viene pertanto conglobato tra i contributi all'energia del sistema dovuti allo scambio di massa.

Le tabelle seguenti riassumono le forme più comuni in cui il bilancio di energia viene espresso per i sistemi chiusi e per quelli aperti a regime. In tutte le espressioni si è assunto  $W_c=0$ . Altre forme verranno considerate nei casi esposti nel seguito.

$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W_m$	[W]	Bilanci di energia riferiti a tutto il sistema, per unità di tempo.
$\frac{dU}{dt} = W_t - W_m$	[W]	Come sopra, ma con energia potenziale e cinetica trascurabili.
$\frac{du}{dt} = \frac{W_t}{M} - \frac{W_m}{M}$	[W/kg]	Ottenuta dalla precedente dividendo per $M$ (riferita ad 1 kg di fluido)
$du = dq - dl$	[J/kg]	Ottenuta dalla precedente moltiplicando per $dt$ (trasf. infinitesima)
$(u_2 - u_1) = q_{12} - l_{12}$	[J/kg]	Ottenuta per integrazione dalla precedente

**Tabella 1:** Forme del bilancio di energia (I principio) per sistemi chiusi.

$0 = W_t - W'_m + G[(h_i + e_{ci} + e_{pi}) - (h_u + e_{cu} + e_{pu})]$	[W]	Bilancio di energia riferiti a tutto il sistema, per unità di tempo.
$W_t - W'_m + G(h_i - h_u) = 0$	[W]	Come sopra, ma con energia potenziale e cinetica trascurabili.
$h_u - h_i = q_{iu} - l'_{iu}$	[J/kg]	Ottenuta dalla precedente dividendo per $G$ (riferita ad 1 kg di fluido che attraversa il sistema)
$dh = dq - dl'$	[J/kg]	Riferita ad una "trasformazione infinitesima" (per un sistema con ingresso e uscita distanti un infinitesimo).

**Tabella 2:** Forme del bilancio di energia (I principio) per sistemi aperti a regime con un solo ingresso ed una sola uscita.

Nel successivo capitolo 5, l'equazione di bilancio dell'energia verrà estesamente applicata ai sistemi aperti a regime, che sono quelli di maggiore interesse tecnico. Per adesso vediamo due applicazioni a *sistemi aperti non a regime*.

**ESEMPIO 3.2 – Riempimento di una bombola con gas perfetto.**

Si vuole riempire una bombola di volume  $V = 5 \text{ L}$ , che contiene inizialmente azoto alla pressione  $p_1 = 2 \text{ bar}$  ed alla temperatura  $T_1 = 20 \text{ °C}$ , prelevando azoto da una linea di alimentazione alla pressione  $p_a = 200 \text{ bar}$  ed alla temperatura  $T_a = 15 \text{ °C}$ . Determinare la massa di azoto contenuta della bombola e la sua temperatura al termine del riempimento, quando la pressione nella bombola raggiunge i 200 bar. L'azoto può essere considerato un gas perfetto con calori specifici costanti e il sistema può essere considerato adiabatico.

☞ *La soluzione è riportata nel file C4RIEMP-GP.XLS*

Abbiamo a che fare con un sistema (la quantità di azoto contenuta nella bombola) *non a regime, aperto*, con un solo ingresso. La superficie del sistema è *rigida ed adiabatica*, quindi gli scambi di lavoro utile e di calore con l'esterno sono nulli ed il volume  $V$  del sistema è costante. Definiamo  $G_a$  la portata entrante (incognita e variabile nel tempo).

Le equazioni di bilancio della massa e dell'energia possono allora essere scritte (trascurando i termini cinetico e potenziale) nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = G_a \\ \frac{dU}{dt} = G_a h_a \end{cases}$$

combinando le quali si ottiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dM}{dt} h_a \Rightarrow dU = dM h_a$$

e integrando tra la condizione iniziale e finale

$$U_2 - U_1 = (M_2 - M_1) h_a$$

Nel caso di un gas perfetto si possono usare le relative equazioni di stato, assumendo entalpia ed energia interna nulle a  $0 \text{ K}^1$  e calori specifici costanti:

$$u = c_v T, \quad U = M c_v T, \quad h_a = c_p T_a$$

sostituendo nella equazione precedente si ha

$$c_v M_2 T_2 - c_v M_1 T_1 = (M_2 - M_1) c_p T_a$$

tenuto conto che dall'equazione di stato (v. Cap.3)

$$MT = \frac{pV}{R}$$

si ottiene

$$\frac{c_v}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = (M_2 - M_1) c_p T_a$$

ed essendo  $V_2 = V_1 = V$

$$\frac{c_v V}{R} (p_2 - p_1) = (M_2 - M_1) c_p T_a$$

Dalla equazione precedente si ricava  $M_2$ , ricordando che  $M_1 = \frac{p_1 V}{R T_1}$  e  $k = \frac{c_p}{c_v}$

<sup>1</sup> Si potrebbe verificare facilmente che si ottiene lo stesso risultato ponendo  $u_0 = 0$  e  $h_0 = p_0 v_0 = RT_0$  ad una qualunque temperatura arbitraria  $T = T_0$

$$M_2 = \frac{p_1 V}{R T_1} + \frac{V}{k R T_a} (p_2 - p_1) =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0.005}{296.91 \cdot 293.15} + \frac{0.005}{1.4 \cdot 296.91 \cdot 288.15} (2 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^5) = 0.838 \text{ kg}$$

e si ricava infine  $T_2$  dall'equazione di stato

$$T_2 = \frac{p_2 V}{R M_2} = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 0.005}{296.91 \cdot 0.838} = 401.9 \text{ K} = 128.7 \text{ °C}$$

La bombola quindi si riscalda; infatti, è pericoloso toccare le bombole appena sono state riempite: talvolta il riempimento si esegue in un bagno d'acqua per smaltire il calore, ed in questo modo si aumenta anche la quantità di gas introdotta. Ma perché accade questo? Il gas che viene introdotto successivamente comprime il gas già presente nella bombola, riscaldandolo. Da un punto di vista energetico, il lavoro meccanico fatto per introdurre il gas si traduce in incremento di energia interna del sistema.

Nel caso che non sia accettabile considerare il fluido nella bombola un gas ideale, ci saremmo dovuti fermare alla equazione  $dU = dM h_a$  e fare uso delle tabelle termodinamiche. La equazione differenziale suddetta dovrebbe allora essere *integrata numericamente*, calcolando l'incremento di energia conseguente ad un piccolo incremento di massa e quindi determinando le rimanenti variabili di stato dal valore del volume specifico  $v = V/M$  e dell'energia interna, che determinano lo stato del sistema in ogni istante. Detto procedimento andrebbe ripetuto fino a determinare l'incremento di massa che provoca il raggiungimento della pressione finale desiderata.

□

### ***ESEMPIO 3.3 – Svuotamento di una bombola.***

Da una bombola di volume  $V = 15 \text{ L}$ , che contiene inizialmente isobutano saturo alla temperatura  $T_1 = 20 \text{ °C}$ , viene prelevata una portata costante  $G_u = 0.02 \text{ kg/s}$  di vapore (di isobutano) saturo secco. Determinare la potenza termica scambiata tra la bombola e l'ambiente nell'ipotesi che la temperatura del sistema si mantenga costante.

Abbiamo a che fare con un sistema (la quantità di isobutano contenuta nella bombola) *non a regime, aperto*, con una sola uscita. La superficie del sistema è *rigida* ma non *adiabatica*, quindi lo scambio di lavoro utile con l'esterno è nullo. Il volume totale  $V$  è costante. Dato che la temperatura è costante, anche la pressione e le varie grandezze di saturazione ( $v_f$  etc.), tra cui quindi anche  $h_g$ , si mantengono costanti.

Le equazioni di bilancio della massa e dell'energia possono allora essere scritte (trascurando i termini cinetico e potenziale) nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -G_u \\ \frac{dU}{dt} = W_T - G_u h_g \end{cases}$$

Procedendo come nell'esempio precedente, otteniamo integrando le due equazioni

$$\begin{cases} M_2 - M_1 = -G_u \Delta t \\ U_2 - U_1 = W_T \Delta t - G_u h_g \Delta t \end{cases}$$

Dove  $\Delta t$  è l'intervallo di tempo considerato (vedremo che il risultato non dipende da esso).

Bisogna notare che abbiamo anche implicitamente ammesso che  $W_T$  sia costante, come sarebbe dimostrabile e come sarà verificato a posteriori.

Per completare il calcolo sono necessari alcuni laboriosi passaggi matematici. La seconda equazione può essere rielaborata come segue

$$M_2 u_2 - M_1 u_1 = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

Dalla definizione di titolo risulta

$$v = v_f + x (v_g - v_f) = v_f + x v_{fg}$$

$$u = u_f + x (u_g - u_f) = u_f + x u_{fg}$$

ricavando  $x$  dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ha

$$u_1 = u_f + \frac{v_1 - v_f}{v_{fg}} u_{fg}$$

$$u_2 = u_f + \frac{v_2 - v_f}{v_{fg}} u_{fg}$$

Le ultime due relazioni possono essere sostituite nella equazione di bilancio dell'energia per ottenere

$$M_2 \left( u_f + \frac{v_2 - v_f}{v_{fg}} u_{fg} \right) - M_1 \left( u_f + \frac{v_1 - v_f}{v_{fg}} u_{fg} \right) = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

Con alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$(M_2 - M_1) \left( u_f - \frac{v_f}{v_{fg}} u_{fg} \right) + \frac{u_{fg}}{v_{fg}} (M_2 v_2 - M_1 v_1) = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

Tenendo infine conto che dal fatto che il volume è costante si ha

$$M_2 v_2 = M_1 v_1 = V$$

e che quindi il secondo termine del primo membro si annulla, e dal bilancio di massa risulta

$$M_2 - M_1 = -G_u \Delta t$$

il bilancio di energia si semplifica (finalmente!) in

$$-G_u \Delta t \left( u_f - \frac{v_f}{v_{fg}} u_{fg} \right) = (W_T - G_u h_g) \Delta t$$

$$W_T = G_u \left( h_g - u_f + \frac{v_f}{v_{fg}} u_{fg} \right)$$

Sfruttando infine le relazioni tra energia ed entalpia

$$u_{fg} = h_{fg} - p v_{fg}$$

$$u_f = h_f - p v_f$$

la relazione precedente si semplifica, con alcuni passaggi algebrici, in

$$W_T = G_u \left( 1 + \frac{v_f}{v_{fg}} \right) h_{fg}$$

Nelle ipotesi fatte la potenza è quindi proporzionale alla portata spillata ed indipendente dal tempo e dal volume del recipiente.

Dal programma CATT si ottengono i dati per l'isobutano saturo alla temperatura di 20 °C:

$$p = 0.3018 \text{ MPa}, \quad v_f = 0.001796 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad v_{fg} = 0.1248 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad h_{fg} = 335 \text{ kJ/kg},$$

e sostituendo si ottiene infine

$$W_T = 0.002 \left( 1 + \frac{0.001796}{0.1248} \right) \cdot 335 = 680 \text{ W}$$

Da notare che, dato che  $v_f/v_{fg}$  è generalmente molto minore di 1, la relazione ottenuta può essere approssimata come

$$W_T \cong G_u h_{fg} = 0.002 \cdot 335 = 670 \text{ W}$$

Quindi, come era logico aspettarsi, è necessario fornire calore dall'esterno principalmente per "produrre" il vapore che viene estratto dalla bombola.

Per quello che abbiamo appreso sulla trasmissione del calore, la bombola si deve trovare ad una temperatura inferiore a quella ambiente per potere ricevere calore da esso. Questo spiega la formazione di condensa o addirittura di ghiaccio su recipienti dai quali viene estratta una elevata quantità di vapore.

Con questo metodo è anche possibile mantenere refrigerati grossi recipienti contenenti gas liquefatti (es. azoto liquido) spillando continuamente una piccola portata di vapore da essi.

□

#### **ESEMPIO 3.4 – Transitorio in un generatore di vapore.**

Un generatore di vapore di volume  $V = 18 \text{ m}^3$  fornisce una portata  $G = 6 \text{ kg/s}$  di vapore saturo secco a  $p_1 = 70 \text{ bar}$ . L'acqua di alimento si trova a 20°C. La massa di acqua e vapore contenuta nel generatore è pari a  $M = 10 \text{ t}$ . Improvvisamente per un guasto si interrompe l'erogazione di calore, ma il generatore continua ad erogare la stessa portata di vapore saturo secco e ad essere rifornito di acqua di alimento. Valutare come diminuisce la pressione del vapore erogato.

📄 *La soluzione è riportata nel file C4GVAP.XLS*

Applichiamo le nostre equazioni di bilancio al sistema aperto costituito dal fluido contenuto nel generatore. Dato che le portate di ingresso e di uscita si mantengono costanti dal bilancio di massa si ha

$$\frac{dM}{dx} = G_i - G_u = 0 \quad \rightarrow \quad M = \text{cost}, \quad G_i - G_u = G \quad (a)$$

ovvero, si dice che il sistema è a *regime di massa*.

Il bilancio di energia, tenuto conto che il sistema è adiabatico ed il lavoro scambiato è nullo, si trascurano i termini cinetico e potenziale e abbiamo un solo ingresso ed una sola uscita

$$\frac{dU}{dt} = \cancel{W_x} - \cancel{W_m} + G (h_i - h_u) \quad (b)$$

Dove  $h_i$  ed  $h_u$  rappresentano rispettivamente le entalpie dell'acqua in ingresso e del vapore saturo secco in uscita. Infine si deve aggiungere la condizione che il volume del sistema è costante, che unita alla condizione  $M = \text{cost}$  ci dice in definitiva che

$$V, M = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \frac{V}{M} = v = v_f + x(v_f - v_g) = \text{cost} \quad (c)$$

Sviluppando il bilancio di energia, tenuto conto che  $M = \text{cost}$ , si ottiene

$$M \frac{du}{dt} + u \frac{dM}{dt} = G (h_i - h_u) \quad (d)$$

La integrazione su un intervallo di tempo finito del bilancio di energia (d) è complicato dal fatto che anche l'entalpia del vapor saturo secco in uscita,  $h_u$  varia con la pressione. Possiamo però ottenere il valore istantaneo di  $dp/dt$ , sviluppando  $u$  in funzione di  $p$  e  $v$  nella forma

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v dp + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_p dv \rightarrow \frac{du}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v \frac{dp}{dt}$$

Dove, in forza della (c), si ha  $dv = 0$ . Per cui

$$\frac{dp}{dt} = \frac{G (h_i - h_u)}{M \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v}$$

da cui si vede (come era lecito aspettarsi) che la velocità di depressurizzazione diminuisce all'aumentare della massa di acqua contenuta nel generatore ed aumenta all'aumentare della portata.

Rimane ora da valutare la derivata di  $u$  rimasta,  $\left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v$ , relativamente difficile da calcolare

analiticamente; tuttavia essa può essere stimata in maniera approssimata come rapporto incrementale, con l'aiuto di un programma di calcolo, considerando ad esempio  $\Delta p = 1$  bar. Nelle condizioni iniziali del problema (a 70 bar, appena dopo l'interruzione della potenza termica) si ha

$$\left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_v \cong \frac{u(p + \Delta p, v) - u(p, v)}{\Delta p} = 5.2 \times 10^{-2} \text{ J/kg Pa}$$

Noti i valori delle rimanenti proprietà a  $p = 70$  bar

$$v_1 = v_2 = v = \frac{V}{M} = 0.0018 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad h_i = 90.5 \text{ kJ/kg}, \quad h_u = h_g = 2772.3 \text{ kJ/kg}$$

si ottiene infine

$$\frac{dp}{dt} = -3.1 \times 10^4 \text{ Pa/s} \quad (\text{ovvero, circa 1 bar ogni 3 s})$$

Se contemporaneamente alla erogazione di calore si interrompe anche l'erogazione di acqua di alimento, le cose si complicano perché il sistema non è più a regime di massa e non si può più annullare  $dM/dt$  nella equazione (b), né considerare il volume specifico costante.

Infine, nella realtà, bisogna anche tener conto che le strutture metalliche del generatore, raffreddandosi, forniscono energia al vapore, per cui il processo non è propriamente adiabatico: questa "inerzia termica" delle strutture metalliche mitiga il transitorio di pressione e potrebbe essere valutata introducendo un termine aggiuntivo di scambio termico, o considerando le strutture metalliche come parte del sistema.

□

## Bilancio di entropia

Il secondo principio della termodinamica ammette in generale l'esistenza di un termine di produzione dell'entropia, quindi scriveremo l'equazione di bilancio nella forma:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \sum_i G_i s_i - \sum_u G_u s_u + \dot{S}_{irr} \quad (3.12)$$

Dove il termine  $W_{tk}/T_k$  rappresenta il flusso di entropia associato al flusso termico totale  $W_{tk}$ . E' bene ricordare che la temperatura  $T_k$  rappresenta la temperatura della superficie del sistema nel punto in cui è attraversata dal flusso termico. La sommatoria è introdotta per tenere conto che parti diverse della superficie di contorno possono trovarsi a diverse temperature.

Il termine  $\dot{S}_{irr}$  viene detto *termine di irreversibilità* e rappresenta l'incremento di entropia per unità di tempo dovuto alla irreversibilità delle trasformazioni che avvengono nel sistema. Come già esposto nelle note introduttive del corso, tale termine è *nullo* se le trasformazioni sono *reversibili*, *positivo* se le trasformazioni sono *irreversibili*, mentre è *impossibile* che tale termine assuma un valore *negativo*. L'equazione ci dice quindi che la variazione di entropia per unità di tempo è pari al flusso di entropia attraverso le pareti del sistema, più l'entropia introdotta dal flusso di massa entrante, meno l'entropia estratta dal sistema dal flusso di massa uscente, più l'eventuale contributo  $\dot{S}_{irr}$  (da alcuni definito anche *sorgente entropica*) dovuto alle irreversibilità.

I fenomeni naturali che causano irreversibilità possono essere classificati in due gruppi. Il primo comprende i *fenomeni dissipativi*, ovvero le conversioni di energia nella forma di lavoro in energia interna (fenomeni di attrito, resistenza ohmica). Il secondo comprende fenomeni che hanno una *tendenza spontanea* ad evolvere verso l'equilibrio (reazioni chimiche, equalizzazione delle temperature in un corpo, fenomeni di mescolamento, espansione libera di un gas nel vuoto, passaggio di calore da corpi più caldi a corpi più freddi).

Per un sistema isolato (ovvero che non ha alcuna interazione con l'esterno) il bilancio entropico si riduce alla forma

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S}_{irr} \geq 0 \quad (3.13)$$

che esprime matematicamente il fatto che l'entropia di un sistema *isolato* è *costante* se le trasformazioni sono reversibili e *strettamente crescente* se le trasformazioni sono irreversibili. Per un *sistema chiuso* il bilancio entropico è dato da

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \dot{S}_{irr} \quad (3.14)$$

moltiplicando entrambi i termini per  $dt$  si ottiene l'espressione già enunciata nel Cap.1 (generalizzata allo scambio con più sorgenti a temperatura diversa)

$$dS = \sum_k \frac{dQ_k}{T_k} + dS_{irr} \quad (3.15)$$

Infine per un *sistema aperto a regime* con un solo ingresso ed una sola uscita si ha

$$G (s_u - s_i) = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \dot{S}_{irr} \quad (3.16)$$

e in particolare, se il sistema, oltre ad essere a regime, è *adiabatico*

$$G (s_u - s_i) = \dot{S}_{irr} \quad (3.17)$$

il che vuol dire che per un sistema aperto a regime *adiabatico* l'entropia specifica del fluido all'uscita deve essere maggiore (per trasformazioni irreversibili) od uguale (per trasformazioni reversibili) a quella in ingresso.

Una importante conseguenza dell'analisi precedente è che una trasformazione *adiabatica reversibile* è comunque *isoentropica*, indipendentemente dal tipo di sistema e dal fluido considerato.

**ESEMPIO 3.5 – Riempimento di una bombola con gas perfetto.**

Valutare se il processo di riempimento adiabatico di una bombola di azoto illustrato nell'ESEMPIO 3.2 è reversibile o meno.

 *La soluzione è riportata nel file C4RIEMP-GP.XLS*

Le equazioni di bilancio della massa e dell'entropia possono essere nella forma

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = G_a \\ \frac{dS}{dt} = G_a s_a + \dot{S}_{irr} \end{cases}$$

combinando le quali si ottiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dM}{dt} s_a + \dot{S}_{irr} \Rightarrow \dot{S}_{irr} dt = dS - dM s_a$$

e integrando tra la condizione iniziale e finale

$$S_{irr} = S_2 - S_1 - (M_2 - M_1) s_a = M_2 (s_2 - s_a) - M_1 (s_1 - s_a)$$

Nel caso di un gas perfetto con calori specifici costanti (v Cap.3):

$$S_{irr} = M_2 \left( c_p \ln \frac{T_2}{T_a} - R \ln \frac{p_2}{p_a} \right) - M_1 \left( c_p \ln \frac{T_1}{T_a} - R \ln \frac{p_1}{p_a} \right)$$

dove è necessario esprimere le temperature in kelvin. Sostituendo i valori trovati nell'esempio 3.2 si ottiene

$$\begin{aligned} S_{irr} &= 0.838 \left( 1039 \ln \frac{401.9}{288.15} - 296.91 \ln \frac{200}{200} \right) - 0.0115 \left( 1039 \ln \frac{293.15}{288.15} - 296.91 \ln \frac{2}{200} \right) = \\ &= 274 \text{ J/K} \end{aligned}$$

il che conferma (con alcune cautele aggiuntive che sono illustrate nel seguito) che il processo non è reversibile: infatti è impossibile “riestrarre” dalla bombola tutto l'azoto alla pressione costante di 200 bar in assenza di altre azioni esterne.

Ripetendo il calcolo con una pressione di alimentazione dell'azoto  $p_a = 50$  bar si troverebbe  $S_{irr} = -66$  J/K, ovvero un processo impossibile (la verifica è lasciata per esercizio all'allievo: non si dimentichi di ricalcolare anche  $M_2$  e  $T_2$ ); infatti, abbastanza ovviamente, è impossibile

riempire una bombola a 200 bar avendo a disposizione azoto alla pressione di 50 bar e senza nessun'altra azione esterna!

Si può anche verificare che per  $p_a = 100$  bar si ottiene  $S_{irr} = 103.7$  J/K: allora questo processo è possibile ed irreversibile? In realtà bisogna essere cauti: procedendo come abbiamo fatto otteniamo un valore "integrale" della produzione di entropia: se tale risultato è negativo vuol dire che sicuramente *almeno una parte* del processo è impossibile, ma se  $S_{irr}$  è positivo bisogna ulteriormente verificare che il termine di irreversibilità *rimanga positivo durante tutto il processo*, ovvero che  $\dot{S}_{irr}(t) > 0 \forall t$ ; nel caso considerato si può verificare che per pressioni della bombola crescenti da 2 a 100 bar si ha  $S_{irr} = 130$  J/K  $> 0$  mentre da 100 a 200 bar si ha  $S_{irr} = -26.5$  J/K  $< 0$ , quindi una parte del processo è (come ovvio) impossibile.

Più in generale, rielaborando la equazione di bilancio entropico per il sistema in questione si ha

$$\begin{aligned} \dot{S}_{irr} dt &= dS - dM s_a = d(Ms) - dM s_a = Mds + s dM - dM s_a = \\ &= Mds + dM (s - s_a) = M \left( \frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp \right) - (s - s_a) dM \end{aligned}$$

questa quantità deve sempre mantenersi non negativa e la verifica è piuttosto complessa ma fattibile sostituendo ad  $M$  la sua espressione in funzione di  $p$  e  $T$ .

□

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 4.1

In un serbatoio cilindrico di area di base  $A = 0.0125 \text{ m}^2$ , inizialmente vuoto, entra una portata di acqua  $G_i = 7 \text{ kg/s}$ . Il serbatoio ha sul fondo un foro da cui l'acqua esce con una portata  $G_u(t) = K L(t)$ , dove  $L$  è il livello di acqua nel serbatoio,  $t$  è il tempo e  $K = 1.4 \text{ kg/m s}$ . Valutare l'andamento nel tempo del livello nel serbatoio e determinarne il valore quando si raggiungono condizioni di regime. Assumere la densità dell'acqua pari a  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Stabilire un'analogia con il processo di carica di un condensatore elettrico e con l'esercizio 2.12.

[Valore a regime  $L_r = 5 \text{ m}$ ;  $L(t) = L_r (1 - \exp(-t/\tau))$ ,  $\tau = 8.93 \text{ s}$ ]

### ESERCIZIO 4.2

La bombola di cui all'esempio 3.2, dopo avere ultimato il riempimento, viene lasciata raffreddare fino alla temperatura di  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  e successivamente riconnessa alla linea di alimentazione e riempita nuovamente (sempre in condizioni adiabatiche) fino a riportarla alla pressione di 200 bar. Determinare la massa di azoto che è possibile introdurre e la nuova temperatura finale della bombola.

[ $T_3 = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $M_3 - M_2 = 0.226 \text{ kg}$ ]

### ESERCIZIO 4.3

Un serbatoio di azoto liquido contiene detto fluido in condizioni di saturazione alla pressione di 6 bar. Il serbatoio ha una superficie  $A = 4 \text{ m}^2$  e la sua parete ha un coefficiente globale di scambio  $u = 0.03 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . L'ambiente esterno si trova ad una temperatura  $T_a = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Determinare la portata di azoto che è necessario spillare per mantenere il serbatoio a detta pressione, assumendo che l'azoto spillato abbia l'entalpia del vapore saturo secco. Determinare il consumo di azoto in un giorno.

Per l'azoto alla pressione di 6 bar il programma CATT fornisce:  $T_{sat} = -176.8 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $v_f = 0.001408 \text{ m}^3/\text{kg}$ ,  $v_g = 0.04046 \text{ m}^3/\text{kg}$ ,  $h_f = -81.53 \text{ kJ/kg}$ ,  $h_g = 86.85 \text{ kJ/kg}$ .

[ $G = 0.14 \text{ g/s}$ ,  $M = 12 \text{ kg}$ ]

### ESERCIZIO 4.4

Ripetere il calcolo dell'esempio 3.2 considerando il riempimento di una bombola di volume  $V = 5 \text{ L}$ , inizialmente a  $p_1 = 2 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , fino alla pressione  $p_2 = 10 \text{ bar}$  con ammoniaca prelevata da una linea in condizioni di vapore saturo secco alla pressione  $p_a = 50 \text{ bar}$ . (in questo caso, il modello di gas ideale è inapplicabile).

[ $T_2 = 406 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $M_2 = 0.1515 \text{ kg}$ ; la soluzione si trova per tentativi e mostra la necessità di raffreddare la bombola durante il riempimento]

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 4. I sistemi aperti a regime

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.01 – 13.11.06.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

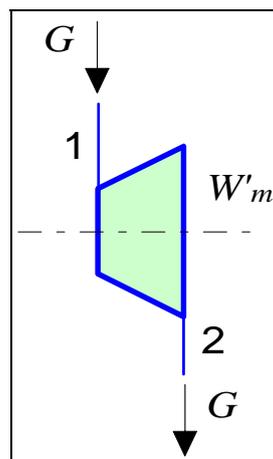
## Introduzione

In questo capitolo vengono trattati i più comuni organi che compongono le macchine termiche. Tali organi sono *generalmente* sistemi aperti, che noi supponiamo di considerare in regime *stazionario* o *periodico* (in altre parole, non ci interessiamo dei transitori dovuti all'avviamento o alla regolazione delle macchine suddette). Le equazioni di bilancio di massa, energia ed entropia vengono semplificate per considerare condizioni stazionarie ed in seguito applicate ai modelli che vengono comunemente adottati per rappresentare gli organi suddetti. Il testo è corredato da una serie di esempi significativi, che il lettore è invitato a non tralasciare.

## TURBINE ED ESPANSORI

Una turbina è un dispositivo in cui si ha produzione di lavoro come conseguenza del passaggio del fluido attraverso una serie di palettature, opportunamente sagomate, connesse ad un albero rotante.

Le turbine sono usate ad esempio per azionare gli alternatori negli impianti termoelettrici (il fluido è in genere vapore acqueo, ma anche gas di combustione, oppure anidride carbonica od elio in alcuni tipi di reattori nucleari); a causa del loro vantaggioso rapporto peso-potenza, sono usate anche nei motori aeronautici ed in alcuni motori navali.



**Figura 1.** Schematizzazione di una turbina.

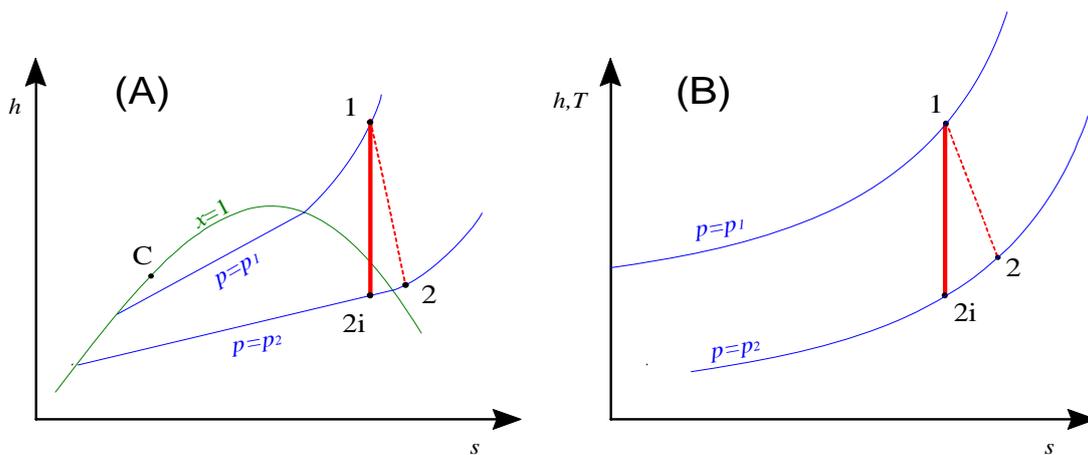
Una turbina viene in genere schematizzata come in Figura 1. Il fluido in ingresso è in genere un gas ad elevata temperatura, che subisce nel passaggio una diminuzione di pressione e temperatura. Il fluido può pertanto trovarsi all'uscita nelle condizioni di vapore saturo, sebbene si tenda ad evitare tale situazione (o comunque a fare in modo di avere un titolo in uscita molto vicino a 1) per evitare l'erosione delle palettature dovute agli urti delle goccioline di fluido condensato.

Per una turbina, le variazioni di energia cinetica e potenziale tra ingresso ed uscita sono trascurabili. Inoltre, per massimizzare il lavoro ottenuto, si fa in modo da rendere lo scambio termico con l'ambiente minimo, per cui il sistema si può considerare *adiabatico*. I bilanci di energia ed entropia (vedi cap.3, tab.2) si riducono pertanto a

$$\begin{cases} G (h_1 - h_2) = W'_m \\ G (s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.1)$$

### Rendimento isoentropico della turbina

A causa degli inevitabili attriti, la espansione in turbina presenta sempre le caratteristiche di un fenomeno irreversibile. Se la trasformazione si può considerare adiabatica, questo comporta, come risulta dalla seconda delle Eq.(4.1), che si abbia in uscita una entropia maggiore di quella in ingresso e che quindi in un diagramma  $h-s$  (vedi Fig.2) il punto finale della trasformazione cada sulla destra rispetto alla verticale passante per il punto iniziale. Se paragoniamo la espansione reale a quella ideale reversibile (che è isoentropica, vedi Fig.2), vediamo che, a parità di pressione in uscita, si ha una riduzione del salto entalpico in turbina e quindi (a parità di portata massica) una riduzione di potenza.



**Figura 2.** Espansione reale ed ideale nel diagramma  $h-s$  per: (A) fluido reale, (B) gas ideale. Si tiene conto di questo definendo il *rendimento isoentropico* della turbina come

$$\eta_T = \frac{W'_m}{W'_{m,id}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2i} - h_1} \quad (4.2)$$

unicamente nel caso di un gas ideale con  $c_p = \text{cost}$  si ha anche, ovviamente

$$\eta_T = \frac{T_2 - T_1}{T_{2i} - T_1} \quad (4.3)$$

Il rendimento isoentropico può assumere valori compresi tra 0 ed 1; per una turbina ben costruita oscilla tra 0.8 e 0.9.

### ESEMPIO 4.1 - Espansione adiabatica di un gas ideale

In una turbina a regime adiabatica, una portata  $G = 0.2$  kg/s di azoto si espande in maniera adiabatica da  $p_1 = 20$  bar,  $T_1 = 700$  °C a  $p_2 = 1$  bar,  $T_2 = 200$  °C. Valutare la potenza all'asse della turbina e la variazione di entropia nelle tre ipotesi seguenti:

- a) considerando il fluido un gas ideale con  $R = 297$  J/kg K,  $c_p = \text{costante} = 1039$  J/kg K;

- b) considerando il fluido un gas ideale con  $c_p$  dipendente dalla temperatura secondo la relazione (con le temperature espresse in K):

$$\frac{c_p}{R} = \alpha + \beta T + \gamma T^2 + \delta T^3 + \varepsilon T^4,$$

dove

$$\alpha = 3.675, \beta = -1.208 \cdot 10^{-3}, \gamma = 2.324 \cdot 10^{-6}, \delta = -0.632 \cdot 10^{-9}, \varepsilon = -0.226 \cdot 10^{-12}$$

- c) ricavando i dati dalle tabelle termodinamiche del fluido

La potenza all'asse della turbina (considerata adiabatica) è data comunque dalla relazione

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

in tutti i casi, bisogna inoltre verificare che la variazione di entropia tra ingresso ed uscita sia positiva o nulla (in caso contrario la trasformazione è impossibile, o la turbina non può essere considerata adiabatica)

*Caso a - calore specifico costante*

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = c_p (T_1 - T_2) = 1039 (700 - 200) = 520 \text{ kJ/kg} \\ s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -1039 \ln(2.06) + 297 \ln(20) \\ \quad = 140 \text{ J/kg K} \end{cases}$$

*Caso b - calore specifico dipendente dalla temperatura*

In questo caso le relazioni sono

$$h_1 - h_2 = \int_2^1 c_p(T) dT =$$

$$R \left[ \alpha (T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_2^2) + \frac{\gamma}{3} (T_1^3 - T_2^3) + \frac{\delta}{4} (T_1^4 - T_2^4) + \frac{\varepsilon}{5} (T_1^5 - T_2^5) \right]$$

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p(T) \frac{dT}{T} - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) =$$

$$R \left[ \alpha \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \beta (T_2 - T_1) + \frac{\gamma}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \frac{\delta}{3} (T_2^3 - T_1^3) + \frac{\varepsilon}{4} (T_2^4 - T_1^4) - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \right]$$

*Caso c - tabelle termodinamiche*

In questo caso, basta consultare le tabelle che forniscono i seguenti dati

$T, ^\circ\text{C}$	$p, \text{bar}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$
700	20	1045	7.2236
200	1	492	7.3216

La tabella seguente riassume i risultati per i tre casi considerati

caso	$h_1-h_2$ , kJ/kg	$s_2-s_1$ , J/kg K	$W'_m$ , kW
a	520	140	104
b	552	98	110
c	553	98	111

Come si vede, la previsione fatta nel caso b è molto vicina a quella delle tabelle, ma anche il modello con calore specifico costante (caso a) fornisce un risultato sufficientemente accurato, almeno per quanto riguarda la potenza erogata.

□

**ESEMPIO 4.2 - Espansione adiabatica di un vapore surriscaldato**

Una turbina a vapore che si può considerare adiabatica opera in regime stazionario nelle seguenti condizioni

- portata di fluido  $G = 4.6$  t/h;
- condizioni in ingresso:  $p_1 = 60$  bar,  $T_1 = 600$  °C;
- condizioni in uscita:  $p_2 = 0.1$  bar,  $x_2 = 0.9$ .

Calcolare la potenza erogata ed il rendimento isoentropico della turbina.

📄 *La soluzione è riportata nel file C4TURBVAP.XLS*

La potenza erogata è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

la portata deve essere espressa in unità SI

$$G = 4.6 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 4.6 \frac{10^3 \text{ kg}}{3600 \text{ s}} = 1.28 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Per valutare il rendimento isoentropico, bisogna valutare le condizioni di uscita nelle condizioni ideali 2i (ovvero quelle corrispondenti ad una espansione adiabatica reversibile), tenendo conto che in tale trasformazione  $s_{2i} = s_1$ . Tramite le tabelle termodinamiche dell'acqua o un codice di calcolo si ricavano i valori contenuti nella seguente tabella (dove le caselle ombreggiate indicano i valori usati come input)

punto	$T$ , °C	$p$ , bar	$h$ , kJ/kg	$s$ , kJ/kg K	$x$
1	600	60	3658	7.1676	=
2	45.8	0.1	2345	7.40	0.9
2i	45.8	0.1	2271	7.1676	0.87

da cui si ha

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = 1.28 \cdot (3658 - 2345) = 1.68 \text{ MW}$$

$$\eta_T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} = \frac{3658 - 2345}{3658 - 2271} = 0.95$$

Nel caso si disponga solo di una tabella del vapore saturo, per valutare l'entalpia nel punto 2i si deve procedere come segue:

- ottenere dalle tabelle i valori dell'entalpia e dell'entropia del liquido saturo ( $x=0, p = 0.1$  bar,  $h_f = 191.8$  kJ/kg,  $s_f = 0.649$  kJ/kg K) e del vapore saturo secco ( $x=1, p = 0.1$  bar,  $h_g = 2584.6$  kJ/kg,  $s_g = 8.15$  kJ/kg K);
- calcolare il valore del titolo nel punto 2i tramite il valore noto dell'entropia ( $s_{2i} = s_1 = 7.1676$  kJ/kg K)  

$$x = \frac{s_{2i} - s_f}{s_g - s_f} = \frac{7.168 - 0.649}{8.150 - 0.649} = 0.87$$
- calcolare l'entalpia del vapore saturo nel punto 2i  

$$h_{2i} = h_f + x(h_g - h_f) = 191.8 + 0.87 \cdot (2584 - 191.8) = 2274$$
 kJ/kg

che come si vede, a meno delle inevitabili imprecisioni di calcolo, coincide con quanto ottenuto con il calcolatore.



**ESEMPIO 4.3 - Espansione adiabatica irreversibile di un vapore surriscaldato**

In una turbina a regime adiabatica, una portata  $G = 0.5$  kg/s di vapore acqueo si espande in maniera adiabatica irreversibile da  $p_1 = 40$  bar,  $T_1 = 350$  °C a  $p_2 = 0.03$  bar. Il rendimento isoentropico di espansione vale  $\eta_t = 0.87$ . Valutare il titolo in uscita e la potenza all'asse della turbina.

Anche in questo caso, come nell'Esempio 1, la potenza erogata dalla turbina è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

Il fluido non può essere considerato un gas ideale e bisogna ricorrere alle tabelle termodinamiche. Lo stato finale è caratterizzato dal solo valore della pressione e non è pertanto determinato: tuttavia si dispone dell'espressione del rendimento isoentropico di espansione. In questo caso si determina prima l'entalpia in uscita per una turbina *ideale* (reversibile), per la quale lo stato finale è caratterizzato dal valore di entropia  $s_{2i} = s_1$ . Si fa quindi uso dell'espressione del rendimento isoentropico per calcolare il valore dell'entalpia *reale* in uscita,  $h_2$

$$\eta_T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} \Rightarrow h_2 = h_1 - \eta_T (h_1 - h_{2i}) = 3091.5 - 0.87(3091.5 - 1951.3) = 2099.5$$
 kJ/kg

Lo stato finale *reale* risulta pertanto determinato dai valori della pressione  $p_2$  e dell'entalpia  $h_2$  ed a partire da essi è possibile calcolare i valori di tutte le altre variabili di stato, compreso il titolo  $x_2 = 0.82$ . I risultati sono riassunti nella seguente tabella (dove le caselle ombreggiate indicano i valori usati come input).

punto	$T, ^\circ\text{C}$	$p, \text{bar}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	$x$
1	350	40	3091.5	6.579	=
2i	24.1	0.03	1951.3	6.579	0.76
2	24.1	0.03	2099.5	7.078	0.82

La potenza erogata dalla turbina vale infine

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = 0.5(3091.5 - 2099.5) = 496$$
 kW

Quest'ultimo risultato, come è ovvio, poteva anche essere ottenuto direttamente moltiplicando il valore della potenza *ideale* per il rendimento isoentropico:  $W'_m = \eta_T G (h_1 - h_{2i})$



**ESEMPIO 4.4 - Espansione adiabatica reversibile di un gas ideale con calore specifico costante**

In una turbina a regime adiabatica, una portata  $G = 0.3$  kg/s di azoto (che si può considerare un gas ideale con calore specifico costante) si espande in maniera adiabatica reversibile da  $p_1 = 10$  bar,  $T_1 = 300$  °C a  $p_2 = 1$  bar. Valutare la potenza all'asse della turbina. Ripetere i calcoli per nel caso che la turbina abbia un rendimento isoentropico di espansione  $\eta_t = 0.8$ .

Anche in questo caso, come nell'Esempio 1, la potenza erogata dalla turbina è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2)$$

che per le proprietà del fluido (gas ideale con  $c_p$  costante) è esprimibile anche come

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = G c_p (T_1 - T_2)$$

per completare il calcolo ci manca il valore di  $T_2$ , che però è ricavabile considerando che la trasformazione è adiabatica reversibile e quindi isoentropica:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$$

$$c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^R$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_p}} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 573.15 \left(\frac{1}{10}\right)^{0.286} = 296.7 \text{ K}$$

Notare che è stato necessario convertire le temperature in K, dato che esse compaiono all'interno di rapporti. Si può quindi calcolare facilmente la potenza erogata dalla turbina

$$W'_{m,id} = G c_p (T_1 - T_2) = 0.3 \cdot 1040 \cdot (573.15 - 296.7) = 86.3 \text{ kW}$$

Si noti anche che la legge della trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale con calore specifico costante appena ottenuta

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T p^{\frac{1-k}{k}} = \text{cost}$$

è riconducibile alla più nota  $p v^k = \text{cost}$  per mezzo della equazione di stato dei gas. La verifica è lasciata per esercizio al lettore.

Nel caso che la espansione sia irreversibile la potenza è data semplicemente da

$$W'_{m,r} = W'_{m,id} \eta_t = 86.3 \cdot 0.8 = 69 \text{ kW}$$

e la temperatura di uscita è ricavabile da

$$W'_{m,r} = G c_p (T_1 - T_{2r})$$

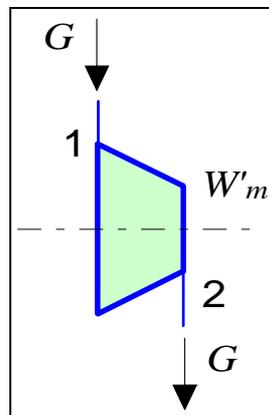
$$T_{2r} = T_1 - \frac{W'_{m,r}}{G c_p} = 300 - \frac{69000}{0.3 \cdot 1040} = 78.8^\circ\text{C} = 352 \text{ K}$$

ed è superiore al valore ideale precedentemente calcolato.

□

### POMPE E COMPRESSORI

Questi dispositivi assorbono lavoro per innalzare la pressione di un fluido: si parla in genere di *pompe* se il fluido è un liquido e di *compressori* se il fluido è un aeriforme. Per problemi tecnici, connessi al danneggiamento degli organi meccanici, si evita in genere di comprimere un vapore allo stato saturo. Il compressore si indica in generale come in Fig.3.



**Figura 3.** Schematizzazione di un compressore.

Anche in questo caso, le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili per cui le equazioni di bilancio si riducono a

$$\begin{cases} G (h_2 - h_1) = W_t - W'_m \\ G (s_2 - s_1) = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.4)$$

In generale, quindi, la potenza meccanica assorbita da un compressore è data da

$$W'_m = G (h_1 - h_2) + W_t = G (h_1 - h_2) - T_{ms} [G (s_1 - s_2) + \dot{S}_{irr}] \quad (4.5)$$

dove  $T_{ms}$  è un'opportuna temperatura media di scambio data da

$$T_{ms} = \frac{\sum_k W_{tk}}{\sum_k \frac{W_{tk}}{T_k}} = \frac{W_t}{\sum_k \frac{W_{tk}}{T_k}} \quad (4.6)$$

Si vede pertanto che nel caso generale la valutazione della potenza scambiata in caso di compressione non adiabatica è abbastanza complessa. Fortunatamente molto spesso lo scambio termico con l'esterno è trascurabile, sebbene non si ottenga vantaggio da questo

(anzi, il lavoro necessario in genere aumenta) ed il compressore si può considerare adiabatico. In tal caso, le equazioni di bilancio assumono forma identica a quelle date per le turbine, Eqq.(4.1).

Esistono numerosissime tipologie tecniche, basate su principi diversi, per pompe e compressori. Per il momento è sufficiente ricordare che esistono macchine di tipo *alternativo* (a pistone) che funzionano a regime periodico, e compressori *assiali* o *centrifughi*, che sono dotati di palette rotanti come le turbine e lavorano a regime stazionario. Non sempre, per motivi di carattere tecnico, è possibile realizzare l'intero processo nello stesso organo: la compressione viene allora frazionata in più macchine collegate in serie, e si parla in tal caso di pompe o compressori *multistadio*.

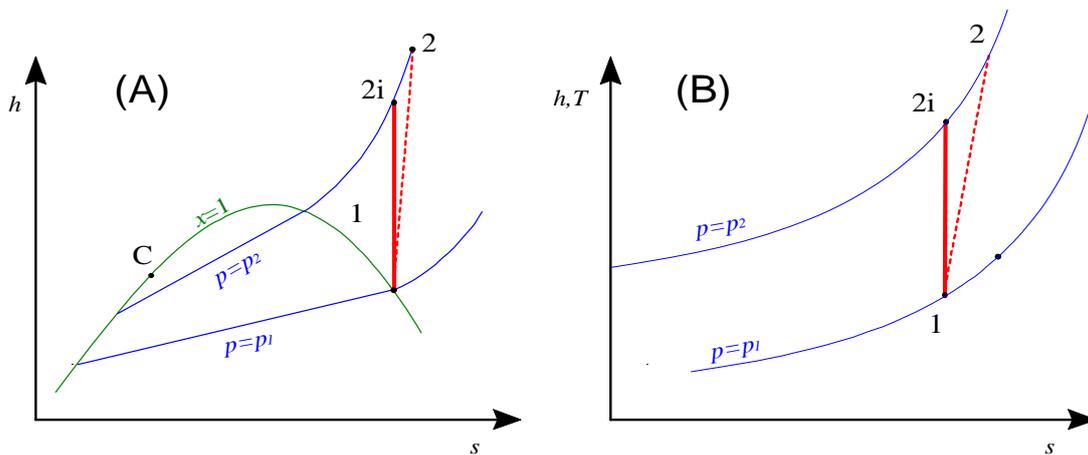
#### Rendimento isoentropico ed isoterma del compressore

Come per le turbine, anche nel caso dei compressori l'attrito e gli urti con le parti in movimento fanno sì che la trasformazione sia in genere irreversibile. Anche in questo caso, ipotizzando che la trasformazione sia adiabatica, il punto finale della trasformazione cade quindi alla destra di quello iniziale sul diagramma  $h-s$  (Fig.4): quindi, a parità di pressione finale e portata, il salto entalpico, e la potenza richiesta aumentano rispetto al caso ideale. Anche in questo caso si può definire un rendimento isoentropico di compressione come

$$\eta_c = \frac{W'_{m,id}}{W'_m} = \frac{h_{2i} - h_1}{h_2 - h_1} \quad (4.7)$$

che, nel caso che il fluido sia gas ideale con  $c_p = cost$ , può anche essere espresso come:

$$\eta_c = \frac{T_{2i} - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.8)$$



**Figura 4.** Compressione reale ed ideale nel diagramma  $h-s$ : (A) fluido reale (vapore saturo secco), (B) gas ideale

Il rendimento isoentropico di compressione assume valori compresi tra 0 ed 1 ed oscilla indicativamente tra 0.7 e 0.85 per macchine ben realizzate.

Notare che il numeratore ed il denominatore sono invertiti rispetto al rendimento isoentropico di espansione per ottenere anche in questo caso un numero minore di 1.

**ESEMPIO 4.5 - Compressione di un gas ideale**

Un compressore operante in regime stazionario, che si può considerare adiabatico, comprime una portata volumetrica in ingresso  $G_v = 20 \text{ m}^3/\text{h}$  di aria (gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$  = costante e  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ) alle seguenti condizioni:

- Ingresso:  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 290 \text{ K}$
- Uscita:  $p_2 = 7 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 560 \text{ K}$

Calcolare la potenza necessaria, verificare che la trasformazione è irreversibile e valutare il rendimento isoentropico del compressore.

Calcolare inoltre la potenza necessaria in una trasformazione adiabatica reversibile ed in una trasformazione isoterma reversibile a partire dalle stesse condizioni di ingresso fino alla stessa pressione di uscita.

 La soluzione è riportata nel file **C4COMPID.XLS**

Bisogna innanzitutto valutare la portata in massa nel compressore

$$G = \rho_1 G_v$$

$$\rho_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1 \cdot 10^5}{287 \cdot 290} = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$G_v = 20 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}^3}{3600 \text{ s}} = 0.556 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$G = 1.2 \cdot 0.556 \cdot 10^{-2} = 0.007 \text{ kg/s}$$

Essendo il compressore adiabatico, le equazioni di bilancio di energia ed entropia si riducono (indipendentemente dal fluido considerato e dal tipo di trasformazione) alla forma

$$\begin{cases} G(h_2 - h_1) = -W'_m \\ G(s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} \geq 0 \end{cases}$$

Per un gas ideale con calore specifico costante si ha

$$\begin{cases} h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 1005(560 - 290) = 271 \text{ kJ/kg} \\ s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 1005 \ln(1.93) - 287 \ln(7) = 103 \text{ J/kg K} \end{cases}$$

da cui infine

$$\begin{cases} W'_m = -G(h_2 - h_1) = -0.007 \cdot 271 = -1.9 \text{ kW} \\ \dot{S}_{irr} = G(s_2 - s_1) = 0.72 \text{ W/K} > 0 \end{cases}$$

Il segno negativo nel primo risultato indica che la potenza è assorbita dal sistema. La seconda equazione ci dice che la trasformazione è effettivamente irreversibile. Per calcolare il rendimento isoentropico, valutiamo la temperatura di uscita in una trasformazione ideale (adiabatica reversibile: vedi Esempio 4)

$$T_{2i} = T_1 r_p^{R/c_p} = 290 \cdot 7^{0.286} = 506 \text{ K}$$

da cui si ottiene il rendimento isoentropico del compressore

$$\eta_c = \frac{T_{2i} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{506 - 290}{560 - 290} = 0.8$$

La potenza necessaria per una compressione adiabatica e reversibile è ricavabile semplicemente da

$$W'_{m,id} = W'_m \eta_c = -1.9 \cdot 0.8 = -1.52 \text{ kW}$$

Mentre per la compressione isoterma reversibile bisogna riscrivere le equazioni di bilancio

$$\begin{cases} G(h_2 - h_1) = W_t - W'_m \\ G(s_2 - s_1) = \frac{W_t}{T_1} \end{cases}$$

Che nel caso di gas ideale divengono (notare che il salto entalpico è nullo in una trasformazione isoterma di un gas ideale)

$$\begin{cases} G c_p (T_2 - T_1) = 0 = W_t - W'_m \\ G \left( c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \right) = -G R \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{W_t}{T_1} \end{cases}$$

dalla seconda equazione si può ricavare la potenza termica scambiata (essendo essa negativa è necessario raffreddare il compressore durante il processo).

$$W_t = -G R T_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -0.007 \cdot 287 \ln(7) = -1.13 \text{ kW}$$

Ed infine dalla prima equazione

$$W'_m = W_t = -1.13 \text{ kW}$$

da cui si vede che una compressione isoterma necessita di meno potenza di una adiabatica



L'esempio precedente dimostra che la compressione più vantaggiosa dal punto di vista energetico è quella isoterma, che tuttavia è difficile da realizzare tecnicamente in quanto comporta una cessione di calore ben precisa all'esterno. Questa comunque è un'ottima ragione per non isolare mai termicamente i compressori, a meno che il fluido al suo interno non si trovi a temperatura inferiore a quella ambiente: in tal modo, pur non arrivando ad una trasformazione isoterma, si riduce comunque il lavoro di compressione. Per valutare le prestazioni del compressore non isolato termicamente, si può quindi far riferimento anche al rendimento isoterma, definito come

$$\eta_{c,T} = \frac{W'_{m,isot}}{W'_m} = \frac{(h_1 - h_{2T}) - T_1 (s_1 - s_{2T})}{W'_m} \quad (4.9)$$

che confronta il lavoro di compressione con quello minore possibile per un compressore non adiabatico, ovvero quello dell'isoterma. L'indice  $2T$  si riferisce alle condizioni di uscita di una compressione isoterma reversibile che porta il fluido alla stessa pressione. Come abbiamo visto, nel caso generale, la valutazione teorica del termine a denominatore non è semplice (v. Eqq. 4-5), quindi questa definizione è utile soprattutto quando viene eseguita una misura in campo delle prestazioni.

Infatti, se il compressore non è adiabatico, esso può assorbire una potenza inferiore a quella della adiabatica reversibile, per cui il rendimento isoentropico potrebbe risultare per assurdo maggiore di uno.

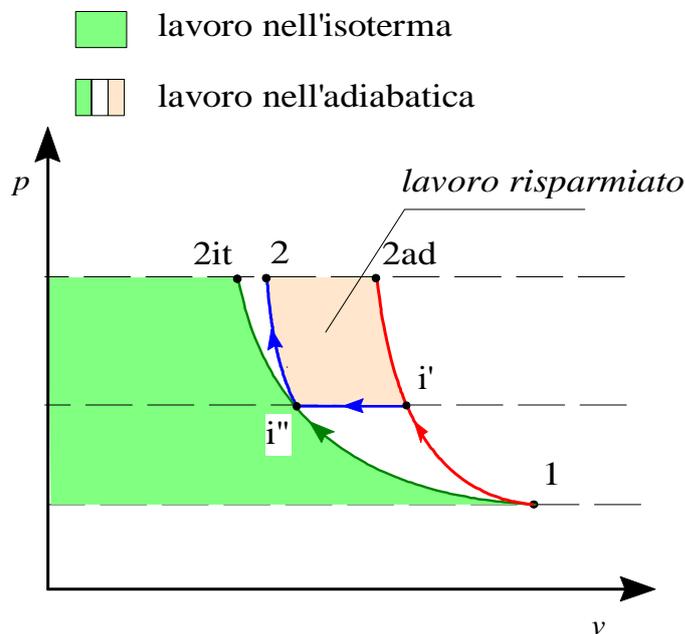
Si potrebbe anche definire un *rendimento politropico* del compressore, che confronta il lavoro di compressione con quello di una trasformazione *politropica reversibile* che porta il fluido nello *stesso stato finale* a cui effettivamente esce dal compressore stesso: tale rendimento è

di facile valutazione solo nel caso di gas ideali e, a giudizio di chi scrive, non è particolarmente significativo. Il lettore interessato è rimandato al cap.2 del testo di Della Volpe.

### Compressione multistadio

Abbiamo già accennato che è tecnicamente difficile realizzare compressori monostadio per elevati rapporti di compressione. Si può vedere inoltre facilmente sul diagramma  $p-v$  (vedi Fig.5) che è vantaggioso refrigerare il fluido tra uno stadio e l'altro di compressione (la refrigerazione si può considerare isobara): in questo modo si ottiene infatti una riduzione del volume specifico del fluido stesso e quindi un risparmio nel lavoro specifico dello stadio di compressione successivo. L'insieme della macchina può essere schematizzato come in Fig.6.

Il refrigeratore intermedio è detto in inglese *intercooler*.



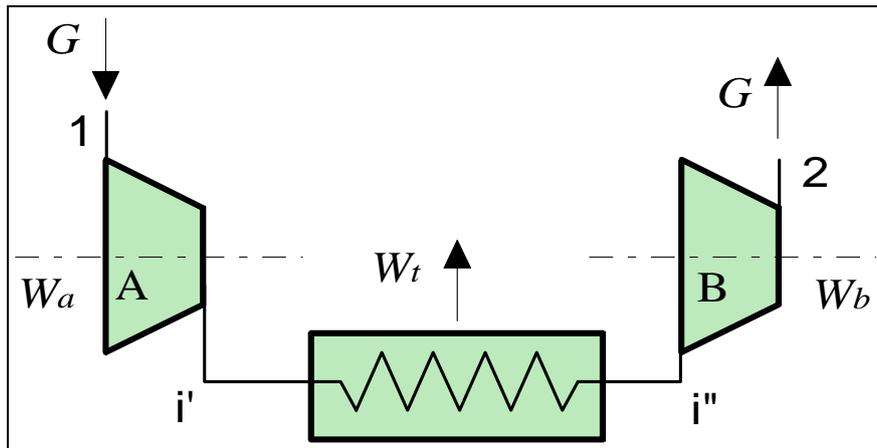
**Figura 5.** Lavoro di compressione reversibile in un compressore a regime sul diagramma  $p-v$ .

Nasce quindi il problema di quale sia la suddivisione ottimale del rapporto di compressione tra i vari stadi della macchina. Limitiamoci a considerare il caso semplice di una compressione isoentropica a due stadi di un gas ideale con  $c_p$  costante, in cui l'intercooler riporti il gas alla temperatura iniziale. Il lavoro di compressione è dato semplicemente dalla somma di quelli relativi ai due stadi, ovvero, dato che  $T_{i''} = T_I$

$$|l'_{12}| = \frac{|W'_m|}{G} = c_p(T_{i'} - T_1) + c_p(T_2 - T_1) = c_p T_1 (r_{pA}^a - 1) + c_p T_1 (r_{pB}^a - 1) \quad (4.10)$$

dove

$$a = \frac{R}{c_p}; \quad r_{pA} r_{pB} = \frac{p_i p_2}{p_1 p_i} = \frac{p_2}{p_1} \quad (4.11)$$



**Figura 6.** Schema di un compressore bistadio con refrigeratore intermedio.

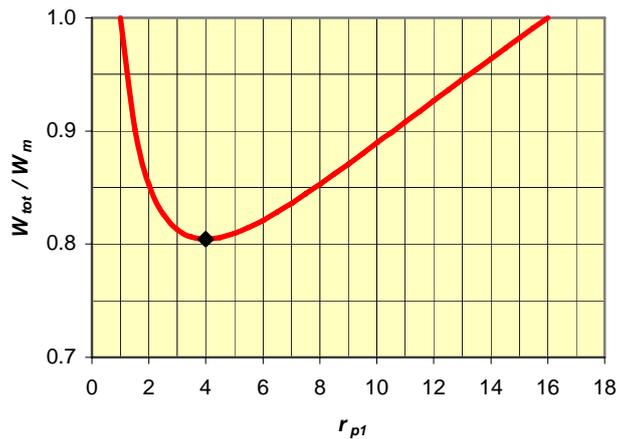
Esprimendo quindi  $r_{pB}$  in funzione di  $r_{pA}$  e derivando l'espressione del lavoro rispetto a  $r_{pA}$ , si può dimostrare che essa ha un minimo per

$$r_{pA} = r_{pB} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \quad (4.12)$$

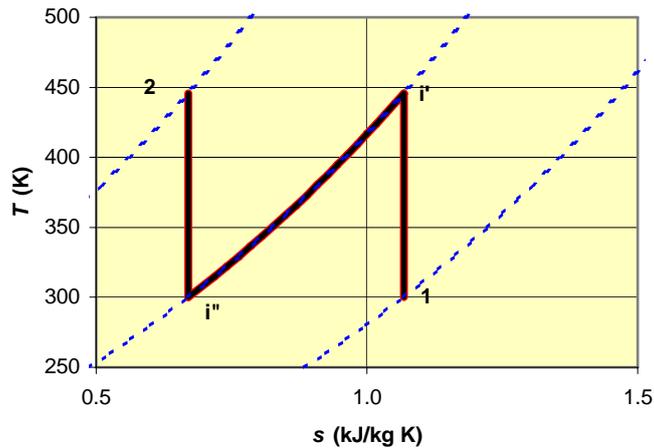
il che implica

$$p_i = \sqrt{p_2 p_1} \quad (4.13)$$

Questo risulta evidente anche dal grafico di Fig.7, in cui si riporta il rapporto tra il valore del lavoro necessario rispetto a quello della compressione monostadio in funzione del rapporto di compressione del primo stadio, per un rapporto di compressione totale pari a 16. Si vede che il lavoro ha un minimo per  $r_{p1} = \sqrt{16} = 4$ .



**Figura 7.** Compressione multistadio: rapporto tra la potenza di compressione effettiva e quella del compressore monostadio in funzione del rapporto di compressione del primo stadio (rapporto di compressione totale = 16).



**Figura 8.** Compressione adiabatica reversibile multistadio con refrigerazione intermedia: rappresentazione sul diagramma  $T$ - $s$ . Fluido: aria con  $c_p = \text{cost}$ , rapporto di compressione totale 16:1. Le linee tratteggiate rappresentano le isobare.

Il processo è rappresentato sul diagramma  $T$ - $s$  in Fig.8. E' facile verificare che, dato che i due stadi hanno lo stesso rapporto di compressione,  $T_{i'} = T_2$ .

Generalizzando, si potrebbe vedere che (nelle stesse ipotesi di cui al punto precedente) anche nel caso di una compressione multipla ad  $N$  stadi il rapporto di compressione ottimale è uguale per tutti gli stadi e dato da

$$r_{p1} = r_{p2} = \dots = r_{pN} = \sqrt[N]{\frac{p_2}{p_1}} \quad (4.14)$$

il lavoro di compressione assume pertanto la forma

$$l'_{12} = N c_p T_1 \left[ 1 - \left( r_{pTOT} \right)^{\frac{a}{N}} \right] \quad (4.15)$$

$$a = \frac{R}{c_p} ; r_{pTOT} = \frac{p_2}{p_1}$$

Sul diagramma  $T$ - $s$  ci si può facilmente rendere conto che per  $n \rightarrow \infty$  il processo tende a diventare *isotermo*.

L'intercooler è un elemento aggiuntivo della macchina costoso, pesante ed ingombrante, per cui in alcuni casi la sua adozione è antieconomica od addirittura impossibile (es. motori aeronautici): quindi, non sempre viene effettivamente adottato, specie nei turbocompressori. Trova maggiori applicazioni nel caso dei compressori alternativi (a pistoni), nei compressori ad alto rapporto di compressione (da cui il fluido uscirebbe a temperature troppo elevate) e soprattutto nei motori a scoppio turbocompressi, per refrigerare il fluido prima della introduzione nei cilindri (aumentandone così la densità e quindi la massa caricata a parità di cilindrata). Tuttavia, si intuisce che comunque, salvo casi molto particolari, non ha senso coibentare i condotti di trasferimento da uno stadio di compressione all'altro, e, più in generale, i compressori stessi: anzi, talvolta si cerca di favorire lo smaltimento di calore allestendone le superfici esterne.

**ESEMPIO 4.6 - Compressione multistadio dell'aria**

Si deve comprimere una portata  $G = 0.1$  kg/s di aria (da considerare come un gas ideale con  $c_p$  costante con  $R = 287$  J/kg K,  $k = 1.4$ ) da  $p_1 = 1$  bar,  $T_1 = 293$  K a  $p_2 = 100$  bar. Considerare la compressione reversibile e determinare la potenza di compressione necessaria nel caso di trasformazione adiabatica e trasformazione isoterma. Determinare inoltre la potenza necessaria nel caso di compressione multistadio con  $N$  stadi ad uguale rapporto di compressione e refrigerazioni intermedie fino alla temperatura iniziale per  $N = 2, 4, 8, 16, 32$ .

☞ La soluzione è riportata nel file **C4COMPMULT.XLS**

*Compressione adiabatica*

Il lavoro per unità di massa è dato da

$$l'_{12AD} = -(h_2 - h_1) = -c_p (T_2 - T_1) = -c_p T_1 (r_p^a - 1)$$

dove

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = \frac{287 \cdot 1.4}{0.4} = 1005 \text{ J/kg K} \quad ; a = \frac{R}{c_p} = 0.286$$

per cui

$$l'_{12AD} = -1005 \cdot 293 \cdot (100^{0.286} - 1) = -805 \text{ kJ/kg}$$

la potenza è quindi data da

$$W'_{AD} = Gl'_{12AD} = -80.5 \text{ kW}$$

*Compressione isoterma*

In questo caso si ha

$$l'_{12IT} = -RT_1 \ln r_p = -388 \text{ kJ/kg}$$

e conseguentemente

$$W'_{IT} = Gl'_{12IT} = -38.8 \text{ kW}$$

*Compressione multistadio*

Il lavoro di compressione, detto  $N$  il numero degli stadi, è dato da

$$l'_{12MS} = -Nc_p T_1 \left[ (r_{pTOT})^{\frac{a}{N}} - 1 \right]$$

la tabella seguente riassume i risultati per le varie compressioni studiate

Compressione	$T_{\max} = T_1 r_p^{a/N}$ [K]	$ W $ [kW]
adiabatica revers.	1092	80.5
2 stadi	565	54.9
4 stadi	407	46.0
8 stadi	345	42.2
16 stadi	318	40.4
32 stadi	305	39.6
isoterma	293	38.8

come si vede, al crescere del numero di stadi la potenza di compressione tende al valore di quella isoterma. In pratica, tuttavia, la suddivisione in un numero eccessivo di stadi è antieconomica. ☐

Trasformazione	Fluido reale	Gas ideale a $c_p = \text{cost}$
Adiabatica reversibile (isoentropica)	$W'_m = G (h_1 - h_{2i})$ $s_1 = s_{2i}$	$W'_m = G c_p (T_1 - T_{2i})$ $T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p}$
Adiabatica irreversibile	$W'_m = G (h_1 - h_2) = \frac{G (h_1 - h_{2i})}{\eta_c}$	$W'_m = G c_p (T_1 - T_2) = \frac{G c_p (T_1 - T_{2i})}{\eta_c}$
Isoterma reversibile	$W'_m = G (h_1 - h_2) - T G (s_1 - s_2)$	$W'_m = G R T \ln \frac{p_1}{p_2}$
Politropica reversibile	$W'_m = G (h_1 - h_2) - T_{ms} G (s_1 - s_2)$	$p v^n = \text{cost} \quad 1 < n \leq k$ $W'_m = G \frac{R n}{n-1} T_1 \left( 1 - r_p^{\frac{n-1}{n}} \right)$

**Tabella 1.** Riepilogo delle varie espressioni per il calcolo della potenza di compressione.

## CALDAIE E GENERATORI DI VAPORE

Un generatore di vapore (o caldaia) è un organo in cui un fluido subisce un innalzamento di temperatura e talvolta anche un cambiamento di stato. La superficie delle caldaie non presenta parti mobili, per cui il lavoro scambiato con l'esterno è comunque nullo. Le cadute di pressione tra ingresso ed uscita sono dovute soltanto all'attrito, e possono quindi molto spesso essere considerate trascurabili: la trasformazione è pertanto *isobara*.

I bilanci energetico ed entropico assumono la forma

$$\begin{cases} G (h_2 - h_1) = W_t \\ G (s_2 - s_1) = \sum_k \frac{W_{tk}}{T_k} + \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.16)$$

### ESEMPIO 4.7 - Generatore di vapore

Un generatore di vapore lavora a regime nelle seguenti condizioni:

- portata di acqua  $G = 1.5 \text{ kg/s}$
- pressione  $p = 2 \text{ Mpa}$  (si può considerare costante nel generatore, trascurando gli attriti)
- temperatura in ingresso  $T_1 = 30 \text{ °C}$
- temperatura di uscita  $T_2 = 400 \text{ °C}$

Determinare la potenza termica totale fornita al vapore  $W_t$ , e quella fornita nel fascio bollitore (ovvero la potenza termica necessaria a portare il fluido dallo stato di liquido saturo,  $x=0$ , a quello di vapore saturo,  $x=1$ ).

Il bilancio di energia in questo caso è dato da

$$G (h_2 - h_1) = W_t$$

dalle tabelle del vapore si ricava  $h_1 = 127 \text{ kJ/kg}$  (liquido sottoraffreddato),  $h_2 = 3247 \text{ kJ/kg}$  (vapore surriscaldato) da cui

$$W_t = 4.68 \text{ MW}$$

Per determinare la potenza scambiata nel fascio bollitore consideriamo il sottosistema (incluso nel precedente) in cui il liquido entra in saturazione ( $x=0$ ) e da cui esce vapore saturo secco ( $x=1$ ). Dette  $h_f$  e  $h_g$  le rispettive entalpie, si ha

$$W_{tB} = G (h_g - h_f) = Gh_{fg}$$

le tabelle forniscono ,per  $p = 2 \text{ MPa}$ ,  $r = 1894 \text{ kJ/kg}$ , per cui

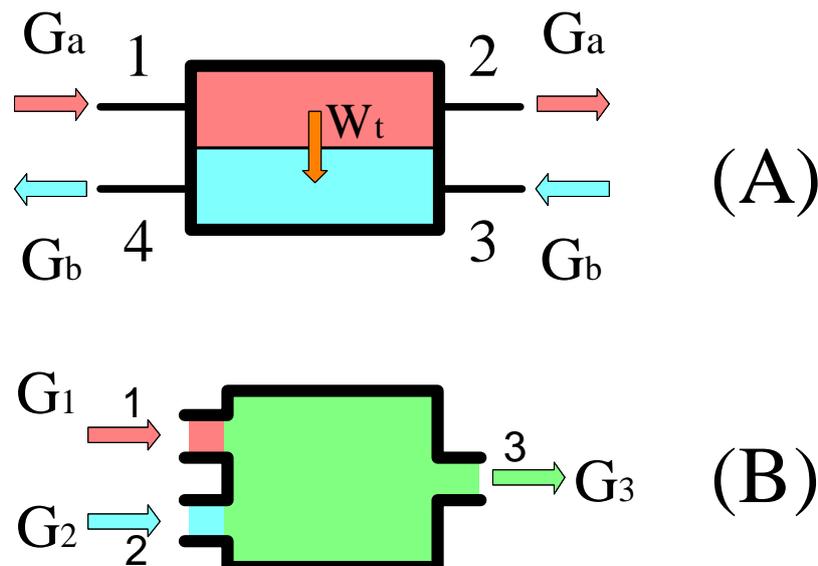
$$W_{tB} = 2.84 \text{ MW}$$

□

## SCAMBIATORI DI CALORE

Gli scambiatori di calore sono dispositivi in cui si utilizza un fluido caldo per scaldarne un altro (non necessariamente di diversa natura) più freddo. Gli scambiatori di calore possono distinguersi in:

- scambiatori di calore *a superficie*, (Fig. 9-a) in cui i due fluidi, che possono essere di diversa natura, sono separati da una superficie impermeabile alla massa e non si mescolano;
- scambiatori *a miscelamento*, (Fig. 9-b) in cui i due fluidi hanno in genere la stessa natura e si mescolano tra loro.



**Figura 9.** Schemi di scambiatori di calore a superficie (A) ed a miscelamento (B).

La superficie esterna degli scambiatori è in generale isolata per cui il sistema si può considerare *adiabatico*; inoltre, dato che la superficie non presenta parti mobili, il lavoro scambiato con l'esterno è comunque nullo. Dato che anche i termini di energia cinetica e potenziale sono trascurabili, i bilanci di massa, energia e di entropia si riducono a:

$$\begin{cases} \sum_i G_i - \sum_u G_u = 0 \\ \sum_i G_i h_i - \sum_u G_u h_u = 0 \\ \sum_u G_u s_u - \sum_i G_i s_i = \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.17)$$

A prima vista può sembrare contraddittorio definire adiabatico uno scambiatore di calore. Ma ci si rende subito conto (vedi Fig.9) che lo scambio di calore  $W_t$  avviene tra i due fluidi *internamente* al sistema (e non fra sistema ed esterno) e pertanto non deve essere considerato nel bilancio energetico.

Per gli scambiatori a miscelamento con due ingressi ed una uscita, la prima delle Eq.(4.17) diviene

$$G_3 h_3 - G_2 h_2 - G_1 h_1 = 0 \quad (4.18)$$

che va associata al bilancio di massa

$$G_3 = G_2 + G_1 \quad (4.19)$$

#### **ESEMPIO 4.8 - Scambiatore a miscelamento**

Un preriscaldatore di acqua di alimento di una centrale termoelettrica lavora a regime nelle seguenti condizioni:

- Ingresso 1: liquido sottoraffreddato a  $p_1 = 7$  bar,  $T_1 = 40$  °C;
- Ingresso 2: vapore surriscaldato a  $p_2 = 7$  bar,  $T_2 = 200$  °C;
- Uscita 3: liquido saturo,  $p_3 = 7$  bar,  $x_3 = 0$ .

Determinare il rapporto tra le due portate in ingresso,  $G_1/G_2$ , per ottenere in uscita le condizioni desiderate. Supporre il sistema adiabatico ed il lavoro meccanico nullo.

I bilanci di massa e di energia valgono rispettivamente

$$\begin{cases} G_3 = G_2 + G_1 \\ G_3 h_3 = G_2 h_2 + G_1 h_1 \end{cases}$$

da cui con semplici passaggi algebrici

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{h_2 - h_3}{h_3 - h_1}$$

dalle tabelle del vapore si ricava  $h_1 = 168.2$  kJ/kg,  $h_2 = 2844.8$  kJ/kg,  $h_3 = 697.2$  kJ/kg, e sostituendo

$$\frac{G_1}{G_2} = 4.06$$

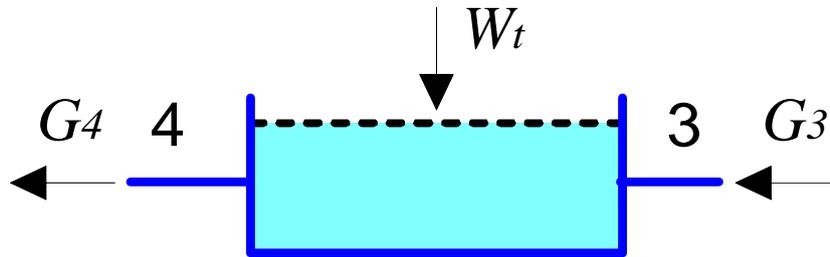
il bilancio entropico, ricavando i valori delle entropie dalle tabelle del vapore, risulta in

$$G_3 s_3 - G_2 s_2 - G_1 s_1 = G_2 \left[ \frac{G_3}{G_2} s_3 - s_2 - \frac{G_1}{G_2} s_1 \right] \geq 0$$

$$\frac{\dot{S}_{irr}}{G_2} = \frac{G_3}{G_2} s_3 - s_2 - \frac{G_1}{G_2} s_1 = 5.06 \cdot 1.992 - 6.886 - 4.06 \cdot 0.5722 = 0.87 \text{ kJ/kg K} \geq 0$$

e conferma che la trasformazione di miscelamento è irreversibile.

□



**Figura 10.** Scambiatori a superficie: sistema ausiliario (non adiabatico) costituito da uno soltanto dei due fluidi.

Per uno scambiatore a superficie ci si può aiutare considerando un sottosistema costituito da uno solo dei due fluidi (vedi Fig.10, in cui si considera solo la parte del fluido freddo) per ottenere

$$\begin{cases} G_3 = G_4 = G_b \\ G_b (h_4 - h_3) = W_t \end{cases} \quad (4.20)$$

ed in definitiva, per lo scambiatore nel suo complesso

$$G_a (h_1 - h_2) = G_b (h_4 - h_3) \quad (4.21)$$

#### **ESEMPIO 4.9 - Scambiatore di calore a superficie**

In uno scambiatore a superficie scorrono i seguenti fluidi:

- Lato a: prodotti di combustione (ovvero fumi, approssimabili come un gas ideale con  $c_{pa} = 1100 \text{ J/kg K} = \text{cost}$ ) a  $p = 1 \text{ bar}$ , portata  $G_a = 0.05 \text{ kg/s}$ , temperatura di ingresso  $T_1 = 450 \text{ °C}$ , temperatura di uscita  $T_2 = 200 \text{ °C}$ ;
  - Lato b: acqua a  $p = 2 \text{ bar}$ , portata  $G_b = 0.15 \text{ kg/s}$ , temperatura di ingresso  $T_3 = 45 \text{ °C}$ ;
- Determinare la temperatura di uscita dell'acqua ( $T_4$ ) ed il calore scambiato.

Dal bilancio di energia dello scambiatore a superficie

$$G_a (h_1 - h_2) = G_b (h_4 - h_3)$$

tenuto conto che l'acqua si può considerare un fluido incomprimibile (con  $c = 4187 \text{ J/kg K}$ , costante) ed il fumo un gas ideale, si ha

$$G_a c_a (T_1 - T_2) = G_b c_{pb} (T_4 - T_3)$$

da cui (noto che il calore specifico dell'acqua è  $c_{pb} = 4187 \text{ J/kg K}$ )

$$T_4 = T_3 + \frac{G_a c_{pa} (T_1 - T_2)}{G_b c_{pb}} = \frac{0.05 \cdot 1100 (450 - 200)}{0.15 \cdot 4187} = 67 \text{ °C}$$

per trovare il calore scambiato, si può restringere il bilancio al sistema a regime costituito dal lato b dello scambiatore, che non è adiabatico (scambia calore con il lato a) ma non ha comunque superfici in moto per cui il lavoro meccanico è nullo

$$W_t = G_b c_{pb} (T_4 - T_3) = 0.15 \cdot 4187 (67 - 45) = 13.8 \text{ kW}$$

Il bilancio entropico dell'intero scambiatore risulta in

$$G_a (s_2 - s_1) + G_b (s_4 - s_3) = \dot{S}_{irr} \geq 0$$

$$G_a c_{pa} \ln \frac{T_2}{T_1} + G_b c_{pb} \ln \frac{T_4}{T_3} = 0.05 \cdot 1100 \cdot \ln \frac{473}{723} + 0.15 \cdot 4187 \cdot \ln \frac{340}{318} = 18.67 \text{ W/K} \geq 0$$

e conferma che la trasformazione è irreversibile, a causa dello scambio di calore con differenza di temperatura finita.

□

## IL PROCESSO DI LAMINAZIONE

Si può ottenere una consistente riduzione di pressione in un fluido semplicemente interponendo una restrizione od un ostacolo nel suo percorso lungo una tubazione. La trasformazione che avviene, in cui il fluido perde pressione per attrito, è, ovviamente, *intrinsecamente irreversibile*. In genere, il sistema può essere considerato adiabatico e, dato che non vi sono superfici mobili, il lavoro scambiato con l'esterno è nullo; inoltre, le variazioni di energia potenziale e cinetica possono essere trascurate. I bilanci di energia ed entropia si riducono pertanto a:

$$\begin{cases} G(h_2 - h_1) = 0 \Rightarrow h_2 = h_1 \\ G(s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} > 0 \Rightarrow s_2 > s_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

di conseguenza, la laminazione è un processo *adiabatico, irreversibile, isoentalpico*.

E' facile rendersi conto che per un gas ideale tale processo è anche *isotermo*. Fu proprio mediante misure molto accurate di questo tipo che Joule e Thompson dimostrarono definitivamente che i fluidi reali, in condizioni sufficientemente lontane dal punto critico, tendono a comportarsi come gas ideali.

### ESEMPIO 4.10 - Laminazione del vapore

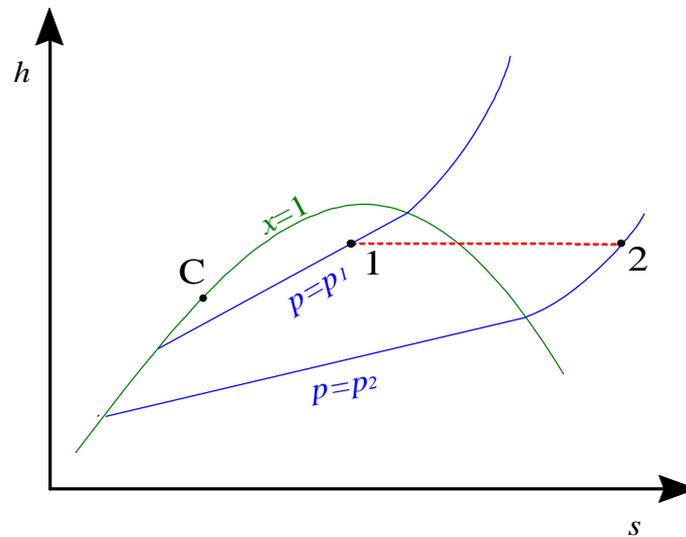
Del vapore saturo viene laminato in una valvola a partire dalle seguenti condizioni iniziali  $p_1 = 20$  bar,  $x_1 = 0.98$  fino alla pressione  $p_2 = 1$  bar. Determinare la temperatura di uscita.

Dato che  $h_2 = h_1$  e  $p_2 = 1$  bar, è determinato lo stato finale del vapore. Tramite le tabelle termodinamiche si ottiene  $h_1 = 2762$  kJ/kg

In uscita si ha quindi vapore surriscaldato a  $T_2 = 142.6$  °C. Si può verificare, come atteso in un processo adiabatico irreversibile, che l'entropia finale è maggiore di quella iniziale. Il processo è rappresentato sul diagramma  $h-s$  in Fig.11. La tabella seguente riassume le proprietà termodinamiche, ottenute tramite il programma CATT. I valori di input sono evidenziati in grigio.

punto	$T, ^\circ\text{C}$	$p, \text{MPa}$	$v, \text{m}^3/\text{kg}$	$u, \text{kJ/kg}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	$x$
1	212.4	2	0.09766	2566	2762	6.263	0.98
2	142.6	0.1	1.901	2572	2762	7.578	

□



**Figura 11.** Laminazione del vapore saturo nel diagramma  $h$ - $s$ .

#### **ESEMPIO 4.11 - Laminazione di R134a**

Il refrigerante R134a entra in una valvola allo stato di liquido saturo alla pressione  $p_1 = 0.7$  Mpa e viene laminato fino alla pressione finale  $p_2 = 0.15$  MPa. Determinare le condizioni in uscita.

La tabella seguente, ottenuta tramite il programma CATT, riassume le condizioni termodinamiche in ingresso ed uscita. Le variabili utilizzate come input sono evidenziate in grigio.

Si è tenuto conto del fatto che il processo di laminazione è isoentalpico, ovvero  $h_2 = h_1$ .

punto	$T, ^\circ\text{C}$	$p, \text{MPa}$	$v, \text{m}^3/\text{kg}$	$u, \text{kJ/kg}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	$x$
1	26.71	0.7	0.0008332	236.4	237	1.128	0
2	-17.13	0.15	0.03764	231.3	237	1.148	0.2827

□

## **UGELLI E DIFFUSORI**

Si dice *ugello* un condotto a pareti rigide di sezione variabile in cui la velocità del fluido aumenta a spese della sua pressione, *diffusore* un condotto a sezione variabile in cui la pressione del fluido cresce a spese della sua velocità. Generalmente, per flussi *subsonici* (ovvero per velocità del fluido inferiori a quella del suono nel fluido stesso) gli ugelli sono condotti *convergenti* ed i diffusori *divergenti*. Nell'Appendice 1 si mostra come le cose siano sostanzialmente diverse in caso di moto *supersonico* del fluido. Questi dispositivi trovano numerose applicazioni, tra cui nei motori a turbogetto, nei razzi e nei veicoli spaziali, e si trovano anche all'interno delle turbine.

Ugelli e diffusori possono essere considerati, almeno in prima approssimazione) adiabatici; essendo la loro superficie rigida, il lavoro utile scambiato è comunque nullo. Anche le variazioni di energia potenziale tra ingresso ed uscita possono essere trascurate (anche nel

caso in cui il dispositivo non sia disposto orizzontalmente, le variazioni di quota tra ingresso ed uscita sono comunque basse), mentre le variazioni di energia cinetica *non sono trascurabili*. Il bilancio di massa ci dice che la portata in ingresso uguaglia quella in uscita. Le equazioni di bilancio di energia ed entropia si riducono dunque a

$$\begin{cases} G (h_2 + e_{c2} - h_1 - e_{c1}) = 0 \Rightarrow h_2 - h_1 = e_{c1} - e_{c2} = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \\ G (s_2 - s_1) = \dot{S}_{irr} \end{cases} \quad (4.23)$$

**ESEMPIO 4.12 – Diffusore di un motore turbogetto**

In un diffusore di un motore turbogetto entra aria (assimilabile ad un gas ideale con calore specifico costante) a  $T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $p_1 = 80 \text{ kPa}$  con una velocità  $w_1 = 200 \text{ m/s}$ . La sezione di uscita è molto più grande di quella di ingresso. Determinare la temperatura di uscita dell'aria e, nell'ipotesi che la trasformazione sia reversibile, la pressione di uscita.

Dato che la sezione di uscita è molto più grande di quella d'ingresso, è lecito trascurare la velocità in uscita, ovvero porre  $w_2 = 0$ . Il bilancio di energia diviene allora

$$h_2 - h_1 = \frac{w_1^2}{2}$$

e nel caso di gas ideale a  $c_p = \text{cost} = 1005 \text{ kJ/kg K}$

$$c_p (T_2 - T_1) = \frac{w_1^2}{2}$$

si ha dunque

$$T_2 = T_1 + \frac{w_1^2}{2 c_p} = 10 + \frac{200^2}{2 \cdot 1005} = 29.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

La pressione può essere determinata considerando che la trasformazione, essendo adiabatica e reversibile, è isoentropica, pertanto, per un gas ideale a  $c_p = \text{cost}$  (vedi anche Esempio 4.4)

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^R$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{c_p}{R}} = 80 \left(\frac{303}{283}\right)^{3.5} = 102 \text{ kPa}$$

L'aria incrementa dunque la sua temperatura e la sua pressione a spese dell'energia cinetica che possiede in ingresso. Il fenomeno viene detto *compressione dinamica* e nei motori a getto viene adottato per eliminare il primo stadio del compressore.

Notare che in un ugello (condotto convergente) sarebbe avvenuto il fenomeno opposto: la velocità sarebbe aumentata a spese di una riduzione di pressione e temperatura. Ci si può rendere conto di questo semplicemente ripetendo l'esercizio invertendo ingresso ed uscita.



Nel caso di trasformazione adiabatica e reversibile si può mostrare (v. App. 1) che la relazione tra area del condotto e velocità del fluido è data dalla equazione di Hugoniot:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} (1 - M^2) \quad (4.24)$$

dove  $M$ , detto numero di Mach, è il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nello stesso. Questa relazione implica alcune importanti conseguenze:

- Nel caso di *moto subsonico* ( $M < 1$ ) le variazioni di area e quelle di velocità sono *discordi*: questo implica che un *ugello* (aumento di velocità del fluido) debba essere *convergente* ed un *diffusore* debba essere *divergente*.
- Nel caso di *moto supersonico* ( $M > 1$ ) vale esattamente il contrario: gli *ugelli* debbono essere *divergenti* ed i *diffusori* *convergenti*.
- La *velocità del suono* ( $M = 1$ ) si può raggiungere solo dove l'area del *condotto* presenta un *massimo* od un *minimo*.

Dalle considerazioni suddette deriva che:

- E' possibile realizzare un condotto che acceleri il fluido a velocità supersoniche (ugello di De Laval), costituito da un convergente seguito da un divergente;
- quando al termine di un convergente si è raggiunta la velocità del suono, la portata nell'ugello non può più aumentare: si dice che l'ugello è *bloccato* (ingl. *choked*) o in *efflusso critico*; questo aspetto è chiarito dagli esempi seguenti.

La ragione di questo ultimo comportamento, apparentemente strano, può essere qualitativamente spiegata come segue. Le "informazioni" sulle variazioni di pressione a valle vengono trasmesse a monte del condotto sotto forma di perturbazioni elastiche, che risalgono il condotto alla velocità del suono. Se in un punto del condotto il fluido si muove alla velocità del suono, le perturbazioni non possono più risalire il condotto (analogamente ad una barca che non può risalire un fiume se non si muove a velocità maggiore di quella della corrente) e quindi il comportamento dell'ugello a monte di tale sezione diviene indipendente da tutto quello che accade a valle, e quindi anche dal valore della pressione all'uscita.

La relazione di Hugoniot (4.21) per un fluido incomprimibile, per il quale la velocità del suono  $c = \infty$ , e quindi  $M$  è sempre nullo, diviene

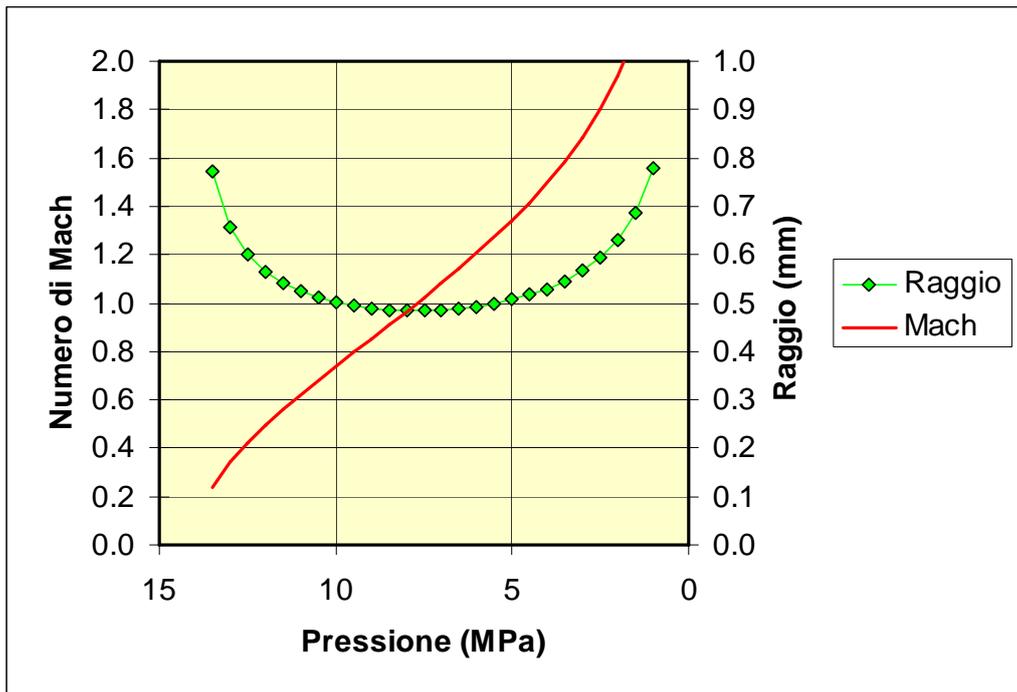
$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{w_1}{w_2}$$

come risulta anche dal fatto che  $G = \rho A w = \text{cost.}$

#### **ESEMPIO 4.13 – Ugello di De Laval**

In un ugello di sezione  $A_1 = 0.0001 \text{ m}^2$  entra vapore saturo secco a  $T_1 = 550 \text{ °C}$  e  $p_1 = 14 \text{ MPa}$  con una velocità iniziale  $w_1 = 3 \text{ m/s}$ . La pressione a valle è  $p_2 = 1 \text{ MPa}$ . Nell'ipotesi che il condotto sia adiabatico e la trasformazione sia reversibile, determinare l'andamento della sezione dell'ugello e l'andamento della velocità e del numero di Mach lungo di esso.

 *La soluzione è riportata nel file C4DELAVAL.XLS*



**Figura 12.** Andamento della sezione e del numero di Mach nell'ugello.

Le proprietà del vapore devono essere ricavate da tabelle o programmi, in questo caso faremo uso del software TPX per Excel.

La trasformazione è isoentropica, e assumeremo che lo stato del vapore in ogni sezione del condotto sia determinato dal valore dell'entropia (costante) e della pressione, che supponiamo di fare decrescere con passi arbitrari. Possiamo quindi ottenere i valori della densità e dell'entalpia in funzione della pressione in ogni punto del condotto, e quello della velocità dal bilancio di energia:

$$w = \sqrt{2 \left( h_1 + \frac{w_1^2}{2} - h \right)}$$

La sezione del condotto rimane quindi determinata dal bilancio di massa

$$A = \frac{G}{\rho w} = \frac{\rho_1 w_1 A_1}{\rho w}$$

Si vede dalla Fig. 12 che la velocità aumenta monotonicamente, mentre il raggio del condotto ha un minimo nel punto in cui si raggiunge la velocità del suono ( $M = 1$ ) e torna poi a crescere: l'ugello supersonico deve infatti essere divergente.

E' da notare che non otteniamo alcuna informazione sulla lunghezza del condotto. Essa è determinata dalle regole di buona fluidodinamica, che prescrivono di non superare determinati valori della conicità per evitare eccessive irreversibilità: in genere si assume una conicità di  $7^\circ - 15^\circ$  nel divergente e si assume la lunghezza del convergente circa  $1/3$  di quella del divergente.

□

**ESEMPIO 4.14 – Ugello percorso da gas ideale**

In un ugello entra aria (assimilabile ad un gas ideale con calore specifico costante) a  $T_1 = 280$  K e  $p_1 = 130$  kPa con una velocità iniziale trascurabile. La sezione di uscita è  $A_2 = 0.0013$  m<sup>2</sup> e la pressione a valle è  $p_2 = 1$  bar. Nell'ipotesi che il condotto sia adiabatico e la trasformazione sia reversibile, determinare la temperatura di uscita dell'aria e la portata nell'ugello. Determinare inoltre come varia la portata al decrescere della pressione a valle.

☞ *La soluzione è riportata nel file C4UGELLO.XLS*

Si può dimostrare, tramite la Eq. 1-7 dell'App.5.1, che in un gas ideale la velocità del suono è data da:

$$c = \sqrt{k R T}$$

Nell'App.5.2 vengono introdotte le seguenti due relazioni, che danno il valore della temperatura e della pressione per un gas ideale che fluisce reversibilmente in un ugello, in funzione del numero di Mach,  $M$

$$\frac{T_1}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{E14-1})$$

dall'espressione suddetta per  $p = p_2 = 1$  bar, nell'ipotesi (da verificare) che il moto sia subsonico, ovvero  $M < 1$ , si ricavano i valori del numero di Mach e della temperatura in uscita

$$M_2^2 = \frac{2}{k-1} \left[ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{2}{0.4} \left[ \left(\frac{1.3}{1}\right)^{0.286} - 1 \right] = 0.390 \quad M_2 = 0.62$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 280 \cdot \left(\frac{1}{1.3}\right)^{0.286} = 259.7 \text{ K}$$

La velocità e la densità in uscita sono date rispettivamente dalla definizione di numero di Mach e dall'equazione di stato

$$w_2 = M c = M \sqrt{k R T_2} = 0.624 \cdot 323 = 202 \text{ m/s}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{v_2} = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{100000}{287 \cdot 259.7} = 1.341 \text{ kg/m}^3$$

da cui si ottiene la portata

$$G = \rho_2 w_2 A_2 = 1.341 \cdot 201 \cdot 0.0013 = 0.35 \text{ kg/s}$$

(nel caso reale, non isoentropico, la portata sarebbe inferiore a causa delle irreversibilità).

Se si varia la pressione in uscita, le grandezze in gioco variano come riportato nella tabella seguente (ottenuta con l'applicazione Excel).

$p_{uscita}$	$p_{crit}$	$p_2$	$T_2$	$c_2$	$M$	$w_2$	$\rho_2$	$G$
bar	bar	bar	K	m/s		m/s	kg/m <sup>3</sup>	kg/s
1.3	0.687	1.300	280.00	335.416	0.000	0.000	1.618	0
1.25	0.687	1.250	276.88	333.542	0.237	79.173	1.573	0.161904
1.2	0.687	1.200	273.67	331.603	0.340	112.776	1.528	0.223993
1.15	0.687	1.150	270.36	329.593	0.422	139.153	1.482	0.268106
1.1	0.687	1.100	266.95	327.506	0.494	161.921	1.436	0.302223
1.05	0.687	1.050	263.42	325.337	0.561	182.481	1.389	0.329467
1	0.687	1.000	259.78	323.077	0.624	201.558	1.341	0.351446
0.95	0.687	0.950	256.00	320.719	0.685	219.586	1.293	0.369107
0.9	0.687	0.900	252.07	318.251	0.744	236.859	1.244	0.383057
0.85	0.687	0.850	247.99	315.663	0.803	253.585	1.194	0.393701
0.8	0.687	0.800	243.73	312.941	0.863	269.927	1.144	0.401313
0.75	0.687	0.750	239.28	310.069	0.922	286.019	1.092	0.40608
0.7	0.687	0.700	234.61	307.028	0.984	301.977	1.040	0.40812
0.65	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.6	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.55	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.5	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.45	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213
0.4	0.687	0.687	233.33	306.192	1.000	306.192	1.026	0.408213

Si vede che la portata aumenta fin quando all'uscita dell'ugello non si raggiunge la velocità del suono. Quando questo avviene, la pressione raggiunge un valore  $p^*$  detto *pressione critica* (nonostante non abbia nulla a che vedere col valore della pressione della sostanza al punto critico, introdotto nel Cap.3). Il valore di  $p^*$  è ottenibile dalla relazione generale (E14-1) ponendo  $M = 1$ :

$$p^* = p_1 \left( 1 + \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{k}{1-k}} = p_1 \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{1-k}}$$

e vale quindi circa  $p^* = 0.53 p_1$  per  $k = 1.4$  (esattamente,  $p^* = 0.687$  bar nel nostro caso).

Successivamente, all'ulteriore decrescere della pressione in uscita, il numero di Mach nella gola dell'ugello (che coincide con la sezione di uscita 2) rimane fissato ad 1 e la portata rimane costante e *non è influenzata dal valore della pressione a valle*.

In altri termini, quando a valle di un ugello la pressione è inferiore a circa metà del valore della pressione a monte, l'ugello è in condizioni di efflusso sonico e la portata dipende solo dal valore della pressione a monte (si veda l'App.5.2 in merito). In tali condizioni, bisogna assumere che nella sezione di uscita la pressione sia pari al valore della pressione  $p^*$ : la rimanente parte dell'espansione fino ad 1 bar avviene irreversibilmente all'esterno dell'ugello.

□

**Ugello reale. Rendimento isoentropico dell'ugello**

Nel caso reale, la trasformazione nell'ugello non è isoentropica e si potrebbe dimostrare (ma ci accontentiamo della intuizione) che questo comporta una diminuzione della velocità di uscita dall'ugello. Si può pertanto definire il rendimento isoentropico dell'ugello come il rapporto tra l'energia cinetica effettiva del gas in uscita e quella del corrispondente processo isoentropico

$$\eta_{s,ug} = \frac{w_{eff}^2}{w_{isoentr.}^2} \approx \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} \quad (4.25)$$

dove la seconda espressione (analoga a quella per una turbina) vale solo nel caso che la velocità in ingresso all'ugello sia trascurabile.

**BIBLIOGRAFIA**

- Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori, Cap. 1.

## APPENDICE 5.1 – Il moto isoentropico nei condotti a sezione variabile

In questa appendice ci si propone di studiare genericamente il moto del fluido in un condotto a sezione variabile (ugello o diffusore). Il condotto viene supposto orizzontale, rigido ed adiabatico e la trasformazione del fluido reversibile. I bilanci di massa, energia ed entropia sono dunque

$$\begin{cases} G_1 = G_2 = G \\ G (h_2 + e_{c2} - h_1 - e_{c1}) = 0 \Rightarrow h_2 - h_1 = e_{c1} - e_{c2} = \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \\ G (s_2 - s_1) = 0 \end{cases} \quad (4.1-1)$$

e possono essere riformulati come

$$\begin{cases} G = \rho w A = cost \\ h + \frac{w^2}{2} = h_0 = cost \\ s = cost \end{cases} \quad (4.1-2)$$

Dove con  $w$ ,  $h$ ,  $s$  sono i valori di velocità, entalpia ed entropia in una sezione generica del condotto e  $h_0$  è detta *entalpia di ristagno* e rappresenta l'entalpia che il fluido assume se viene portato in condizioni di velocità nulla senza scambi energetici con l'esterno.

Si noti che abbiamo implicitamente assunto che il moto sia *unidimensionale*, ovvero che i valori di  $w$ ,  $h$ ,  $s$  siano uniformi in ogni sezione del condotto.

Differenziando la seconda delle precedenti equazioni si ha

$$dh = -w dw \quad (4.1-3)$$

Questa equazione indica (come è ovvio) che la velocità aumenta a spese dell'entalpia e viceversa. Dal bilancio entropico, tenendo conto della seconda equazione di Gibbs, si ha

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = 0 \Rightarrow dh = \frac{dp}{\rho} \quad (4.1-4)$$

La quale indica che le variazioni di entalpia e di pressione hanno lo stesso segno.

Eliminando l'entalpia dalle due equazioni precedenti, si ottiene

$$-w dw = \frac{dp}{\rho} \quad (4.1-5)$$

E' ancora necessario eliminare la pressione dalla relazione precedente, e questo si può fare esprimendo la medesima in funzione della densità e dell'entropia

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds \quad (4.1-6)$$

il secondo termine è ovviamente nullo per una trasformazione isoentropica, mentre si può dimostrare che il primo coefficiente

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \quad (4.1-7)$$

rappresenta il quadrato della velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche nel mezzo, ovvero la *velocità del suono*.

In definitiva si ottiene

$$-w \, dw = c^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.1-8)$$

che mostra che le variazioni di velocità e di densità lungo l'ugello hanno segno opposto. Abbiamo infine bisogno di legare le variazioni di sezione dell'ugello a quelle di velocità, ed a tal fine esprimiamo anche il bilancio di massa in termini differenziali

$$\begin{aligned} dG = 0 &\Rightarrow d(\rho w A) = 0 \\ \rho w \, dA + \rho A \, dw + w A \, d\rho &= 0 \end{aligned} \quad (4.1-9)$$

e dividendo quest'ultima per  $G$

$$\frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (4.1-10)$$

Non rimane che eliminare la densità  $\rho$  dalle Eq. 1-8 e 1-10 per ottenere

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) = -\frac{dw}{w} (1 - M^2) \quad (4.1-11)$$

La relazione suddetta è detta *equazione di Hugoniot* (da P. Hugoniot, fisico francese, 1851-1887). Il termine  $w/c$  viene detto *numero di Mach*,  $M$ , (da E. Mach, fisico austriaco, 1838-1916) e rappresenta il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso; quest'ultima dipende dalla natura del fluido e dal suo stato termodinamico. Bisogna notare anche che queste equazioni sono valide in generale e nessuna ipotesi particolare è stata fatta sulla natura del fluido che scorre nel condotto.

La velocità del suono è esprimibile in funzione dei coefficienti termodinamici come

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{1}{\kappa/v - \beta^2 T/c_p}} \quad (4.1-12)$$

nel caso di gas ideale, la relazione precedente si semplifica in

$$c = \sqrt{k R T} \quad (4.1-13)$$

Notare che dalla 1-12 discende che la velocità del suono è infinita per un fluido incomprimibile, per il quale si ha  $\kappa = \beta = 0$ .

Si faccia attenzione a non confondere  $\kappa = -1/v(\partial v/\partial p)_T$  con  $k = c_p/c_v$ .

## APPENDICE 5.2 – Moto isoentropico dei gas ideali. Valori critici di temperatura, pressione e portata

La Eq. 1-13 dell'App.5.1, mostra che in un gas ideale la velocità del suono è data da:

$$c = \sqrt{k R T} \quad (4.2-1)$$

Dal bilancio di energia per il moto in un condotto rigido a sezione variabile in cui la velocità di ingresso sia trascurabile abbiamo che la velocità e l'entalpia sono legate da

$$h_1 = h + \frac{w^2}{2} \quad (4.2-2)$$

Conseguentemente, *per un gas ideale*, sfruttando la relazione  $c_p = kR / (k - 1)$ , la temperatura in una sezione generica è data da

$$T_1 = T + \frac{w^2}{2c_p} = T + \frac{w^2}{2 \frac{kR}{k-1}} \quad (4.2-3)$$

Sfruttando l'espressione della velocità del suono, Eq.(4.2.1), si ottiene

$$\frac{T_1}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (4.2-4)$$

Dove  $M = w/c$  è il numero di Mach. La relazione suddetta deriva unicamente da considerazioni energetiche, ed è valida solo per un gas ideale. Per una trasformazione adiabatica e reversibile possiamo considerare il moto isoentropico e si ha in aggiunta

$$\frac{p_1}{p} = \left( \frac{T_1}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.2-5)$$

E' da notare che anche nel caso in cui la velocità iniziale nel condotto sia non trascurabile e pari a  $w_0$ , le suddette equazioni rimangono comunque valide usando in luogo di  $p_1$  e  $T_1$  i valori *di ristagno* di temperatura e pressione,  $p_0$  e  $T_0$ , che, per un gas ideale, valgono rispettivamente

$$T_0 = T_1 + \frac{w_0^2}{2c_p}, \quad p_0 = p_1 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Al decrescere della pressione in uscita al condotto, la velocità e quindi la portata di fluido in esso aumentano, come indicato nell'esempio 4.14. In accordo con la equazione di Hugoniot (Eq.4.1-11), la velocità del suono si può raggiungere solo laddove la sezione del condotto presenta un minimo. In corrispondenza, la pressione assume un valore  $p^*$  detto *pressione critica* (nonostante non abbia nulla a che vedere col valore della pressione della sostanza al punto critico, introdotto nel Cap.3). Il valore di  $p^*$  è ottenibile dalla relazione generale Eq.(4.2.5) ponendo  $M = 1$ :

$$p^* = p_1 \left( 1 + \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{k}{1-k}} = p_1 \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{1-k}} \quad (4.2-6)$$

e vale quindi circa  $p^* = 0.53 p_1$  per  $k = 1.4$ .

Corrispondentemente, la *temperatura critica* (che, nuovamente, non ha nulla a che vedere con la temperatura del punto critico)  $T^*$  vale, ponendo  $M=1$  nella Eq.(4.2-5)

$$T^* = T_1 \frac{2}{k+1} \quad (4.2-7)$$

All'ulteriore decrescere della pressione in uscita, il numero di Mach nella gola del condotto rimane fissato ad 1, e la portata rimane quindi costante. Il moto del fluido evolve quindi in maniera supersonica nella parte anteriore del condotto, o, se questo non è possibile, hanno luogo delle irreversibilità che rendono il presente modello isoentropico non applicabile.

Il valore di tale portata massima, detta anche *portata critica*, è ottenibile facilmente sfruttando l'espressione della velocità del suono e l'equazione di stato dei gas ideali

$$G_{crit} = \rho^* c A^* = \frac{p^*}{RT^*} \sqrt{k RT^*} A^* \quad (4.2-8)$$

dove  $A^*$  rappresenta l'area della gola dell'ugello. Sostituendo le espressioni delle  $p^*$  e  $T^*$  trovate precedentemente (Eqs.4.2-6 e 4.2-7) si ha infine, con un po' di algebra

$$G_{crit} = \frac{p_1 A^*}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (4.2-9)$$

che per un gas biatomico ( $k = 1.4$ ) dà

$$G_{crit} = 0.685 \frac{p_1 A^*}{\sqrt{RT_1}} \quad (4.2-10)$$

Per concludere, è bene ribadire ancora una volta che le relazioni introdotte in questa appendice sono valide *unicamente per un gas ideale*.

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 4.1

Una tubazione è percorsa da una portata  $G = 0.5$  kg/s di azoto che entra alla temperatura di  $T_1 = 700$  °C ed esce a  $T_2 = 60$  °C. Determinare la potenza termica scambiata.

[ $W_t = -332.6$  kW]

### ESERCIZIO 4.2

In una linea ad alta pressione scorre vapor d'acqua saturo a  $p_1 = 30$  bar. Per misurarne il titolo, si lamina una piccola quantità di vapore attraverso una valvola. Al termine dell'espansione (che può essere considerata isoentalpica) il vapore si trova a  $p_2 = 1$  bar e  $T = 137$  °C. Determinare il titolo del vapore nella linea.

[ $x = 0.97$  ( $h = 2750.5$  kJ/kg)]

### ESERCIZIO 4.3

In una linea ad alta pressione scorre vapor d'acqua saturo a  $p = 30$  bar. Per misurarne il titolo, si spilla una piccola quantità di vapore attraverso una valvola, lo si lamina fino alla pressione di 1 bar e lo si mescola adiabaticamente con una portata  $G_a = 3$  kg/s di acqua a 20 °C. All'uscita del recipiente, si misura una portata totale  $G_u = 3.05$  kg/s di acqua alla pressione di 1 bar ed alla temperatura di 29.6 °C. Determinare la portata di vapore spillato ed il titolo del vapore nella linea.

*Suggerimento:* il recipiente in questione è un sistema aperto a regime, adiabatico, rigido, con due ingressi ed una sola uscita.

[ $G_v = 0.05$  kg/s;  $x = 0.855$  ( $h_v = 2544$  kJ/kg)]

### ESERCIZIO 4.4 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Con riferimento ai due esercizi precedenti, si riporti in un grafico la relazione tra il titolo del vapore e la temperatura del vapore stesso dopo la laminazione e tra il titolo del vapore e la temperatura dell'acqua dopo il mescolamento, nel campo  $x = 0.8 - 1$ . Si valuti quale dei due metodi di misura è più accurato.

### ESERCIZIO 4.5

Una turbina a vapore in regime stazionario ha le seguenti caratteristiche:

Portata di vapore  $G = 0.3$  kg/s, temperatura all'ingresso  $T_1 = 500$  °C, pressione all'ingresso  $p_1 = 40$  bar, pressione all'uscita  $p_2 = 0.1$  MPa. Nell'ipotesi di poter considerare la turbina adiabatica ed il processo reversibile, calcolare la potenza meccanica erogata e determinare le condizioni (temperatura e/o titolo) del vapore in uscita.

[ $W = 261$  kW,  $T_2 = 99.6$  °C,  $x_2 = 0.956$ ]

### ESERCIZIO 4.6

Un compressore a regime stazionario (che si può considerare adiabatico) comprime 0.4 kg/s di azoto da pressione e temperatura ambiente ( $p_1 = 0.1$  Mpa,  $T_1 = 20$  °C) alla pressione  $p_2 = 20$  bar. Se il processo si può considerare reversibile, calcolare la temperatura di uscita dell'azoto e la potenza di pompaggio. Ripetere il calcolo della potenza nel caso di compressione isoterma.

*Dati:* considerare l'azoto come un gas ideale con  $R = 296.8$  J/kg K,  $k = 1.41$ . [ $T_2 = 700$  K,  $W_{ad} = -165$  kW;  $W_{isot} = -104$  kW]

### ESERCIZIO 4.7

Con riferimento all'esercizio precedente, se l'azoto esce dal compressore alla temperatura  $T_2 = 550 \text{ }^\circ\text{C}$  e mantenendo l'ipotesi di processo adiabatico, giustificare il fatto che il processo è in questo caso irreversibile e calcolare la potenza di pompaggio ed il rendimento isoentropico di compressione. Tutti gli altri dati sono uguali a quelli dell'esercizio precedente.

[ $W = 216 \text{ kW}$ ,  $\eta_c = 0.76$ . La trasformazione è irreversibile in quanto adiabatica e con  $\Delta s = 166 \text{ J/kg K} > 0$ .]

### ESERCIZIO 4.8

Un compressore a regime stazionario comprime  $0.4 \text{ kg/s}$  di azoto da pressione e temperatura ambiente ( $p_1 = 0.1 \text{ Mpa}$ ,  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) alla pressione  $p_2 = 20 \text{ bar}$ . Si effettua la compressione in due stadi con refrigerazione intermedia fino alla temperatura iniziale. Ipotizzando che le due compressioni siano adiabatiche e reversibili, determinare il rapporto ottimale di compressione in ciascuno dei due stadi, la potenza assorbita, la temperatura di uscita dell'azoto.

Dati: considerare l'azoto come un gas ideale con  $R = 296.8 \text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.41$ .

[ $r_{p1} = r_{p2} = 4.472$ ;  $W = -130 \text{ kW}$ ;  $T_2 = 453 \text{ K}$ ]

### ESERCIZIO 4.9 (adatto alla soluzione tramite calcolatore)

Con riferimento all'esercizio precedente, tracciare il grafico della potenza richiesta per la compressione in funzione del rapporto di compressione del primo stadio. Ripetere i calcoli nell'ipotesi (più realistica) che il refrigeratore intermedio abbia un'efficienza del 75% (questo vuol dire che, dette  $T'$  e  $T''$  le temperature all'ingresso e all'uscita del refrigeratore intermedio,  $T'' - T' = 0.75 (T' - T_1)$ ).

### ESERCIZIO 4.10

Uno scambiatore di calore è costituito da due tubi coassiali. Nel tubo interno scorre una portata  $G_1 = 0.2 \text{ kg/s}$  di gas ( $c_{p1} = 1100 \text{ J/kg}$ ) alla temperatura di ingresso di  $T_{1i} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ , nel tubo esterno (mantello) scorre una portata  $G_2 = 0.5 \text{ kg/s}$  di acqua ( $c_{p2} = 4180 \text{ J/kg}$ ) alla temperatura di ingresso  $T_{2i} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  e a quella di uscita  $T_{2u} = 26 \text{ }^\circ\text{C}$ . Determinare la temperatura in uscita del gas.

[ $T_{1u} = 440 \text{ }^\circ\text{C}$ ]

### ESERCIZIO 4.11

Una portata  $G = 1.5 \text{ kg/s}$  di vapore uscente da una caldaia alla temperatura  $T_1 = 570 \text{ }^\circ\text{C}$  e alla pressione  $p_1 = 160 \text{ bar}$  si espande adiabaticamente e reversibilmente in una turbina fino alla pressione  $p_2 = 1 \text{ bar}$ .

- Determinare la potenza meccanica ottenuta ed il titolo in uscita.
- Ripetere il calcolo nel caso di un rendimento isoentropico di espansione pari a 0.75. Determinare inoltre la variazione di entropia nella turbina.

[a)  $W_{mI} = 1.68 \text{ MW}$ ,  $x_{2I} = 0.8657$ ; b)  $W_{mR} = 1.26 \text{ MW}$ ,  $x_{2R} = 0.99$ ,  $\Delta s = 0.75 \text{ kJ/kg K}$ ]

### ESERCIZIO 4.12

I gas combust ( $c_p = 1.11 \text{ kJ/kg K}$ ,  $k = 1.33$ ) provenienti dalla camera di combustione vengono immessi in una turbina a gas con una velocità  $c_3$  di  $10 \text{ m/s}$  alla pressione  $p_3 = 8 \text{ bar}$  ed alla temperatura  $T_3 = 850 \text{ }^\circ\text{C}$ ; i gas vengono scaricati dalla turbina alla pressione  $p_4 = 1.1 \text{ bar}$  ed alla velocità  $c_4 = 50 \text{ m/s}$ . Supponendo l'espansione adiabatica reversibile, determinare il lavoro ottenuto per ogni kg di gas.

[ $l' = 481.78 \text{ kJ/kg}$ ]

**ESERCIZIO 4.13**

In uno scambiatore di calore si deve raffreddare una portata  $G = 2 \text{ kg/s}$  di ammoniaca a  $p_1 = 14 \text{ bar}$ ,  $x_1 = 0.9$  fino alla pressione  $p_2 = 10 \text{ bar}$  ed alla temperatura di  $T_2 = 20 \text{ °C}$ . Determinare:

- la potenza termica necessaria;
- la portata di acqua lato secondario necessaria, se è richiesto che quest'ultima non subisca un riscaldamento tra ingresso ed uscita superiore a  $5 \text{ K}$  (assumere per l'acqua  $c_p = \text{cost} = 4180 \text{ J/kg K}$ ).

[a]  $W_t = 2.17 \text{ MW}$ ,  $G = 104 \text{ kg/s}$  ]

**ESERCIZIO 4.14**

Una tubazione lunga  $50 \text{ m}$  di acciaio al carbonio e diametro esterno  $D_e = 89 \text{ mm}$ , spessore  $s = 5 \text{ mm}$ , non coibentata, trasporta una portata  $G = 4 \text{ kg/s}$  di vapore saturo, alla pressione di  $10 \text{ Mpa}$ , che all'ingresso ha titolo pari  $x_i = 1$ . Noti il coefficiente di scambio globale  $u = 20 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , e la temperatura dell'aria esterna  $t_a = 20 \text{ °C}$ , valutare:

- Le perdite di calore per unità di tempo dalla tubazione;
- Il titolo del vapore all'uscita della tubazione.

Si possono trascurare le variazioni di pressione del vapore dovute alle perdite di carico lungo la tubazione.

[a]  $Q = 80 \text{ kW}$ , b)  $x = 0.985$ ]

**ESERCIZIO 4.15**

Del vapore entra in turbina alla pressione  $p_3 = 40 \text{ bar}$  e con un valore dell'entropia  $s_3 = 6,8876 \text{ kJ/kg K}$  e dopo un'espansione adiabatica esce dalla macchina alla pressione  $p_4 = 0.05 \text{ bar}$  e con titolo  $x_4 = 0.90$ .

Stabilire se in seguito all'espansione, si è ottenuto il massimo lavoro possibile e, in caso contrario, valutare il rendimento adiabatico della turbina.

**ESERCIZIO 4.16**

Una pompa riceve all'ingresso una portata  $G = 0.5 \text{ kg/s}$  di acqua come liquido saturo a  $27.0 \text{ °C}$ ; all'uscita si misura una pressione di  $7 \text{ Mpa}$ . Considerando l'acqua un fluido incomprimibile con densità  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e  $c = 4187 \text{ J/kg K}$ , si determini:

- la potenza meccanica per unità di portata nell'ipotesi di processo adiabatico reversibile;
- la potenza e l'incremento di temperatura corrispondente ad un rendimento di compressione del  $60\%$ .

[a]  $W_{m,id} = 3.5 \text{ kW}$ , b)  $W_{m,R} = 5.83 \text{ kW}$ ,  $\Delta T = 1.1 \text{ K}$ ]

**ESERCIZIO 4.17**

Una caldaia deve produrre una portata  $G = 50 \text{ t/h}$  di vapore saturo secco alla pressione di  $20 \text{ bar}$ . L'acqua viene introdotta alla pressione di  $20 \text{ bar}$  ed alla temperatura di  $20 \text{ °C}$ . Determinare la potenza termica richiesta.

[ $W_t = 37.7 \text{ MW}$ ]

**ESERCIZIO 4.18**

Per un compressore si conoscono i seguenti dati:

- fluido: aria (considerato gas ideale con calore specifico costante);
- condizione di ingresso:  $T_1 = 16 \text{ °C}$ ,  $p_1 = 1.00 \text{ bar}$ ;
- condizione di uscita:  $p_2 = 4.00 \text{ bar}$
- rendimento isoentropico:  $0.650$

- variazioni di energia potenziale e cinetica trascurabili;
- sistema adiabatico;
- portata di fluido  $G = 0.03 \text{ kg/s}$

Calcolare il lavoro e la potenza di compressione, e la temperatura di uscita.

$$[l' = -218 \text{ J/kg}, W'_m = -6.55 \text{ kW}, T_{2R} = 505 \text{ K}]$$

#### ESERCIZIO 4.19

In un compressore (sistema aperto a regime) si comprime una portata volumetrica (valutata all'ingresso)  $Q = 50 \text{ m}^3/\text{h}$  di azoto ( $R = 296.8 \text{ J/kg K}$ ,  $k = c_p / c_v = 1.4$ , che si può considerare un gas perfetto con  $c_p$  costante) a partire dalle seguenti condizioni iniziali:  $p_1 = 100 \text{ kPa}$ ,  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , fino alla pressione finale  $p_2 = 620 \text{ kPa}$ . Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili.

Valutare la potenza di compressione, la temperatura finale del gas, la potenza termica scambiata con l'ambiente e la portata volumetrica in uscita nel caso di compressione adiabatica reversibile in due stadi con rapporto ottimale di compressione e refrigerazione intermedia fino alla temperatura iniziale.

Tracciare inoltre le trasformazioni sul diagramma  $T-s$  (assumere entropia nulla per  $T = 200 \text{ K}$ ,  $p = 1000 \text{ kPa}$ ).

$$[W'_m = -2.9 \text{ kW}, T_2 = 380 \text{ K}, W'_T = -1.44 \text{ kW}, G_{v2} = 10.3 \text{ m}^3/\text{h}]$$

#### ESERCIZIO 4.20

Una portata  $G = 0.2 \text{ kg/s}$  di vapore d'acqua entra in una turbina alla pressione di 45 bar ed alla temperatura di  $750 \text{ }^\circ\text{C}$ . Il rapporto tra le pressioni di ingresso e di uscita è pari a 10. Il rendimento isoentropico vale 0.85; determinare:

- il lavoro specifico e la potenza ottenuti
- la temperatura finale
- l'entropia specifica finale.

$$[a) l' = 710 \text{ kJ/kg}, W'_m = 142 \text{ kW}, b) T_2 = 418 \text{ }^\circ\text{C}, c) s_2 = 7,90 \text{ kJ/kg K}]$$

#### ESERCIZIO 4.21

In uno scambiatore di calore il fluido freddo è acqua che entra a  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  ed esce a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ , mentre il fluido caldo è R134a, che entra a 14 bar e  $80 \text{ }^\circ\text{C}$  ed esce in condizioni di liquido saturo a  $52 \text{ }^\circ\text{C}$ . La portata massica dell'R134a è  $5,0 \text{ kg/min}$ .

Si determini:

- la portata massica dell'acqua;
- la generazione di entropia.

$$[a) 0.363 \text{ kg/s}, b) 5.46 \text{ W/K}]$$

#### ESERCIZIO 4.22

Una portata  $G_R = 10 \text{ kg/min}$  di R134 in fase di vapore saturo secco a 10 bar, entra in uno scambiatore di calore in cui si raffredda e condensa fino alla condizione di liquido saturo a 10 bar. La potenza termica è trasferita ad una portata di aria  $G_a = 80 \text{ kg/min}$  ( $c_p = 1.01 \text{ kJ/kg K}$ ), che entra nello scambiatore a  $60 \text{ }^\circ\text{C}$  ed alla pressione di 1 bar. Se il deflusso dell'aria è isobaro (ovvero, con perdite di carico trascurabili), si calcoli la temperatura dell'aria in uscita. Si determini inoltre se lo scambiatore può funzionare nelle condizioni suddette.

[ $80.3 \text{ }^\circ\text{C}$ ; no, perchè il termine di irreversibilità risulta minore di zero, e infatti l'R134 si trova a  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  e non può cedere calore all'aria a  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ ]

## Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

Cap.5. L'equazione generalizzata di Bernoulli e la sua applicazione al calcolo dei condotti.

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.01 – 13.11.2006.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Nota preliminare

*Questo capitolo è stato concepito anche per un suo utilizzo in modo svincolato da quelli precedenti e seguenti: per tale ragione, i lettori che fanno uso di tutte le dispense troveranno ripetuti, nei paragrafi marcati con \*, alcuni concetti già esposti in precedenza.*

## Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio del moto di un fluido all'interno di un condotto (nella maggior parte dei casi una tubazione) allo scopo di derivare i criteri di base per il dimensionamento del condotto stesso e degli organi necessari al moto (ovvero, pompe o ventilatori).

Non è difficile rendersi conto che una tubazione in cui scorre un fluido costituisce quello che in termodinamica è stato definito *sistema aperto*: come tale, il suo studio potrebbe essere affrontato benissimo mediante le equazioni generali di bilancio della termodinamica. Lo scopo di queste note è dunque di riformulare l'equazione di bilancio dell'energia in una forma di uso più pratico e più comune nella tecnica per il calcolo dei condotti stessi. Il tutto anche al fine di potere fare uso delle tabelle contenute nei manuali.

In particolare, restringeremo l'oggetto del nostro studio ai sistemi in *condizioni stazionarie* (ovvero, a regime).

L'esposizione è corredata da numerosi esempi, che i lettori sono invitati a non tralasciare, in quanto essi risultano spesso più istruttivi del testo stesso.

## Nozioni preliminari

### ***Proprietà dei fluidi: densità\*, peso specifico\*, viscosità***

Per i nostri scopi, un *fluido* può essere definito come *un materiale che non è in grado di reagire a sforzi di taglio statici*. Questo vuol dire che, in condizioni di quiete, attraverso una qualunque superficie ideale tracciata all'interno del fluido non possono trasmettersi forze *parallele* alla superficie stessa. Come conseguenza, un fluido non può avere una forma propria, ma si adatta a quella del suo contenitore. Al contrario, attraverso la stessa superficie possono trasmettersi forze *perpendicolari* alla superficie stessa: la loro risultante per unità di superficie rappresenta, come è noto, la *pressione*.

La *densità* di un fluido ( $\rho$ , pronuncia rho), come è noto, rappresenta la massa della unità di volume e le sue unità SI sono  $\text{kg/m}^3$ . Viene spesso usata anche la *densità relativa* (adimensionale) che è il rapporto tra la densità del materiale e quella dell'acqua a pressione atmosferica e 4 °C ( $1000 \text{ kg/m}^3$ ). Il *peso specifico* ( $\gamma$ , pronuncia gamma) rappresenta invece il peso della unità di volume e si misura in  $\text{N/m}^3$ . La relazione tra  $\rho$  e  $\gamma$  è ovviamente la stessa che intercorre tra massa e peso

$$\gamma = \rho g \quad (5.1)$$

dove  $g$  rappresenta l'accelerazione di gravità ( $9.8066 \text{ m/s}^2$  al livello del mare). La densità di alcuni liquidi è riportata in Tab.A-1

Si ricorda che la densità di un fluido dipende dalla temperatura e dalla pressione: per un liquido, la dipendenza dalla pressione è molto debole e si può in genere trascurare.

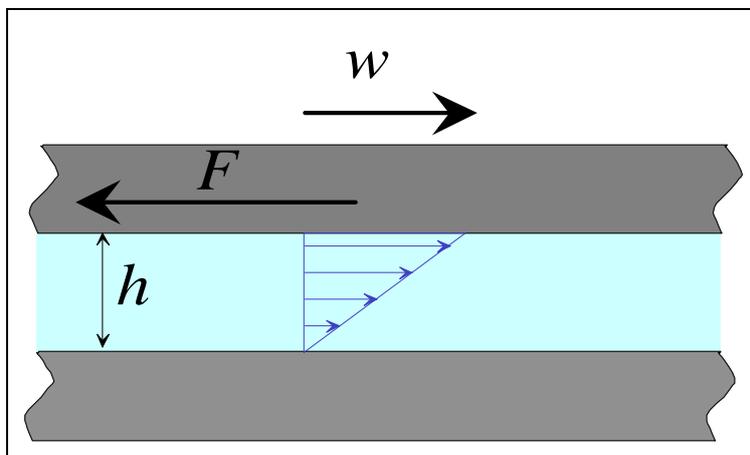
Un fluido la cui densità è costante in ogni condizione si dice *incomprimibile*. Nessun fluido reale è perfettamente incomprimibile, tuttavia tale modello si adatta molto bene ad un liquido (se le variazioni di temperatura non sono molto elevate) ed anche ad un aeriforme (se le variazioni di temperatura e pressione sono molto piccole rispetto al valore medio).

Il modello di fluido incomprimibile non è inoltre soddisfacente quando il fluido si muove a velocità prossime a quelle della propagazione del suono in esso: questo non si verifica in genere nelle applicazioni che considereremo (la velocità del suono è circa 300 m/s in aria e 1500 m/s in acqua).

In condizioni *dinamiche*, un fluido è in grado di trasmettere anche sforzi di taglio: supponiamo di considerare uno strato sottile di fluido (meato) di altezza  $h$ , delimitato da due pareti piane, di cui la superiore si muove con velocità  $w$  (vedi Fig.1). Il moto relativo tra il fluido e la parete nel punto di contatto è nullo, e di conseguenza nel meato si stabilisce un campo di velocità triangolare come indicato nella Fig.1: i piani di fluido scorrono l'uno sull'altro come farebbero dei fogli di carta. Questo genera una forza resistente sulla superficie superiore in moto. Sperimentalmente, si vede che la forza (per unità di area),  $F/A$ , agente sul fluido è data da

$$\frac{F}{A} = \tau = \mu \frac{w}{h} \quad (5.2)$$

dove  $\mu$  (mi) è una proprietà del fluido detta *viscosità dinamica*. Sulla parete agisce una forza di segno opposto.



**Figura 1:** Azioni esercitate da un fluido tra due superfici in moto relativo.

L'Eq. (5.1) può essere riscritta in forma più generale per uno strato di altezza infinitesima:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy} \quad (5.3)$$

dove  $\tau$  rappresenta lo *sforzo di taglio viscoso* [N/m<sup>2</sup>], ovvero la forza che agisce per unità di area su una superficie interna al fluido in direzione parallela a tale superficie, e  $dw/dy$  è la derivata della velocità del fluido in direzione perpendicolare alla superficie considerata.

L'entità dello sforzo di taglio è tanto maggiore quanto maggiori sono la viscosità e i gradienti di velocità.

La *viscosità* è dunque la proprietà fisica che caratterizza la capacità di un fluido di trasmettere sforzi di taglio *dinamici*. Le sue unità di misura nel sistema SI sono ricavabili invertendo la relazione precedente

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dw}{dy}} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{s} = \text{Pa} \cdot \text{s} \right] \quad (5.4)$$

Questa espressione della viscosità è valida solo per una particolare classe di fluidi, detti *fluidi newtoniani*. Il modello di fluido newtoniano (detto così da Isaac Newton, che per primo ipotizzò una relazione del tipo suddetto) si adatta molto bene alla maggior parte dei fluidi sia liquidi che aeriformi, tranne quelli molto viscosi, quali grasso, dentifricio e paste in generale.

La viscosità è sempre positiva: lo sforzo viscoso si oppone sempre al moto della parete superiore e rappresenta pertanto una *forza dissipativa*. Un fluido è quindi tanto più viscoso quanto più si "opponne al moto": l'olio è più viscoso dell'acqua, che a sua volta è più viscosa della benzina.

I valori della viscosità di alcuni fluidi sono riportati in Tab.A-2: da notare come la viscosità di un fluido vari fortemente con la temperatura.

Per concludere si ricorda che talvolta si fa riferimento alla *viscosità cinematica* del fluido, indicata generalmente con la lettera  $\nu$  (ni) e definita come il rapporto tra viscosità dinamica e densità:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (5.5)$$

Le sue unità SI sono  $\text{m}^2/\text{s}$ .

#### ***Portata e velocità del fluido\****

Si definisce *portata massica* di fluido in un condotto la massa di fluido che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo. Essa si indica in genere con  $G$  e si misura in  $\text{kg}/\text{s}$ . Si definisce anche la *portata in volume* di fluido ( $G_v$ , misurata in  $\text{m}^3/\text{s}$ ) come il volume di fluido che attraversa una determinata sezione nella unità di tempo. Queste due quantità sono ovviamente legate dalla stessa relazione che lega massa e volume, ovvero, se la densità è costante nella sezione

$$G = \rho G_v \quad (5.6)$$

Il semplice termine *portata* si riferisce in genere alla portata massica (e nel seguito verrà usato con tale significato). Tuttavia, a volte viene anche usato con riferimento alla portata in volume. In caso di ambiguità, è bene controllare le unità di misura che sono specificate.

La velocità di una particella fluida può essere definita, in accordo con la meccanica, come la derivata della sua posizione rispetto al tempo e verrà indicata con  $\vec{w}$  (il modulo del vettore sarà indicato con  $w$ ). In genere, la velocità all'interno di un fluido in moto non è costante in ogni punto: ci si può rendere conto di questo semplicemente osservando la superficie di un fiume da un ponte. In particolare, la velocità è in genere massima nella zona centrale del condotto ed è *nulla* nelle zone di contatto con le superfici solide.

In altre parole, un fluido non scorre su una superficie come fa un solido su un altro solido: la velocità relativa nella zona di contatto è sempre nulla. Lo scorrimento si verifica tra gli strati di fluido immediatamente adiacenti alla superficie, dove i gradienti di velocità sono in genere elevati.

Si può definire una *velocità media* (detta più precisamente *velocità media di portata*, indicata con  $\bar{w}$ ) del fluido come la velocità del fluido, ipotizzata costante nella sezione, che produrrebbe la stessa portata in volume. Il fluido che attraversa una sezione del condotto in 1 s, in tali condizioni, è quello contenuto in un cilindro di altezza  $\bar{w}$  e sezione pari a quella del condotto,  $A$ . La velocità media  $\bar{w}$  è quindi data da:

$$G_v = \bar{w} A \quad (5.7)$$

e di conseguenza la relazione che lega la portata massica alla velocità media è

$$G = \rho \bar{w} A \quad (5.8)$$

Seppure in modo molto indicativo, si può dire che nella pratica ingegneristica la velocità media dei liquidi nei condotti ha valori di 2-5 m/s, mentre per gli aeriformi i valori più comuni sono intorno a 10-30 m/s.

#### **ESEMPIO 5.1 - Calcolo del diametro di una tubazione\***

Una tubazione trasporta una portata  $G = 80000$  t/h di acqua marina ( $\rho = 1030$  kg/m<sup>3</sup>) per il raffreddamento del condensatore di una centrale termoelettrica. Supponendo una velocità media nel condotto di 4 m/s, calcolare il diametro della tubazione (supposta circolare).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 80000 \frac{\text{t}}{\text{h}} = 80000 \frac{1000\text{kg}}{3600\text{s}} = 22200 \text{ kg/s}$$

La sezione del condotto si ricava dall'Eq. (5.7)

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{22200}{1030 \cdot 4} = 5.4 \text{ m}^2$$

e quindi il suo diametro vale

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 2.6 \text{ m}$$

Da notare che i dati sono realistici. Le opere di presa dell'acqua di raffreddamento delle centrali termoelettriche hanno dimensioni simili.

□

#### **Moto laminare e turbolento - Numero di Reynolds**

Se osserviamo il getto che fuoriesce da un rubinetto (di quelli senza dispositivo rompigetto) si nota che, finché la portata è bassa, il getto è liscio e lucido; all'aumentare della portata compaiono sulla superficie delle irregolarità di sempre maggiore entità. Lo stesso fenomeno si ripete in ogni fluido in moto: quando la portata, e quindi la velocità, superano un valore critico, le irregolarità del moto non sono più smorzate dalle forze viscosive. Si dice che il moto ha avuto una transizione dal regime *laminare* a quello *turbolento*. Nel moto turbolento la velocità di ogni particella si può suddividere in una componente media, indipendente dal

tempo, e una componente fluttuante, di ampiezza generalmente minore, che oscilla nel tempo con uno spettro di frequenze relativamente elevate. Questa seconda componente non è presente nel moto laminare, che pertanto viene spesso definito come moto "ordinato".

Si noti che il moto turbolento è *intrinsecamente non stazionario*: esso può essere considerato solo *mediamente stazionario*, trascurando gli effetti della componente fluttuante di velocità. Si faccia inoltre attenzione a non confondere la *velocità media locale* qui definita con la *velocità media di portata* di cui si è scritto in precedenza.

Il moto turbolento dei fluidi rimane uno dei problemi aperti della fisica: per quanto possa sembrare sorprendente, dopo più di un secolo di studio esso sfugge ancora ad una completa caratterizzazione. Anche le cause e le modalità della transizione laminare-turbolenta rimangono ancora da chiarire completamente.

Un criterio per determinare se il moto in un condotto è laminare o turbolento venne formulato sperimentalmente dal fisico inglese Osborne Reynolds (1842-1912). Secondo tale criterio, il moto *in un condotto* è laminare quando il seguente gruppo adimensionale, detto *numero di Reynolds*

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} \quad (5.9)$$

è inferiore al valore di 2000. Per  $Re > 10000$  il moto è completamente turbolento; per i valori intermedi ( $2000 < Re < 10000$ ) si ha una regione di transizione. In  $Re$  compare la grandezza  $D_H$ , detta *diametro idraulico* del condotto, definito come

$$D_H = \frac{4 A}{P} \quad (5.10)$$

dove  $A$  è la sezione del condotto e  $P$  rappresenta il perimetro bagnato dal fluido. Si può verificare facilmente che, se la sezione è circolare,  $D_H$  è pari al diametro del condotto stesso.

Il valore critico del numero di Reynolds, qui fissato al suo valore "storico" di 2000 può in realtà variare notevolmente con la configurazione geometrica e perfino con le azioni esterne (es. vibrazioni del sistema). Al lettore interessato si consiglia la lettura dell'Appendice F di *Heat Transfer*, di A. Bejan, Wiley 1992

Nella tecnica, il moto di un fluido è quasi sempre turbolento: raramente si ha a che fare con moti di tipo laminare, tranne che in oleodinamica.

### **ESEMPIO 5.2 - Moto in un condotto rettangolare**

In un condotto rettangolare di sezione 20 X 40 mm scorre acqua a 20 °C alla velocità media di 0.5 m/s. Determinare se il moto è laminare o turbolento. Ripetere il calcolo, a parità di ogni altra condizione, nel caso che il fluido sia aria a pressione atmosferica ( $\rho = 1.26 \text{ kg/m}^3$ ).

Il diametro idraulico del condotto è dato da

$$D_H = \frac{4 A}{P} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 40}{2 \cdot (20 + 40)} = 26.67 \text{ mm}$$

e per l'acqua, adottando i valori dati nelle tabelle allegate,  $Re$  vale

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1000 \cdot 0.5 \cdot 26.67 \cdot 10^{-3}}{0.001} = 13300$$

quindi il moto è decisamente turbolento, essendo  $Re > 10000$ .

Per l'aria si ha

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1.26 \cdot 0.5 \cdot 26.67 \cdot 10^{-3}}{1.82 \cdot 10^{-5}} = 923$$

e quindi il moto è laminare.



**ESEMPIO 5.3 - Sforzo tra due cilindri coassiali rotanti.**

Due cilindri coassiali di lunghezza 0.3 m hanno diametri rispettivamente di 50 e 52 mm. Il cilindro interno ruota ad una velocità di 40 giri al minuto (rpm). Il meato (intercapedine) tra i due cilindri è riempito di un olio di viscosità dinamica pari a 900 mPa s. Assumendo che il profilo di velocità nel meato tra i due cilindri sia lineare e trascurando le forze agenti sulle basi dei cilindri, calcolare la coppia necessaria a mantenere il cilindro interno in rotazione.

La velocità del fluido in corrispondenza del cilindro esterno è nulla. In corrispondenza del cilindro interno, essa è pari alla velocità periferica del cilindro stesso, ovvero

$$w = \omega r = \frac{2 \pi n}{60} r = \frac{2 \pi \cdot 40}{60} \cdot 0.025 = 0.11 \text{ m/s}$$

la derivata della velocità rispetto al raggio è costante (dato che il profilo di velocità è lineare) e vale

$$\frac{dw}{dr} = \frac{w}{t}$$

dove  $t=1 \text{ mm}$  è lo spessore del meato. Di conseguenza lo sforzo di taglio alla parete interna vale

$$|\tau| = \mu \frac{dw}{dr} = \mu \frac{w}{t}$$

La risultante di tale sforzo su un elementino di superficie  $dS$  vale  $\tau dS$ , e il suo momento rispetto all'asse del cilindro vale  $M = \tau R dS$ . Il momento risultante si otterrà integrando l'espressione precedente su tutta la superficie laterale  $S$  del cilindro

$$M = \iint_S \tau R dS$$

Ma niente paura! Considerato che  $\tau$  ed  $R$  sono costanti, si ha

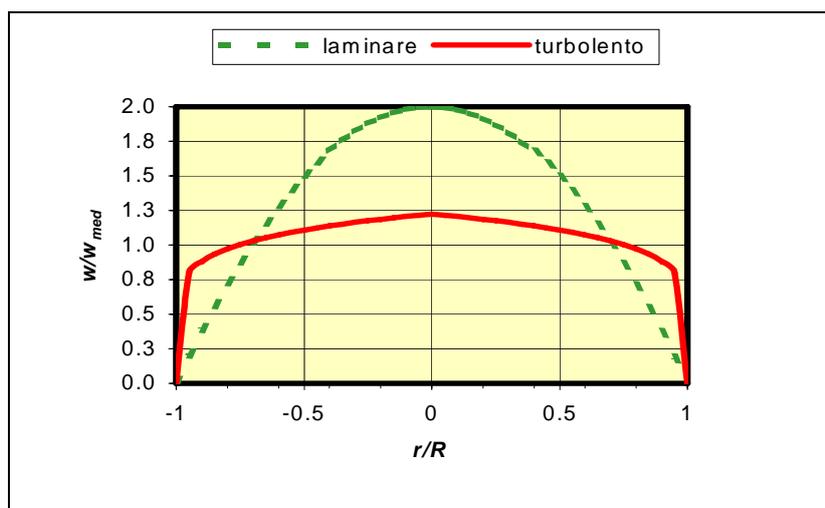
$$M = \tau R \iint_S dS$$

dove l'integrale rappresenta semplicemente la superficie laterale del cilindro ( $2\pi R L$ ). Quindi

$$M = \tau R 2\pi R L = 2\pi \mu \frac{w}{t} R^2 L = 2\pi \cdot 10^{-3} \frac{0.11}{0.001} \cdot 0.025^2 \cdot 0.3 = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

Un dispositivo simile viene usato per misurare la viscosità dei fluidi. La stessa formula ci dà la coppia di attrito che si sviluppa nel perno di un cuscinetto a sostentamento oleodinamico.





**Figura 2:** Profili di velocità (normalizzati al valore medio) per moto laminare e turbolento.

Il profilo di velocità all'interno di un condotto circolare differisce notevolmente nel caso di moto laminare e turbolento (ci si riferisce qui al valor medio locale, non prendendo in considerazione le fluttuazioni turbolente). Come risulta dalla Fig.2, nel caso di moto laminare il profilo di velocità è parabolico, mentre nel caso turbolento è notevolmente appiattito nella parte centrale del condotto e i gradienti di velocità si localizzano in prossimità della parete. Da notare che entrambi i diagrammi rappresentano i valori di velocità normalizzati rispetto alla velocità media  $\bar{w}$  e la velocità assoluta in caso di moto turbolento è notevolmente superiore a quella in moto laminare. Nel caso di moto laminare, il valore medio di velocità è la metà del valore massimo al centro del condotto, mentre nel caso di moto turbolento tale rapporto varia tra 0.8 e 0.9 (cresce al crescere di  $Re$ ) per cui la velocità media e quella massima sono grossomodo coincidenti.

#### **ESEMPIO 5.4 - Calcolo della portata da una misura di velocità**

Un misuratore di velocità posto al centro di un camino di sezione circolare di 15 cm di diametro indica un valore di 0.05 m/s. Ipotizzando che il moto sia laminare, calcolare la portata volumetrica dei fumi nel camino.

La velocità misurata al centro del condotto rappresenta il valore massimo della stessa. Se il moto è laminare, si ha che

$$\bar{w} = 0.5w_{\max}$$

per cui la portata volumetrica vale

$$G_v = \bar{w}A = 0.5 w_{\max} \frac{\pi D^2}{4} = 4.42 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

ovviamente, tale risultato è valido solo se il moto è veramente laminare. Il lettore interessato può verificare che questo è vero se i fumi hanno una viscosità cinematica di  $3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

□

## Bilancio di massa - Equazione di continuità

Dato che i condotti che consideriamo sono dei sistemi aperti a regime, l'equazione di bilancio di massa si formula come

$$G = \rho \bar{w} A = \text{costante} \quad (5.11)$$

e applicandola tra le sezioni  $a$  e  $b$  del condotto, si ha

$$\rho_a \bar{w}_a A_a = \rho_b \bar{w}_b A_b \quad (5.12)$$

dato che considereremo solo fluidi incomprimibili, per cui  $\rho = \text{cost}$ , si ha infine

$$\bar{w}_a A_a = \bar{w}_b A_b \quad (5.13)$$

E' importante notare una conseguenza della equazione precedente: da essa si vede che un fluido si muove più velocemente in corrispondenza di un restringimento di sezione.

Purtroppo la stessa cosa non vale per il traffico automobilistico!

Ci si può chiedere che relazione ci sia tra la (5.13) e la equazione di Hugoniot, introdotta nel cap.5. Dato che per un fluido incomprimibile la velocità del suono vale infinito, per esso il numero di Mach vale costantemente zero e la relazione di Hugoniot, con alcuni semplici passaggi matematici, si riduce alla forma della (5.13).

## L'equazione generalizzata di Bernoulli

L'equazione di bilancio per unità di massa di un sistema aperto si può scrivere in forma differenziale

$$dh + de_c + de_p = dq - dl' \quad (5.14)$$

ricordando che

$$\begin{cases} dh = Tds + vdp \\ dq = Tds - Tds_s \end{cases} \quad (5.15)$$

e sostituendo nella precedente, si ha, con semplici passaggi

$$v dp + de_c + de_p = -T ds_s - dl' \quad (5.16)$$

I termini di energia potenziale e cinetica valgono rispettivamente

$$\begin{cases} de_p = g dz \\ de_c = \alpha d \frac{\bar{w}^2}{2} \end{cases} \quad (5.17)$$

dove  $z$  rappresenta la quota del fluido (più precisamente, del suo baricentro) rispetto ad un riferimento arbitrario e il termine  $\alpha$  indica che, a causa della distribuzione (profilo) di velocità nel condotto, l'energia cinetica non è esprimibile semplicemente in funzione della velocità media del fluido. In moto laminare (per un condotto a sezione circolare) si ha  $\alpha = 2$  e in moto turbolento  $\alpha \approx 1.06$  (in quest'ultimo caso, si può assumere  $\alpha=1$ ).

Più dettagliatamente, l'energia cinetica è una proprietà estensiva del fluido: essa andrebbe valutata come somma (integrale) delle energie cinetiche di tutte le particelle fluide che attraversano una determinata sezione, una volta nota la distribuzione di velocità nella sezione stessa. Il risultato di tale calcolo è una valutazione accurata del coefficiente  $\alpha$  in ogni condizione. Tuttavia tale approccio va oltre gli scopi delle presenti note. Da notare comunque che l'energia cinetica effettiva è sempre maggiore di quella calcolata in base alla velocità media.

Tenuto infine conto che  $\nu = 1/\rho$ , si ha

$$\frac{dp}{\rho} + \alpha d \frac{\bar{w}^2}{2} + g dz = - dl' - Tds_s \quad (5.18)$$

a causa della tradizione invalsa nella tecnica, in questo contesto si formula l'equazione di bilancio riferendosi all'unità di peso anziché a quella di massa. Le unità di misura dei singoli termini divengono allora  $J/N = Nm/N = m$ , ovvero tutti i termini hanno le dimensioni di un'altezza. Per riferirsi all'unità di peso, è sufficiente dividere tutti i termini dell'equazione precedente per l'accelerazione di gravità  $g$ . Inoltre il termine dissipativo,  $Tds_s/g$  che rappresenta le perdite dovute alle irreversibilità, si indica con  $dh_A$ ; il termine  $dl'/g$  che rappresenta il lavoro meccanico utile scambiato dal sistema, si indica con  $-dh'$  (il cambiamento di segno riflette il fatto che in questo contesto si ha in genere a che fare con macchine operatrici, ed è quindi più conveniente considerare positivo il lavoro ceduto al sistema). Si ottiene infine

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_A \quad (5.19)$$

L'equazione suddetta prende il nome di *equazione generalizzata di Bernoulli*<sup>1</sup>

Nel caso di *fluidi incomprimibili*, la equazione precedente può essere facilmente integrata fra due sezioni  $a$  e  $b$  del condotto, fornendo

$$\boxed{\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} (\bar{w}_b^2 - \bar{w}_a^2) + (z_b - z_a) = h' - h_A} \quad (5.20)$$

Da notare che la Eq.19 discende direttamente dal primo principio della termodinamica, e vale quindi per *qualunque fluido*; la Eq.20, essendo invece stata integrata supponendo  $\rho = \text{costante}$ , vale solo per *fluidi incomprimibili*.

## Determinazione delle perdite di carico

Le perdite per attrito vengono convenzionalmente divise in due aliquote

$$h_A = h_{A,d} + h_{A,c} \quad (5.21)$$

dove  $h_{A,d}$  rappresenta le *perdite di carico distribuite*, ossia quelle causate dalla dissipazione dovuta agli effetti viscosi lungo le pareti dei condotti, mentre  $h_{A,c}$  rappresenta le *perdite di*

<sup>1</sup>Il fisico svizzero Daniel Bernoulli (1700-1782) formulò per primo l'equazione suddetta, senza tenere conto dei termini dissipativi e di apporto energetico,  $h_a$  e  $h'$ . Per tale motivo, la presente formulazione viene detta *generalizzata*.

carico concentrate, dovute alla dissipazione nelle discontinuità localizzate del condotto, quali curve, restringimenti, allargamenti, valvole, etc.

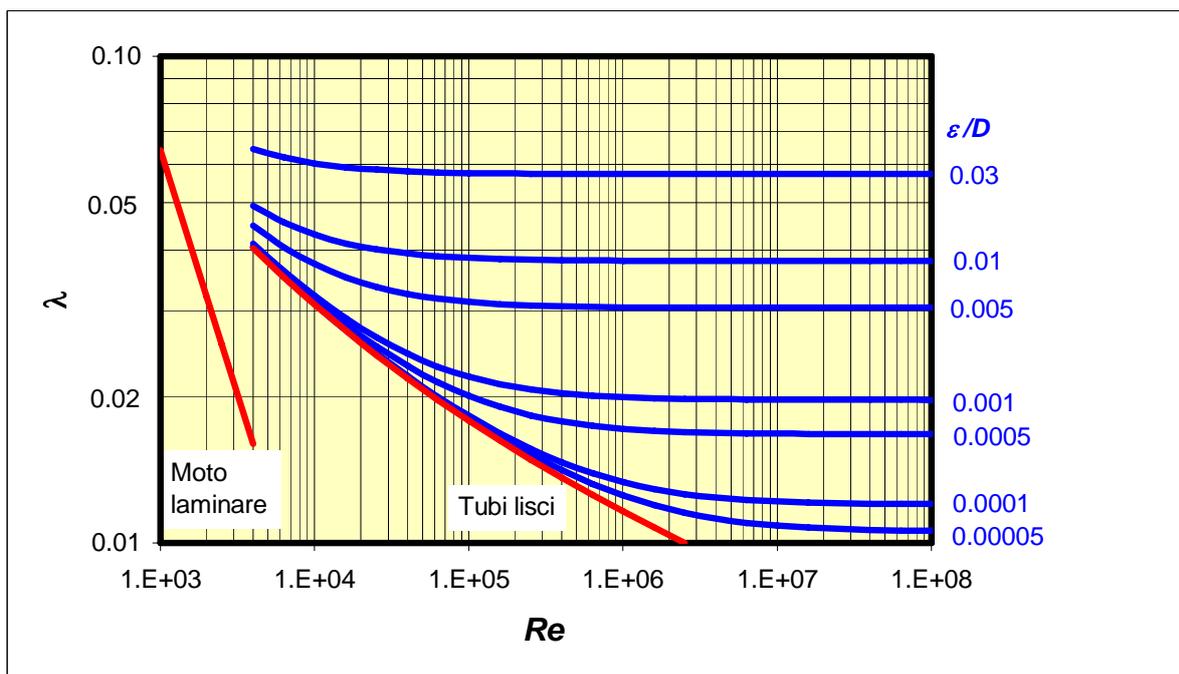
**Perdite di carico distribuite**

Le perdite di carico distribuite sono espresse da

$$h_{A,d} = \lambda(Re, \varepsilon / D_H) \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} \quad (5.22)$$

dove  $L$  è la lunghezza del condotto e  $\lambda$  è un coefficiente detto *coefficiente di Darcy*. Come indicato, quest'ultimo dipende dal numero di Reynolds e dalla rugosità relativa del condotto ( $\varepsilon/D_H$ , adimensionale) che rappresenta la rugosità media della superficie del condotto ( $\varepsilon$ , pronuncia epsilon, definita come in meccanica) normalizzata rispetto al diametro idraulico del condotto stesso. La dipendenza di  $\lambda$  da  $Re$  ed  $\varepsilon/D_H$  è espressa graficamente nel diagramma riportato in Fig.3, detto *diagramma di Moody*. Si noti come, per moto turbolento in tubi rugosi,  $\lambda$  diviene costante al di sopra di un determinato valore di  $Re$ .

Da notare che il diagramma di Moody rappresenta in pratica una situazione abbastanza favorevole: per variazioni di  $Re$  di cinque ordini di grandezza,  $\lambda$  varia poco meno di una decade. Nel caso che manchino informazioni precise sulla rugosità del condotto o su  $Re$ , o semplicemente per fare presto, conviene assumere per  $\lambda$  i "valori magici" 0.02 o 0.03.



**Figura3:** Diagramma di Moody

**ESEMPIO 5.5 - Calcolo delle perdite di carico distribuite**

In una tubazione di ghisa avente rugosità media di 260  $\mu\text{m}$ , diametro  $D = 80$  mm e lunghezza  $L = 50$  m, scorre una portata  $G = 20$  kg/s di acqua a 40 °C. Calcolare le perdite di carico distribuite e la caduta di pressione lungo la tubazione.

La soluzione è ottenibile anche con il foglio di calcolo **DARCY.XLS**

La velocità nel condotto vale

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{20}{1000 \frac{\pi \cdot 0.08^2}{4}} = 4 \text{ m/s}$$

Dalla Tab.A-2 si ricava che la viscosità dell'acqua a 40 °C è  $\mu = 680 \text{ } \mu\text{Pa s}$ , quindi il numero di Reynolds e la rugosità relativa valgono rispettivamente

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1000 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{68 \cdot 10^{-5}} = 470000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.260}{80} = 0.0033$$

dal diagramma di Moody (oppure dalla correlazione di Haaland, esposta nel seguito) si ricava  $\lambda = 0.027$ , per cui

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = 0.027 \frac{50 \cdot 4^2}{2 \cdot 0.08 \cdot 9.81} = 13.7 \text{ m}$$

□

### ***ESEMPIO 5.6 - Dipendenza delle perdite di carico distribuite dalla velocità per moto laminare e turbolento***

Ricavare il legame che intercorre tra le perdite di carico distribuite e la velocità media del fluido in moto laminare ( $\lambda = 64/Re$ ) e in moto pienamente turbolento ( $\lambda = \text{cost}$ ).

In moto laminare si ha

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{64}{Re} \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{64\mu}{\rho \bar{w} D_H} \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{32 \mu L}{g \rho D_H^2} \bar{w}$$

mentre nel moto turbolento, più semplicemente

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L \bar{w}^2}{D_H 2g} = \frac{\lambda L}{2 g D_H} \bar{w}^2$$

Le perdite di carico distribuite sono dunque proporzionali alla velocità media del fluido se il moto è laminare, ed al suo quadrato se il moto è turbolento con  $\lambda = \text{cost}$  (quest'ultima è la situazione che si presenta più frequentemente nella pratica). Nelle situazioni intermedie, in cui  $\lambda$  dipende da  $\bar{w}$ , si avrà una dipendenza da  $\bar{w}$  più complessa. Notare anche che nel moto pienamente turbolento le perdite di carico sono indipendenti dalla viscosità (il valore di  $\lambda$  dipende solo dalla rugosità del condotto).

□

### ***ESEMPIO 5.7 - Dipendenza delle perdite di carico distribuite dal diametro del condotto***

Calcolare le perdite di carico distribuite in una tubazione da 3/4 pollice (diametro interno  $D = 20.9 \text{ mm}$ ) di lunghezza  $L = 10 \text{ m}$ , in cui scorre una portata  $G = 36 \text{ kg/min}$  di acqua. Si supponga per semplicità  $\lambda = 0.02$ . Ripetere il calcolo per la stessa portata in un tubo da 1/2 pollice ( $D = 15.7 \text{ mm}$ ).

La portata deve essere convertita in unità SI (kg/s)

$$G = 36 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 36 \frac{\text{kg}}{60 \text{ s}} = 0.6 \text{ kg/s}$$

Esprimiamo le perdite di carico distribuite in funzione della portata

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{w}^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left( \frac{G}{\rho A} \right)^2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2g} \left( \frac{G}{\rho \pi D^2} \right)^2 = \lambda \frac{8 L G^2}{\pi^2 g \rho^2 D^5}$$

Per il tubo da 3/4 pollice si ha quindi

$$h_{A,d} = 0.02 \frac{8 \cdot 10 \cdot 0.6^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1000^2 \cdot 0.0209^5} = 1.5 \text{ m}$$

mentre per la tubazione da 1/2 pollice

$$h_{A,d} = 0.02 \frac{8 \cdot 10 \cdot 0.6^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 1000^2 \cdot 0.0157^5} = 6.2 \text{ m}$$

Quindi una piccola riduzione di diametro ha una grandissima influenza sulle perdite di carico. Del resto, la formula indica chiaramente che a parità di portata le perdite di carico sono inversamente proporzionali a  $D^5$  (il che vuol dire che, a parità di portata, dimezzando il diametro del condotto le perdite di carico aumentano di un fattore 32!). Nella realtà, bisogna considerare che anche  $\lambda$  varia leggermente, ma questo non altera sostanzialmente il risultato.

□

### **Espressioni per la valutazione del coefficiente di Darcy**

Le espressioni riportate nel seguito sono utili per calcolare  $\lambda$  con l'ausilio di un calcolatore.

*Moto laminare*

$$\lambda = \frac{c}{Re} \tag{5.23}$$

per tubi circolari si ha  $c = 64$ . Per altre sezioni, il valore di  $c$  oscilla indicativamente tra 50 e 100.

*Moto turbolento, tubo liscio ( $4000 < Re < 10^5$ ): legge di Blasius*

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \tag{5.24}$$

*Moto turbolento, tubo rugoso,  $4000 < Re < 10^8$ , formulazione semplificata*

La seguente espressione di  $\lambda$ , dovuta ad Haaland, sebbene non rigorosa, approssima il valore di  $\lambda$  ottenibile con correlazioni più accurate con un errore massimo del 1.5% nel campo di  $Re$  indicato per  $0 < \varepsilon/D < 0.05$ , e consente un calcolo esplicito (ovvero, senza fare uso di metodi iterativi)

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} \tag{5.25}$$

Da notare che la formula precedente, per  $\varepsilon=0$ , non fornisce valori esattamente uguali alla legge di Blasius. Gli scarti sono comunque piccoli.

La accuratezza di queste relazioni è intorno al 10% per tubi circolari, e di circa il 15% per condotti di differente sezione. In ogni caso, il numero di Reynolds è riferito alla velocità media di portata ed al diametro idraulico.

Una relazione approssimata, valida solo per acqua e consigliata da talune norme per il calcolo delle perdite di carico distribuite in un condotto, è quella di Hazen-Williams, che fornisce direttamente il valore di  $h_{A,d}$  per unità di lunghezza della tubazione in funzione della portata volumetrica e del diametro idraulico

$$\frac{h_{A,d}}{L} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D^{4.87}} \quad (5.26)$$

dove la costante moltiplicativa numerica 10.65 non è adimensionale (ha le dimensioni di  $s^{1.85}/m^{0.68}$  se si esprimono portata e diametro in unità SI) mentre la costante adimensionale  $C$  è ricavabile dalla Tab.1

Tubi estremamente lisci	140
Tubi nuovi, acciaio o ghisa	130
Tubi in legno o calcestruzzo	120
Tubi in acciaio rivettato, nuovi	110
Tubi vecchi in ghisa, mattoni	100
Tubi in acciaio rivettato, vecchi	95
Tubi in acciaio corrosivo	80
Tubi in acciaio fortemente corrosivo	60

**Tabella 1:** Coefficienti  $C$  (adimensionali) per la formula di Hazen-Williams.

Anche in questa formula, come nell'Esempio 5.7, si rileva che, a parità di portata, le perdite di carico sono inversamente proporzionali al diametro della tubazione elevato ad un esponente vicino a 5.

**ESEMPIO 5.8 - Calcolo delle perdite di carico distribuite con la formula di Hazen-Williams**

Ripetere il calcolo dell'Esempio 5.5 utilizzando la formula di Hazen-Williams.

La portata volumetrica vale

$$G_v = \frac{G}{\rho} = \frac{20}{1000} = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dalla Tab.1 (supponendo una tubazione in ghisa nuova) si ricava un valore di  $C = 130$ , quindi

$$h_{ad} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D_h^{4.87}} L = 10.65 \frac{(0.02 / 130)^{1.85}}{0.08^{4.87}} 50 = 10.2 \text{ m}$$

Mentre per  $C = 100$  (ghisa vecchia) si ha

$$h_{ad} = 10.65 \frac{(G_v / C)^{1.85}}{D_h^{4.87}} L = 10.65 \frac{(0.02 / 100)^{1.85}}{0.08^{4.87}} 50 = 16.8 \text{ m}$$

Quindi la formula approssima sufficientemente bene il valore delle perdite di carico (13.7 m) calcolate con la formula di Darcy nell'Esempio 5.5.

□

**Perdite di carico concentrate**

Le perdite di carico concentrate sono espresse da

$$h_{A,c} = \sum_i K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} \quad (5.27)$$

Dove  $\bar{w}_i$  rappresenta la velocità con cui il fluido attraversa la discontinuità e  $K_i$  un coefficiente di perdita di carico concentrata, che è tabulato nei manuali. Alcuni valori notevoli di  $K_i$  sono riportati in Tab.4. Una raccolta vastissima di valori di  $K_i$  è riportata nel testo: *Memento des pertes de charge: coefficients de pertes de charge singulieres et de pertes de charge par frottement*, di Idelcik I. E., Eyrolles, Paris, 1960. La sommatoria indica che si devono sommare i contributi di tutte le accidentalità presenti nel circuito.

In alcuni casi, ad esempio un restringimento di sezione, essendo la velocità del fluido diversa a monte ed a valle, l'equazione precedente è ambigua: in genere le tabelle precisano se si deve assumere il valore di velocità prima o dopo la discontinuità stessa.

**ESEMPIO 5.9 - Calcolo delle perdite di carico distribuite e concentrate**

Da un serbatoio in pressione fuoriesce una tubazione di scarico di diametro 25 mm e lunghezza di 5 m, con quattro gomiti a 90°, in cui scorre una portata  $G = 1.96$  kg/s di acqua a 20 °C. Assumendo un valore di  $\lambda = 0.02$ , determinare la pressione nel serbatoio, se lo sbocco della tubazione si trova a pressione atmosferica ed alla stessa quota del pelo libero del serbatoio.

Detti  $a$  e  $b$  rispettivamente il pelo libero del serbatoio e lo sbocco della tubazione, l'equazione di Bernoulli diviene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{1}{2g} \bar{w}_b^2 = -h_A$$

da cui si ha che la pressione *relativa* nel serbatoio deve valere

$$p_a - p_b = \frac{\rho}{2} \bar{w}_b^2 + \gamma (h_{AC} + h_{AD})$$

la velocità del fluido nella tubazione è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{1.96}{1000 \frac{\pi \cdot 0.025^2}{4}} = 4 \text{ m/s}$$

le perdite distribuite sono date da

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.02 \frac{5 \cdot 4^2}{2 \cdot 0.025 \cdot 9.81} = 3.26 \text{ m}$$

le perdite concentrate sono dovute all'imbocco dal serbatoio ( $K_1=1$ ) e ai gomiti ( $K_2= K_3= K_4= K_5= 0.5$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^5 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{16}{2 \cdot 9.81} 3 = 2.45 \text{ m}$$

da cui si ha infine

$$p_a - p_b = \frac{1000}{2} 16 + 9.81 \cdot 1000 \cdot (2.45 + 3.26) = 0.64 \text{ bar}$$

□

### Metodo delle lunghezze equivalenti

Questo metodo si basa sull'osservazione che ogni perdita concentrata può essere rimpiazzata da un tubo di appropriata lunghezza, che dia le stesse perdite di carico. Tale *lunghezza equivalente* è facilmente calcolabile

$$\lambda \frac{L_E}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = K_i \frac{\bar{w}^2}{2g} \quad (5.28)$$

$$L_E = \frac{K_i D_H}{\lambda}$$

Una difficoltà consiste nel fatto che il valore del coefficiente  $\lambda$  può essere inizialmente incognito: tuttavia si può spesso darne una stima ragionevole, e a meno che le perdite concentrate non costituiscano un'aliquota significativa delle perdite totali, tale stima non necessita di ulteriori correzioni.

Ovviamente, questo metodo non presenta nessun vantaggio nel caso si debbano determinare le perdite di carico. Al contrario, vi sono vantaggi nel caso si debba calcolare la portata o determinare il diametro del condotto.

### La prevalenza della pompa. Potenza resa e potenza assorbita

Il termine  $h'$ , che compare nella equazione di Bernoulli, è comunemente detto *prevalenza della pompa*. La prevalenza di una pompa (che si esprime in metri) può dunque essere definita rigorosamente come la *quantità di energia che la pompa aggiunge all'unità di peso del fluido*. Come vedremo nei successivi esempi, la prevalenza si presta anche ad altre interpretazioni meno generali.

#### ESEMPIO 5.10 - Determinazione della prevalenza di una pompa

Una pompa opera con un fluido di densità  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$  e si misura una differenza di pressione tra ingresso ed uscita di 0.94 bar. Le tubazioni di aspirazione e di mandata hanno lo stesso diametro e sono situate alla stessa quota. Determinare la prevalenza della pompa.

Applicando l'equazione di Bernoulli tra l'ingresso e l'uscita della pompa si ha

$$\frac{P_b - P_a}{\gamma} = h'$$

da cui

$$h' = \frac{P_b - P_a}{\rho g} = \frac{94000}{800 \cdot 9.8066} = 12 \text{ m}$$

Notare che non si devono considerare perdite all'interno della pompa, dato che esse sono già conglobate nel termine  $h'$ .

Con questo metodo, misurando le pressioni in ingresso ed uscita per varie portate, si determina la curva caratteristica della pompa. Se necessario, si può anche correggere il risultato per tenere conto delle differenti velocità del fluido in ingresso ed in uscita, se le relative tubazioni hanno differente diametro.

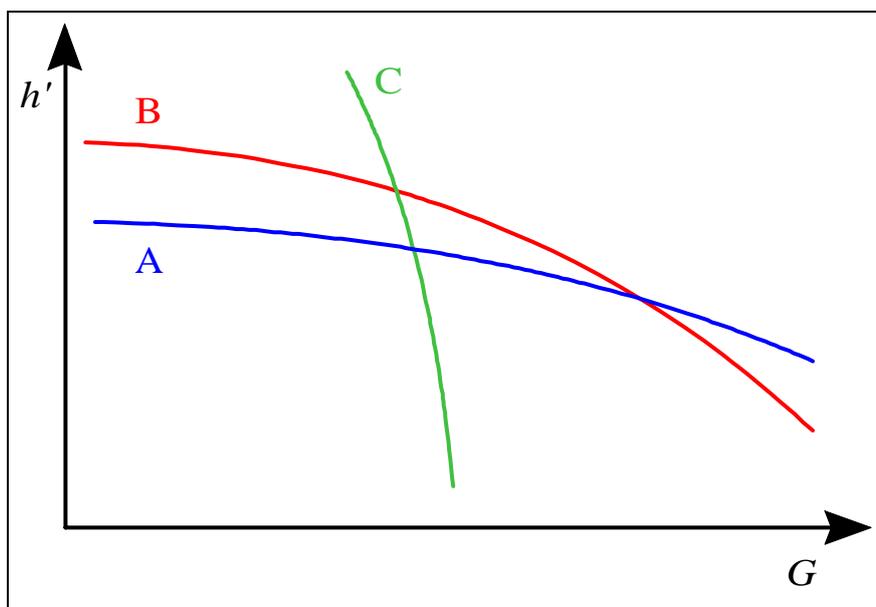
□

La prevalenza di una pompa varia al variare della portata, principalmente perché variano le perdite al suo interno. La curva che rappresenta tale variazione viene detta curva caratteristica della pompa e viene spesso fornita dal costruttore insieme alla pompa stessa. Essa è anche

generalmente riportata per punti sulla targhetta applicata alla pompa, che riassume tutti i dati della pompa stessa.

Alcuni andamenti tipici della curva caratteristica sono riportati in Fig.4. E' evidente che una pompa dalla caratteristica piatta (curva A) sarà più adatta per circuiti in cui si vuol mantenere costante la pressione in presenza di forti variazioni di portata. Una caratteristica del tipo C (molto ripida, al limite verticale) rappresenta invece una pompa che eroga una portata costante anche in presenza di notevoli variazioni delle perdite di carico, che sarà quindi adatta, ad esempio, come pompa dosatrice negli impianti chimici.

Una trattazione completa del funzionamento e delle tipologie di pompe esula dagli scopi di questo capitolo e verrà ripresa in seguito. Per ora basta accennare che l'andamento della caratteristica dipende dalle modalità costruttive della pompa: le pompe *centrifughe* (in cui una o più giranti che portano delle palette opportunamente sagomate mettono in movimento il fluido, dal centro verso la periferia) hanno in genere una caratteristica di tipo A o B, la cui pendenza può variare in funzione del numero delle giranti o della inclinazione delle palette. Una caratteristica di tipo C è invece tipica delle pompe *volumetriche* (pompe a pistoni, ad ingranaggi, etc.), che vengono dette così proprio perché trattano portate volumetriche di fluido praticamente indipendenti dal salto di pressione ai loro capi.



**Figura 4:** Tipiche curve caratteristiche di una pompa.

La potenza resa della pompa è definita come il lavoro per unità di tempo che essa fornisce al fluido. Per ottenerla, basterà quindi moltiplicare la prevalenza  $h'$  per la portata in peso di fluido ( $gG$ ), ovvero

$$W_R = g G h' = G \frac{\Delta p}{\rho} \quad (5.29)$$

La potenza assorbita dalla pompa è quella che essa preleva dalla sua sorgente di energia (es. la rete elettrica) e sarà maggiore della precedente a causa delle irreversibilità presenti nel corpo della pompa, dei trafiletti di fluido, dell'attrito dei cuscinetti etc. Essa è legata alla potenza resa dal rendimento ( $\eta$ , pronuncia eta) della pompa:

$$W_R = \eta W_A \quad (5.30)$$

Il rendimento di una pompa oscilla tra valori di 0.8-0.9 per pompe ben costruite fino a meno di 0.5 per pompe commerciali di bassa potenza.

**ESEMPIO 5.11 - Rendimento di una pompa**

La pompa di scarico di una lavatrice domestica tratta una portata di acqua di 0.25 kg/s con una prevalenza di 1.5 m, ed assorbe dalla rete una potenza  $W_A = 40$  W. Determinare il rendimento.

La potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 0.25 \cdot 9.81 \cdot 1.5 = 3.7 \text{ W}$$

ed il rendimento vale quindi

$$\eta = \frac{W_R}{W_A} = \frac{3.7}{40} = 0.09$$

Chiaramente, anche se i dati sono abbastanza realistici, si tratta di una situazione estrema. La necessità di mettere in commercio un oggetto robusto e di basso costo probabilmente non giustifica, dato il basso valore della potenza assorbita, ulteriori miglioramenti.



**Alcune applicazioni pratiche**

Dopo avere caratterizzato i termini  $h'$  e  $h_A$ , siamo in grado di applicare la equazione di Bernoulli al calcolo dei condotti. Nella pratica, si presentano diversi tipi di problemi:

1. Determinazione della caduta di pressione in una tubazione o della prevalenza necessaria per la pompa: questi problemi si possono risolvere applicando direttamente la equazione di Bernoulli, valutando le perdite di carico come precedentemente esposto.
2. Determinazione della portata in un circuito: data la dipendenza di alcuni fattori dalla velocità (che è inizialmente incognita) questi problemi richiedono una soluzione per tentativi.
3. Determinazione del diametro della tubazione, assegnate le massime perdite di carico ammissibili: anche questi problemi richiedono una soluzione iterativa.

**ESEMPIO 5.12 - Impianto di sollevamento**

Un impianto che solleva acqua da un serbatoio più basso ad uno più alto è rappresentato in Fig.5. La tubazione, in acciaio galvanizzato, ha un diametro di 50 mm e la portata di acqua (a 20 °C) è  $G = 3$  kg/s. Determinare la prevalenza necessaria per la pompa e la potenza resa al fluido.

Assumendo come sezioni  $a$  e  $b$  i peli liberi del fluido nei due serbatoi aperti, in cui la pressione è pari a quella atmosferica e la velocità si può considerare trascurabile, si ha

$$(z_b - z_a) = h' - h_A$$

ossia

$$h' = (z_b - z_a) + h_A$$

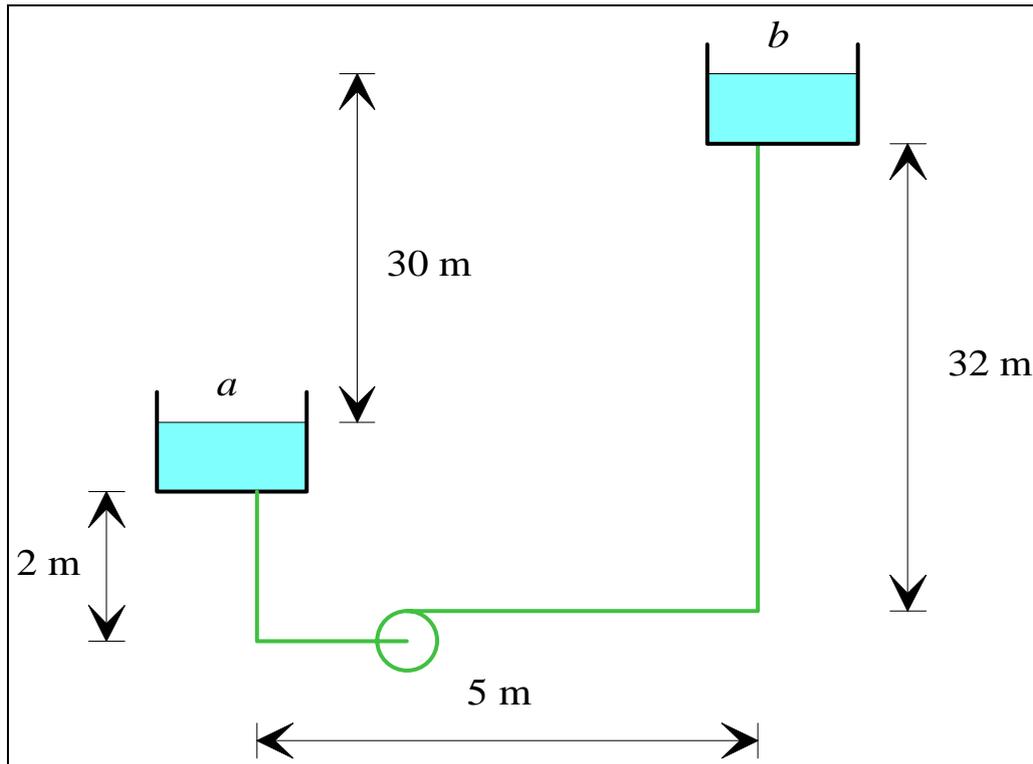
La equazione suddetta mostra chiaramente come la prevalenza della pompa serva in parte a sollevare il fluido all'altezza prescritta, in parte a vincere le perdite di carico. In assenza di perdite di carico, il fluido verrebbe sollevato ad una quota pari alla prevalenza della pompa.

la velocità del fluido nella tubazione è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{3}{1000 \frac{\pi 0.05^2}{4}} = 1.53 \text{ m/s}$$

Le perdite concentrate sono dovute all'imbocco dal serbatoio ( $K_1=1$ ), ai due gomiti ( $K_2= K_3= 0.5$ ) e allo sbocco nel secondo serbatoio ( $K_4=1$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^4 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^4 K_i = \frac{1.53^2}{2 \cdot 9.81} 3 = 0.36 \text{ m}$$



**Figura 5:** Schema di un impianto di sollevamento.

Per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati: rugosità dell'acciaio galvanizzato  $\varepsilon = 150 \mu\text{m}$  ( $\varepsilon/D = 0.003$ ), viscosità dell'acqua  $\mu = 1 \text{ mPa s}$ , densità dell'acqua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , da cui  $Re = 76500$ ,  $\lambda = 0.028$ , per cui le perdite distribuite sono date da (essendo la lunghezza totale della tubazione  $L = 39 \text{ m}$ )

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.028 \frac{39 \cdot 1.53^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 9.81} = 2.57 \text{ m}$$

da cui si ha infine (essendo la differenza di quota 30 m)

$$h' = 30 + (2.57 + 0.35) = 33 \text{ m}$$

la potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 3 \cdot 9.81 \cdot 33 = 970 \text{ W}$$

□

**ESEMPIO 5.13 - Circuito di circolazione per riscaldamento**

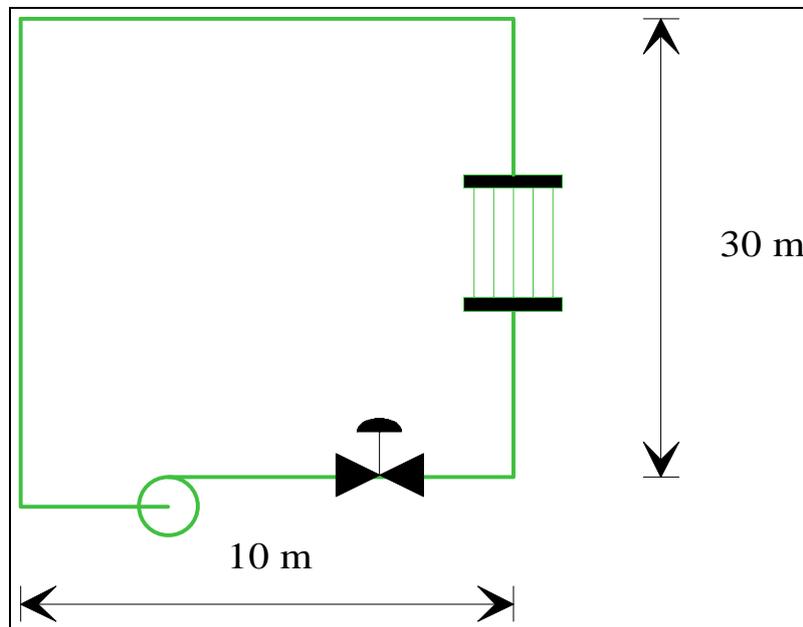
Un impianto di circolazione di acqua per riscaldamento è rappresentato in Fig.6. In questi casi, per evitare una eccessiva rumorosità, si adotta per la velocità dell'acqua un valore massimo di 0.75 m/s. La tubazione ha una rugosità di 10 μm. Se la portata di acqua è  $G = 0.06$  kg/s e la sua temperatura 66 °C, determinare il diametro della tubazione, la prevalenza della pompa e la potenza resa al fluido. Si assuma i valori del coefficiente di perdita concentrata  $K = 2$  per la valvola e  $K = 3$  per il termosifone.

Il diametro della tubazione si ottiene da

$$G = \rho \bar{w} A$$

$$A = \frac{G}{\rho \bar{w}} = \frac{0.06}{979 \cdot 0.75} = 8.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 10 \text{ mm}$$



**Figura 6:** Schema semplificato di un impianto di circolazione per riscaldamento domestico.

In questo caso le sezioni di ingresso ed uscita possono essere assunte coincidenti in un punto qualunque del circuito. Conseguentemente tutti i termini a primo membro della equazione di Bernoulli sono nulli ed essa diviene semplicemente

$$h' = h_A = h_{AC} + h_{AD}$$

il che esprime matematicamente il fatto che in questo caso la prevalenza della pompa serve solo a vincere le perdite di carico. Notare che, contrariamente all'esempio precedente, in questo caso la elevazione del circuito non influisce affatto sulla prevalenza della pompa.

Le perdite concentrate sono dovute alla valvola ( $K_1=2$ ), ai quattro gomiti ( $K_2= K_3= K_4= K_5= 0.5$ ) e al termosifone ( $K_6=3$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^4 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^4 K_i = \frac{0.75^2}{2 \cdot 9.81} 7 = 0.2 \text{ m}$$

per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati:

rugosità  $\varepsilon = 10 \mu\text{m}$  ( $\varepsilon/D = 0.001$ ), viscosità dell'acqua  $\mu = 0.434 \text{ mPa s}$ , densità dell'acqua  $\rho = 979 \text{ kg/m}^3$ , da cui  $Re = 16900$ ,  $\lambda = 0.029$ , per cui le perdite distribuite sono date da (essendo la lunghezza totale della tubazione  $L = 80 \text{ m}$ )

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.029 \frac{80 \cdot 0.75^2}{2 \cdot 0.01 \cdot 9.81} = 6.51 \text{ m}$$

da cui si ha infine

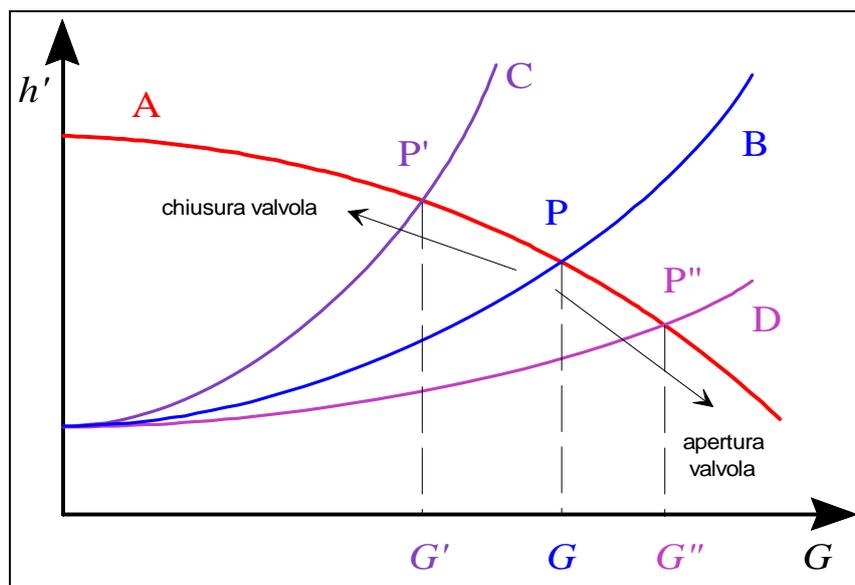
$$h' = 6.51 + 0.2 = 6.7 \text{ m}$$

la potenza resa è data da

$$W_R = G g h' = 0.06 \cdot 9.81 \cdot 6.7 = 4 \text{ W}$$

□

L'esempio precedente ci aiuta anche a chiarire qualitativamente come agisce una valvola nel regolare la portata in un circuito. Se si riduce la sezione di passaggio della valvola, il suo coefficiente di perdita di carico  $K$  aumenta e conseguentemente le perdite di carico in funzione della portata passano dalla curva B alla curva C nella Fig.7. La caratteristica della pompa rimane invece immutata, curva A. Il punto di funzionamento del circuito (punto in cui la prevalenza della pompa uguaglia le perdite di carico) si sposta da P a P' e la portata nel circuito diminuisce, mentre la prevalenza della pompa aumenta. L'opposto accade se si aumenta l'apertura della valvola (punto P'').



**Figura 7:** Meccanismo di azione di una valvola di regolazione.

Un secondo sistema per variare la portata in un circuito consiste nell'aumentare o diminuire la velocità di rotazione della pompa: in questo caso è la curva caratteristica della pompa che si alza od abbassa.

#### **ESEMPIO 5.14 – Massima altezza di aspirazione**

Una pompa aspira acqua da un pozzo avente il pelo libero 7 m sotto la quota della pompa stessa, tramite una tubazione rettilinea di diametro  $D = 25 \text{ mm}$ , al cui interno l'acqua scorre alla velocità  $w = 2 \text{ m/s}$ , che termina con una curva a  $90^\circ$  prima della bocca di aspirazione della pompa stessa. Assumendo per il coefficiente di Darcy il valore  $\lambda = 0.03$ , determinare il

valore della pressione assoluta alla bocca di aspirazione della pompa ed il battente in aspirazione.

Si assumono come sezioni  $a$  e  $b$  per il calcolo rispettivamente il pelo libero nel pozzo e la sezione di aspirazione della pompa. Applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi del circuito considerato si ottiene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2 - w_a^2}{2g} + z_b - z_a = -h_A$$

Notare che, essendo la pompa *esterna* al sistema considerato, la sua prevalenza non compare nei calcoli. La pressione in ingresso (sezione  $a$ ) è quella atmosferica e la velocità in ingresso si può ritenere trascurabile. Si ha dunque

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} = -h_A - (z_b - z_a) - \frac{w^2}{2g}$$

Si hanno perdite concentrate in corrispondenza dell'imbocco pozzo-tubo ( $K_1 = 1$ ) e della curva a monte della pompa ( $K_2 = 0.5$ ). Pertanto

$$h_A = h_{Ad} + h_{Ac} = \frac{w^2}{2g} \left( \lambda \frac{L}{D} + K_1 + K_2 \right) = \frac{4}{2 \cdot 9.81} \left( 0.03 \frac{7}{0.025} + 0.5 + 1 \right) = 1.98 \text{ m}$$

da cui si ottiene infine

$$p_b = p_a - \gamma \left( z_b - z_a + \frac{w^2}{2g} + h_A \right) = 10^5 - 9800 \cdot (7 + 0.2 + 1.98) = 0.1 \text{ bar}$$

Il battente in aspirazione è ricavabile da  $p_b = \gamma H_b$

$$H_b = \frac{p_b}{\gamma} = \frac{10^4}{9800} = 1.02 \text{ m}$$

La pressione immediatamente a monte della pompa è quindi inferiore a quella atmosferica e tende a diminuire fino ad annullarsi all'aumentare dell'altezza di aspirazione,  $z_b - z_a$ , o delle perdite di carico nel lato aspirazione,  $h_A$ . Questo porta il fluido in condizioni prossime alla saturazione e può provocare il fenomeno della *cavitazione*: all'interno del fluido, in corrispondenza delle palette della girante pompa, dove la pressione scende ancora, si formano bollicine di gas che successivamente collassano producendo un caratteristico rumore e vibrazioni che danneggiano le palette stesse. Per evitare tale inconveniente, è buona norma installare le pompe nel punto più basso del circuito (in questo caso in fondo al pozzo). Vedremo in seguito che si può effettuare anche una verifica del *battente minimo di aspirazione* (ingl. *NPSH, net positive suction head*) precisato dal fabbricante delle stesse.

□

### **ESEMPIO 5.15 - Autoclave**

Si deve alimentare un'autoclave alla pressione relativa  $p_2 = 4$  bar con acqua a 20 °C, prelevando il fluido da un serbatoio aperto all'atmosfera situato alla stessa quota dell'autoclave, tramite una tubazione di acciaio galvanizzato di diametro  $D = 25$  mm e lunghezza  $L = 5$  m con due curve a gomito di 90°. La portata è  $G = 1.47$  kg/s. Determinare la prevalenza necessaria per la pompa e la potenza resa al fluido.

Considerando come sezioni estreme i peli liberi del fluido nel serbatoio e nell'autoclave (in cui le velocità sono trascurabili) l'equazione di Bernoulli diviene

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} = h' - h_A$$

la velocità del fluido è data da

$$\bar{w} = \frac{G}{\rho A} = \frac{1.47}{1000 \frac{\pi 0.025^2}{4}} = 3 \text{ m/s}$$

per determinare le perdite distribuite si ricavano i seguenti dati: rugosità dell'acciaio galvanizzato  $\varepsilon = 150 \mu\text{m}$  ( $\varepsilon/D = 0.006$ ), viscosità dell'acqua  $\mu = 1 \text{ mPa s}$ , densità dell'acqua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , da cui  $Re = 75000$ ,  $\lambda = 0.033$ , per cui le perdite distribuite sono date da

$$h_{A,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.033 \frac{5 \cdot 3^2}{2 \cdot 0.025 \cdot 9.81} = 3.0 \text{ m}$$

le perdite concentrate sono dovute ai due gomiti ( $K_1=K_2=0.5$ ) per cui

$$h_{A,c} = \sum_{i=1}^2 K_i \frac{\bar{w}_i^2}{2g} = \frac{\bar{w}^2}{2g} \sum_{i=1}^2 K_i = \frac{3^2}{2 \cdot 9.81} 1 = 0.46 \text{ m}$$

in definitiva la prevalenza è data da

$$h' = \frac{p_b - p_a}{\gamma} + h_A = \frac{400000}{9810} + 3.46 = 44 \text{ m}$$

e la potenza assorbita

$$W_R = G g h' = 1.47 \cdot 9.81 \cdot 44 = 635 \text{ W}$$

In questo caso, gran parte della prevalenza della pompa è impiegata per vincere il salto di pressione tra i due serbatoi.

□

### **ESEMPIO 5.16 – Lancia antincendio**

L'ugello terminale di una lancia antincendio ha un diametro in ingresso  $D = 21 \text{ mm}$  ed un diametro in uscita  $d = 5 \text{ mm}$ . In esso scorre acqua a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Trascurando le perdite di carico nell'ugello stesso, determinare la pressione all'ingresso quando in uscita si ha una velocità dell'acqua  $w_b = 180 \text{ m/s}$ .

La pressione in uscita è quella atmosferica (il getto è in contatto con l'atmosfera senza pareti di contenimento). Applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi dell'ugello (supponendolo orizzontale) si ha

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2 - w_a^2}{2g} = 0$$

dall'equazione di continuità si ha

$$\frac{w_a}{w_b} = \left( \frac{d}{D} \right)^2$$

e sostituendo nella precedente si ottiene

$$p_a - p_b = \frac{\rho w_b^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{1000 \cdot 324}{2} \left[ 1 - \left( \frac{5}{21} \right)^4 \right] = 1.61 \text{ bar}$$

Notare che, dato che in b vige la pressione atmosferica, il risultato rappresenta la pressione *relativa* a monte dell'ugello.



**ESEMPIO 5.17 - Problema inverso: determinazione del diametro della tubazione**

Si deve trasportare una portata  $Q = 0.09 \text{ m}^3/\text{s}$  di acqua ( $\mu = 1 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) per una distanza di 100 m in un tubo commerciale di acciaio ( $\varepsilon = 45 \text{ }\mu\text{m}$ ) con una caduta di pressione inferiore a 900 kPa. Determinare il diametro minimo della tubazione.

La caduta di pressione può essere espressa in metri, applicando la equazione di Bernoulli tra gli estremi della tubazione

$$h_A = \frac{P_a - P_b}{\gamma} = \frac{900000}{9810} = 91.74 \text{ m}$$

Questo problema è complicato dal fatto che il valore di  $\lambda$  dipende dalla velocità del fluido, che non è nota a priori. Sono disponibili due metodi.

*Metodo I.*

Si procede per tentativi, determinando per primo un valore di  $D$  adottando  $\lambda = 0.02$ .

$$h_{A,d} = \lambda \frac{8LG^2}{\pi^2 g \rho^2 D^5} = \lambda \frac{8 L G_v^2}{\pi^2 g D^5}$$

$$D = \sqrt[5]{\lambda \frac{8LG_v^2}{\pi^2 g h_{A,d}}} = \sqrt[5]{0.02 \frac{8 \cdot 100 \cdot 0.09^2}{\pi^2 \cdot 9.81 \cdot 91.74}} = 0.11 \text{ m}$$

Con questo valore di  $D$ , siamo in grado di determinare il valore effettivo di  $\lambda$  e calcolare le perdite di carico reali. Dal diagramma di Moody si ha  $\lambda = 0.016$ , quindi

$$h_{A,d} = \lambda \frac{8 L G_v^2}{\pi^2 g D^5} = 68.5 \text{ m}$$

Dato che le perdite sono inferiori al previsto, si ricalcola il diametro adottando per  $\lambda$  l'ultimo valore trovato, e così via finché il calcolo non converge, il che in questo caso avviene dopo due iterazioni

$$D = 0.103 \text{ m}, \lambda = 0.017, h_{A,d} = 96.38 \text{ m}$$

$$D = 0.104 \text{ m}, \lambda = 0.017, h_{A,d} = 92 \text{ m}$$

Da notare che il diametro deve essere comunque arrotondato al valore superiore disponibile in commercio, quindi è inutile ricercare una precisione eccessiva.

*Metodo II.* Si fa uso della seguente formula empirica, dovuta a Swamee e Jain (le grandezze vanno espresse in unità SI):

$$D = 0.66 \left[ \varepsilon^{1.25} \left( \frac{LG_v^2}{gh_A} \right)^{4.75} + \frac{\mu}{\rho G_v} \left( \frac{LG_v^2}{gh_A} \right)^{5.2} \right]^{0.04}$$

che dà come risultato

$$D = 112 \text{ mm}$$



**ESEMPIO 5.18 – Coefficiente  $C_v$  delle valvole.**

In alcuni cataloghi, secondo l'uso anglosassone, le cadute di pressione nelle valvole vengono caratterizzate tramite il coefficiente di efflusso  $C_v$

$$C_v = G_v \sqrt{\frac{\rho_R}{\Delta p}}$$

che rappresenta la portata volumetrica di acqua  $G_v$  a temperatura ambiente (densità relativa  $\rho_R = 1$ ), in galloni per minuto (1 gal = 3.785 L), che fluisce nella valvola per effetto della caduta di pressione di  $\Delta p = 1$  psi (1 bar = 14.5 psi) ai suoi capi.  $C_v$  non è quindi una quantità adimensionale.

Data una valvola che ha un  $C_v = 1.2$ , trovare la portata di gasolio (densità relativa 0.75) che vi passa se ai capi della valvola sono applicate le pressioni  $p_1 = 20$  bar e  $p_2 = 8$  bar.

Dalla definizione di  $C_v$  si ottiene

$$G_v = C_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho_R}}$$

Da cui sostituendo  $\Delta p = 12$  bar = 174 psi si ottiene

$$G_v = 1.2 \sqrt{\frac{174}{0.75}} = 18.27 \text{ gpm} = 1.15 \text{ L/s}$$

Notare che per passare dal valore di  $C_v$  ad un valore del coefficiente di perdita concentrata per la valvola,  $K$ , è necessario definire una sezione di passaggio nominale  $A$  della valvola stessa e sfruttare la eguaglianza, con le opportune conversioni di unità di misura per esprimere il tutto (tranne  $C_v$ ) in unità SI

$$\Delta p = 1.733 \cdot 10^{12} \frac{G_v^2 \rho_R}{C_v^2} = \frac{A^2 w^2 \rho_R}{C_v^2} = K \frac{\rho w^2}{2}$$

$$K = 3.466 \cdot 10^{12} \frac{A^2}{C_v^2}$$

Notare anche che più alto è  $C_v$ , minore è la resistenza idraulica della valvola.



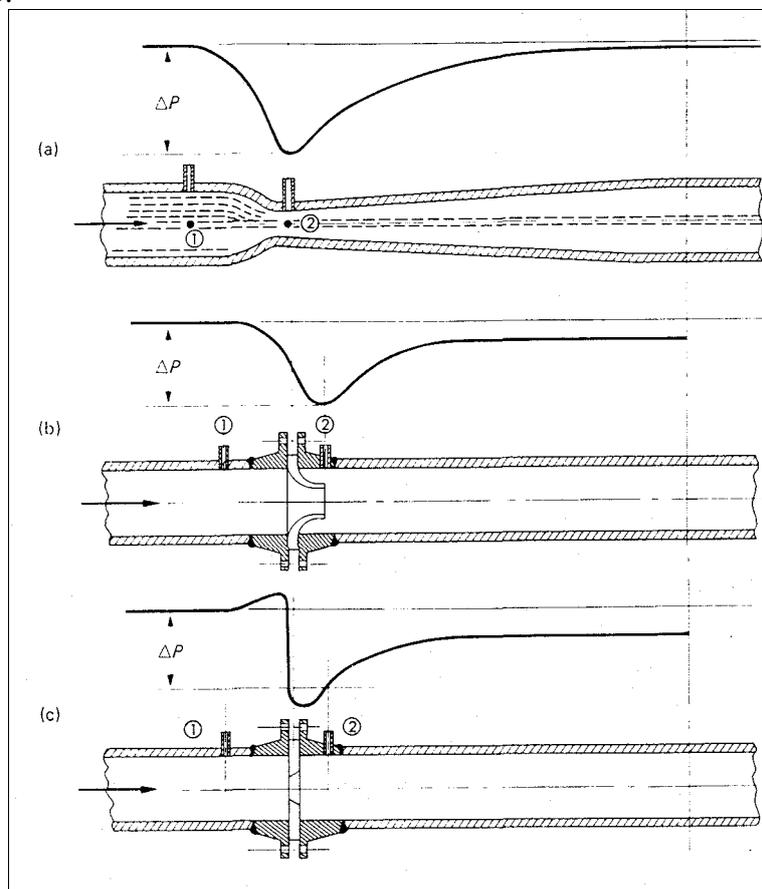
**(°) Misure di portata tramite dispositivi a strozzamento**

I dispositivi a strozzamento consentono di realizzare una misura della portata in un condotto tramite una misura di differenza di pressione tra due sezioni contigue, di differente area, del condotto. Il principio di funzionamento si basa sulla equazione di Bernoulli, e viene descritto nel seguito. Tali dispositivi si distinguono in: orifici, boccagli e tubi di Venturi, vedi Fig.8.

Clemens Herschel (1842-1930), basandosi sugli studi di Giovanni Venturi (1746-1822), propose per primo l'omonimo dispositivo per la misura di portata.

La differenza principale tra le tre categorie, oltre alle ovvie distinzioni costruttive, consiste nel differente recupero di pressione che si verifica a valle dello strozzamento, che è pressoché totale nel tubo di Venturi e minimo negli orifici. Le dimensioni ed i metodi di calcolo della portata sono prescritti da una serie di normative ANSI, ASME ed UNI/ISO. In particolare, la

normativa italiana è riportata nella CNR-UNI 10023, 1979, *Misure di portata di correnti fluide per mezzo di diaframmi, bocchagli o venturimetri inseriti su condotte in pressione a sezione circolare.*



**Figura 8:** Tipologie di dispositivi di misura di portata a strozzamento e relativo andamento della pressione: a) venturimetri, b) bocchagli, c) diaframmi o orifizi

**Funzionamento ideale dei dispositivi a strozzamento**

Il funzionamento ideale dei dispositivi a strozzamento è basato sulla equazione di continuità e sulla equazione di Bernoulli, applicate alla sezione del condotto, 1, supposta circolare di diametro  $D$ , ed alla sezione ristretta dello strozzamento, 2, anch'essa circolare di diametro  $d$ . Dall'equazione di continuità si ha

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2 \tag{5.31}$$

da cui, per un fluido incomprimibile

$$\frac{w_1}{w_2} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \tag{5.32}$$

Dalla equazione di Bernoulli, considerando il fluido incomprimibile, il condotto orizzontale, le perdite di carico nulle ed assenza di dispositivi di introduzione o di estrazione di energia, risulta:

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{w_2^2}{2g} \quad (5.33)$$

Combinando le due equazioni suddette, si ottiene che la portata ideale in un condotto percorso da un fluido incompressibile è ottenibile dalla differenza di pressione misurata nella forma:

$$G = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} \quad (5.34)$$

dove  $\Delta p = p_1 - p_2$  e  $\beta$  viene detto rapporto tra i diametri o rapporto di strozzamento ed è dato da

$$\beta = \frac{d}{D} \quad (5.35)$$

### **Funzionamento reale e relazione generale per il calcolo della portata**

Una serie di fattori rendono la teoria ideale inapplicabile. Tra di essi, la presenza di perdite di carico tra le due sezioni considerate, la contrazione della vena fluida, la localizzazione delle prese di pressione in zone di flusso disturbato. Del complesso di tali fattori si tiene conto tramite un coefficiente di scarico (*discharge coefficient*),  $C$ , definito come:

$$C = \frac{G_{ideale}}{G_{reale}} \quad (5.36)$$

tale coefficiente viene in genere determinato empiricamente, e le normative forniscono le relazioni per il suo calcolo per i diversi dispositivi e le diverse localizzazioni delle prese di pressione. Da notare che il coefficiente  $C$  è indipendente dal tipo di fluido considerato.

Nel caso che il fluido sia comprimibile, esso subisce una espansione (che in genere viene considerata adiabatica) tra la sezione a monte e lo strozzamento. Per tenere conto della variazione di densità del fluido, si introduce un ulteriore coefficiente,  $\varepsilon$ , detto coefficiente di comprimibilità, riportato anch'esso nelle normative, in cui compare il coefficiente di espansione isoentropica,  $k$ .

La relazione generale per il calcolo della portata tramite dispositivi di strozzamento risulta quindi

$$G = C \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} \quad (5.37)$$

### **ESEMPIO 5.19 – Misura della portata tramite un tubo di Venturi**

Tra ingresso e gola di un venturimetro, avente diametro nominale  $D = 203.2$  mm e diametro della sezione ristretta  $d = 101.6$  mm, in cui fluisce acqua a  $20$  °C, viene letta una differenza di pressione  $\Delta p = 7563$  Pa. Determinare la portata nel condotto.

La portata è espressa da

$$G = C \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}}$$

dove  $\varepsilon = 1$  perché il fluido è incompressibile, e dalla tabella CNR-UNI 10023 per i venturimetri si ha  $C = 0.97$ .

Il rapporto di strozzamento  $\beta$  vale 0.5. Quindi

$$G = C \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p \rho_1}{1 - \beta^4}} = 0.97 \frac{\pi 0.102^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 7563 \cdot 1000}{1 - 0.5^4}} = 31.8 \text{ kg/s}$$

□

### Appendice 6.1 - TABELLE

Fluido	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Acqua	998.2
Acqua marina	1025
Alcool etilico	806
Benzina auto	660-690
Glicerina	1270
Kerosene	800-840
Mercurio	13546
Petrolio greggio	800-920
Tetracloruro di carbonio	1594

**Tabella A-1:** Densità di alcuni liquidi a 20 °C.

FLUIDO							
Acqua, T (°C)	4	21	66	93	149	232	288
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000	997	979	962	917	826	735
$\mu$ (mPa s)	1.55	0.978	0.434	0.305	0.187	0.118	.0095
Olio leggero T (°C)	16	27	38	66	93	121	149
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	913	910	895	870	865	848	830
$\mu$ (mPa s)	86.6	41.4	22.8	7.88	3.72	2.07	1.24
Aria, T (°C)	0	38	93	204	427	816	1650
(p=1bar) $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1.296	1.136	0.96	0.735	0.503	0.323	0.183
$\mu$ (μPa s)	17.32	19.1	21.4	26.02	33.4	44.6	57.4

**Tabella A-2:** Viscosità e densità di alcuni fluidi in funzione della temperatura.

MATERIALE	
acciaio rivettato	900-9000
calcestruzzo	300-3000
ghisa	260
acciaio galvanizzato	150
acciaio commerciale, ferro fucinato	45
tubo trafilato	1.5
plastica, vetro	0 (liscio)

**Tabella A-3:** Rugosità media dei condotti in  $\mu\text{m}$  (valori indicativi).

Curva a 90°, brusca	1 - 1.35
Curva a 90°, raccordata	0.3 - 1
Curva a U	1.5
Restringimento di sezione (velocità valutata a monte)	0.5
Allargamento di sezione (velocità valutata a monte)	1
Ingresso in serbatoio	1
Uscita da serbatoio	1
Valvole completamente aperte	0.6-4
Valvole parzialmente aperte	2-20
Raccordo a T, passaggio dritto	1.0
Raccordo a T, diramazione	1.5
Raccordo a T, riunione	3.0

**Tabella A-4:** Coefficienti di perdita di carico concentrata (valori indicativi). In generale, le perdite per raccordi flangiati sono minori di quelle per raccordi filettati.

Diametro nominale (pollici)	Diametro esterno (mm)	Spessore (mm)	
		Standard	Extra Strong
½"	21.3	2.77	3.73
¾"	26.7	2.87	3.91
1"	33.4	3.38	4.55
1 ¼"	42.2	3.56	4.85
1 ½"	48.3	3.68	5.08
2"	60.3	3.91	5.54
2 ½"	73	5.16	7.01
3"	88.9	5.49	7.62
3 ½"	101.6	5.74	8.08
4"	114.3	6.02	8.56
5"	141.3	6.55	9.52
6"	168.3	7.11	10.97
8"	219.1	8.18	12.7
10"	273	9.27	12.7

**Tabella A-5:** Diametri dei tubi commerciali secondo ANSI B36.10-B36.19

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 5.1

Con riferimento all'Esempio 5.1, calcolare il numero di Reynolds, supponendo una viscosità di 1.1 mPa s.

$$[Re = 9.74 \times 10^6]$$

### ESERCIZIO 5.2

Uno scambiatore di calore è costituito da due tubi coassiali, di diametro esterno rispettivamente 50 e 100 mm e di spessore 2 mm; nell'intercapedine tra i tubi scorre acqua alla velocità media di 2.4 m/s ed alla temperatura media di 21 °C. Calcolare il diametro idraulico ed il numero di Reynolds.

$$[D_H = 46 \text{ mm}, Re = 112.5 \times 10^3]$$

### ESERCIZIO 5.3

Il camino di una centrale termoelettrica deve trasportare una portata volumetrica  $Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$  di fumi. Supponendo che il camino sia circolare e di adottare un valore della velocità media del fluido di 10 m/s, calcolare il diametro del camino. Assumendo una viscosità dei fumi di 25  $\mu\text{Pa s}$ , una densità degli stessi di  $0.83 \text{ kg/m}^3$ , una lunghezza del camino di 120 m ed una rugosità relativa del condotto di  $2 \times 10^{-6}$ , calcolare le perdite di carico distribuite nel camino.

$$[D = 6.18 \text{ m}, Re = 2.05 \times 10^6, \lambda = 0.010, h_a = 1.03 \text{ m}]$$

### ESERCIZIO 5.4

Un olio di viscosità 2 Pa s e densità  $900 \text{ kg/m}^3$  scorre in un tubo orizzontale di diametro 20 mm e lunghezza  $L = 4 \text{ m}$  alla velocità di 0.5 m/s, per effetto di una differenza di pressione  $\Delta p$ . Determinare  $\Delta p$ . Per quale valore della velocità il moto cessa di essere laminare?

$$[\Delta p = 320 \text{ kPa}, w = 222 \text{ m/s}]$$

### ESERCIZIO 5.5

Si determini il legame tra perdite di carico e diametro idraulico per moto turbolento in un tubo liscio, assumendo valida la legge di Blasius.

$$[h_a = K / D^{4.75}]$$

### ESERCIZIO 5.6

Con riferimento all'impianto di Fig.5 (impianto di sollevamento), determinare la portata di fluido che fuoriesce da una tubazione diritta di 20 mm di diametro che si estende dal serbatoio superiore fino a terra. Si assuma  $\lambda = 0.02$  e un livello di liquido di 2 m nel serbatoio superiore.

$$[w = 4.4 \text{ m/s}, G = 1.36 \text{ kg/s}]$$

### ESERCIZIO 5.7

Si devono pompare 10 L/s di olio di oliva ( $\mu = 82 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 918 \text{ kg/m}^3$ ) in una tubazione orizzontale lunga 30 m con una caduta di pressione massima di 30 kPa. Determinare il diametro minimo del tubo. (Suggerimento: supporre il moto laminare e verificare a posteriori).

$$[D = 75 \text{ mm}, Re = 1880]$$

### **ESERCIZIO 5.8**

Si deve pompare una portata  $G = 185 \text{ m}^3/\text{h}$  di kerosene ( $\mu = 80 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 820 \text{ kg/m}^3$ ) attraverso una tubazione di acciaio trafilato lunga 300 m con 3 gomiti a  $90^\circ$  in un serbatoio situato 20 m al di sopra di una pompa, che ha una pressione in uscita di 9 bar. Determinare il diametro minimo necessario per la tubazione. Si assuma  $\lambda = 0.04$ , verificando a posteriori che questo sia accettabile.

[0.13 m; il valore di  $\lambda$  calcolato a posteriori è approssimativamente 0.037]

### **ESERCIZIO 5.9**

Due serbatoi A e B sono connessi da una tubazione di acciaio di diametro 60 cm lunghezza 9000 m, che si suppone abbia  $\lambda = 0.02$ . A si trova ad una quota 45 m superiore a B. Le perdite di carico concentrate sono trascurabili.

- quale portata volumetrica fluisce da A a B in assenza di pompe?
- che potenza di pompaggio è necessaria per pompare  $0.625 \text{ m}^3/\text{s}$  da A a B?
- che potenza di pompaggio è necessaria per pompare  $0.625 \text{ m}^3/\text{s}$  da B ad A?
- Determinare il valore effettivo di  $\lambda$  nel caso precedente se la tubazione ha una rugosità  $\varepsilon = 900 \mu\text{m}$  (assumere  $\mu = 0.9 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).

[a)  $0.49 \text{ m}^3/\text{s}$ ; b) 29.7 m; c) 119.7 m; d) 0.022]

### **ESERCIZIO 5.10**

Viene proposto un acquedotto trans-Mediterraneo che trasporti orizzontalmente  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  di acqua dolce in un condotto di 5 m di diametro lungo 800 km. Considerando solo le perdite di carico distribuite, stimare la caduta di pressione e la potenza di pompaggio necessaria. Il condotto, dato il diametro elevato, può essere considerato idraulicamente liscio.

[ $h_a = 75 \text{ m}$ ,  $W_p = 15 \text{ MW}$ ]

### **ESERCIZIO 5.11**

Si pompano  $90 \text{ m}^3/\text{h}$  di olio ( $\mu = 400 \text{ mPa s}$ ,  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ) attraverso una tubazione orizzontale in acciaio di 100 mm di diametro ( $\varepsilon = 0.05$ ) lunga 100 m. Quale è la caduta di pressione? Quale diametro di tubazione bisognerebbe adottare per ridurre le perdite di carico ad 1/3 del valore precedente, mantenendo costante la portata?

[ $\Delta p = 408 \text{ kPa}$ , 0.1319 m]

### **ESERCIZIO 5.12**

La condotta forzata di una centrale idroelettrica trasporta acqua da un bacino per un dislivello di 900 m. Il tubo ha un diametro di 400 mm, una lunghezza di 1500 m e si contrae in fondo in un ugello ben rastremato di diametro 100 mm. Calcolare: a) la velocità di efflusso dall'ugello; b) la portata di acqua; c) la pressione prima della restrizione dell'ugello; d) la potenza meccanica teoricamente ottenibile dal getto di acqua (portata x energia cinetica specifica all'ugello) e) la potenza meccanica teoricamente disponibile (portata x variazione di energia potenziale specifica). Proporre un'azione correttiva per migliorare lo sfruttamento dell'energia disponibile.

Si assuma  $\lambda = 0.02$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e si trascurino le perdite concentrate.

[a) 118 m/s; b) 926 kg/s; c) 6.53 MPa rel.; d) 6.45 MW e) 8.17 MW]

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap.6. Le macchine termiche semplici e l'analisi di disponibilità

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.01 – 19.12.06.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione e definizioni preliminari

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio delle macchine termiche. Una *macchina termica motrice* può essere definita come un sistema termodinamico che, interagendo con l'ambiente, converte con continuità energia termica in energia meccanica. Per operare con continuità, la macchina deve generalmente essere *ciclica*, ossia ritornare periodicamente nello stato di partenza. Talune macchine termiche non sono effettivamente cicliche: ad esempio un motore a scoppio ritorna periodicamente nella configurazione di partenza, ma il suo fluido di lavoro, una volta subita la reazione di combustione, non ritorna più allo stato iniziale. Tuttavia, anche in questi casi, è possibile, con particolari accorgimenti, ricondursi allo studio di una macchina ciclica.

Si faccia attenzione a non confondere una macchina *ciclica* con una macchina *reversibile*: il fatto che il fluido di lavoro ritorni allo stato iniziale non implica che le trasformazioni siano reversibili (a tale scopo è richiesto che *anche l'ambiente* torni allo stato iniziale).

Per affrontare lo studio delle macchine termiche, è utile definire due sistemi ideali: il *serbatoio di energia termica* (SET) ed il *serbatoio di energia meccanica* (SEM).

Si definisce *serbatoio di energia termica* o *sorgente termica* un sistema di volume costante e di capacità termica infinita che scambia energia unicamente sotto forma di calore; detto trasferimento avviene a temperatura costante e con generazione entropica irreversibile nulla, ovvero:

$$T_{SET} = \text{cost}, V_{SET} = \text{cost}, \Delta S_{irr,SET} = 0 \quad (1)$$

un sistema di capacità termica molto grande (un lago, l'atmosfera) può essere assimilato a un SET. Anche una caldaia, e più in generale ogni sistema termostato, possono essere rappresentati come SET, in quanto l'energia termica che viene prelevata dal fluido è reintegrata continuamente dalla combustione (o da un'altra fonte di apporto di energia) e la temperatura non varia.

Notare come i termini *sorgente* e *serbatoio* riportino alla concezione, oggi superata, del calore come un fluido

Si definisce *serbatoio di energia meccanica* un sistema ideale atto a scambiare energia unicamente sotto forma di lavoro, con generazione entropica nulla, ovvero:

$$\Delta S_{irr,SEM} = 0 \quad (2)$$

## Formulazioni del secondo principio della termodinamica per le macchine cicliche.

Abbiamo già visto come il secondo principio della termodinamica, predicendo la "direzione" delle trasformazioni, ci indichi quali trasformazioni, tra tutte quelle consentite dal primo principio della termodinamica, possono realmente avvenire. E' ovvio dunque che tale principio ponga delle limitazioni anche alle trasformazioni che possono avvenire nelle macchine cicliche e detti alcune regole per il loro funzionamento. Di tutti gli enunciati del secondo principio, i due seguenti riguardano in particolare le macchine cicliche.

*Enunciato di Kelvin-Planck*

E' impossibile costruire una macchina termica (od un sistema di macchine termiche) *ciclica* il cui *unico* effetto sia la produzione di energia meccanica mediante assorbimento di calore da una sola sorgente.

*Enunciato di Clausius*

E' impossibile costruire una macchina termica (od un sistema di macchine termiche) *ciclica* il cui *unico* effetto sia il trasferimento di calore da una sorgente più fredda ad una più calda.

Entrambi gli enunciati contengono le parole chiave “ciclico” e “unico”, che sono fondamentali: è infatti possibile costruire macchine termiche *non cicliche* che violino entrambi gli enunciati, o macchine cicliche per cui la violazione degli enunciati non è *l'unico* effetto.

Si potrebbe facilmente dimostrare che una volta costruita una macchina che viola l'enunciato di Kelvin-Planck (“macchina anti-Planck”), si potrebbe costruire anche una “macchina anti-Clausius” e viceversa.

E' da notare a questo punto che esistono anche *macchine cicliche inverse od operatrici*, che *assorbendo* energia meccanica, realizzano il trasferimento di energia termica da una sorgente termica più fredda ad una più calda, ovvero ciò che l'enunciato di Clausius proibisce che avvenga *spontaneamente*. Nel caso di tali macchine, il trasferimento di calore non è l'unico risultato, essendo accompagnato dall'assorbimento di energia meccanica.

Tutti gli enunciati del secondo principio della termodinamica sono formulati in maniera negativa: è impossibile che ... Teoricamente, quindi, basterebbe una sola controprova per confutarli.

Nel corso di questo capitolo, delineeremo anche come il secondo principio ci sia di aiuto nel:

1. determinare le migliori prestazioni teoriche delle macchine termiche cicliche;
2. nella valutazione quantitativa dei fattori che precludono l'ottenimento delle migliori prestazioni.

Tali considerazioni costituiscono la base della cosiddetta *analisi di disponibilità (o analisi exergetica)* che verrà accennata nell'ultima parte di questo capitolo.

Nel seguito, per maggiore chiarezza, stabiliremo di volta in volta tramite uno schema la direzione positiva del calore e del lavoro scambiato, ed indicheremo gli stessi come valori assoluti. In particolare, indicheremo con  $|W_{TC}|$  la potenza termica assorbita dalle sorgenti “calde” e con  $|W_{TF}|$  quella ceduta alle sorgenti “fredde”.

**Macchine termiche che scambiano calore con una sola sorgente**

Una macchina di questo tipo interagisce con un solo SET ed un solo SEM. Tuttavia, l'enunciato di Kelvin-Planck nega l'esistenza di una macchina che produca lavoro scambiando calore con una sola sorgente. Verifichiamo questo alla luce dei bilanci di energia e di entropia.

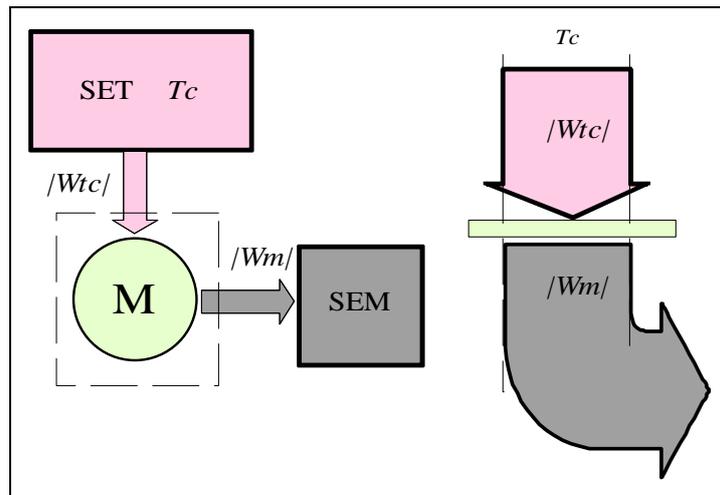
Per tale macchina (vedi Fig.1) il bilancio di energia si riduce a

$$0 = |W_{TC}| - |W_M| \tag{3}$$

mentre quello entropico diviene:

$$0 = \frac{|W_{TC}|}{T_C} + \dot{S}_{irr} \quad (4)$$

il che, essendo entrambi i termini a secondo membro positivi, è manifestamente impossibile. Tuttavia non è impossibile il contrario, ossia costruire una macchina che assorba lavoro cedendo calore ad una sola sorgente. Basta riconsiderare il caso precedente cambiando segno ad entrambi gli scambi. Una macchina di tale tipo viene detta *totalmente dissipativa* ed un freno ne costituisce un esempio pratico.



**Figura 1:** Schema di funzionamento e flusso di energia in una macchina semplice motrice che interagisce con una sola sorgente (il funzionamento è impossibile).

### Macchina termica semplice motrice

In forza di quanto detto, per potere funzionare una macchina termica deve scambiare calore con almeno due SET, cedendo energia meccanica ad un SEM. Una macchina che scambia calore con due sole sorgenti termiche viene quindi detta *macchina semplice*. Il suo ciclo termodinamico è costituito quindi da due isoterme a temperatura diversa, in cui avvengono gli scambi termici, raccordate da altre due trasformazioni che non possono essere altro che adiabatiche.

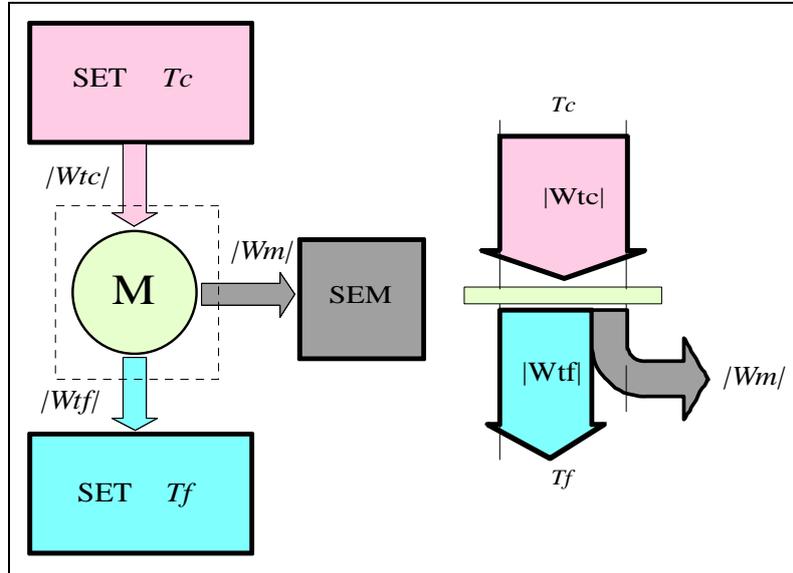
Se così non fosse, la macchina scambierebbe calore anche con altre sorgenti a temperatura diversa dai due SET e quindi non sarebbe più una macchina semplice.

Per tale macchina (v. Fig.2) i bilanci di energia e di entropia assumono la forma:

$$0 = |W_{TC}| - |W_{TF}| - |W_M|$$

$$0 = \frac{|W_{TC}|}{T_C} - \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \quad (5)$$

Notare che il senso degli scambi di calore non può essere invertito: se la macchina assorbisse calore dalla sorgente fredda e lo cedesse alla sorgente calda, cedendo nel contempo energia meccanica all'esterno, il secondo principio della termodinamica sarebbe violato. La dimostrazione è riportata in App.1.



**Figura 2:** Schema di funzionamento e flusso di energia nella macchina semplice motrice.

Si definisce inoltre *rendimento*  $\eta$  di una macchina termica il rapporto tra l'effetto utile (il lavoro o la potenza meccanica ottenuta) e la spesa per produrlo (ovvero il calore o la potenza termica fornita alla macchina). Esso si può facilmente calcolare dalle equazioni precedenti:

$$\begin{aligned} |W_M| &= |W_{TC}| - |W_{TF}| \\ \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} &= \frac{T_F}{T_C} + \frac{T_F \dot{S}_{irr}}{|W_{TC}|} \end{aligned} \quad (6)$$

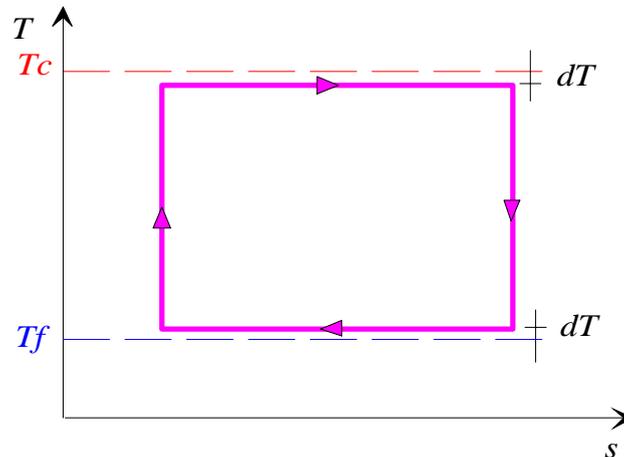
$$\eta = \frac{|W_M|}{|W_{TC}|} = \frac{|W_{TC}| - |W_{TF}|}{|W_{TC}|} = 1 - \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F \dot{S}_{irr}}{|W_{TC}|} \quad (7)$$

Da cui si vede che il rendimento è compreso tra 0 ed 1. In particolare, se la macchina semplice è anche reversibile, il rendimento assume la forma:

$$\eta_{REV} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (8)$$

La macchina semplice reversibile viene detta anche *macchina di Carnot*. Il suo ciclo termodinamico è rappresentato sul diagramma  $T-s$  in Fig.3. In questo caso, le due trasformazioni adiabatiche, essendo anche reversibili, divengono isoentropiche ed il ciclo ha la forma di un rettangolo. Affinché gli scambi di calore possano effettivamente avvenire nel senso prescritto, la trasformazione isoterma a temperatura  $T_C$  deve avvenire ad una

temperatura inferiore di almeno una quantità infinitesima  $dT$  a quella del SET (nel computo del rendimento, questa differenza infinitesima viene fatta idealmente tendere a zero). L'opposto deve naturalmente avvenire per la trasformazione alla temperatura  $T_F$ : in tal modo, il calore può effettivamente essere trasferito dal fluido alla sorgente fredda.



**Figura 3:** Ciclo termodinamico della macchina semplice motrice reversibile (macchina di Carnot).

Il francese Sadi Carnot (1796-1832) teorizzò il funzionamento di tale macchina nel 1824 nel suo famoso saggio *“Sulla Potenza Motrice del Fuoco”*, sorprendentemente avanzato rispetto ai tempi in cui fu scritto: i principi della termodinamica ricevettero infatti un assetto definitivo soltanto verso la fine dell'800. Carnot morì di colera a 36 anni, ed in ottemperanza alle norme igieniche vigenti, tutti i suoi beni personali, compresi i suoi ultimi appunti scientifici, vennero bruciati.

E' utile notare alcune proprietà della macchina di Carnot:

- Il suo rendimento è indipendente dal fluido di lavoro;
- A *parità di temperature estreme di lavoro*, nessuna macchina può avere un rendimento superiore alla macchina di Carnot (la dimostrazione verrà data in seguito).

In pratica, qualunque macchina reale ha un rendimento minore della macchina di Carnot che opera tra le medesime temperature estreme, per due motivi:

- il suo ciclo ideale (detto ciclo di riferimento) non è quello di Carnot;
- le trasformazioni presentano nella realtà un certo grado di irreversibilità che riduce ulteriormente il rendimento.

A causa delle difficoltà tecniche che si frappongono, la macchina semplice (e tantomeno la macchina di Carnot) non è mai stata realizzata in pratica. Peraltro, lo stesso Carnot, con grande spirito ingegneristico, scriveva riguardo a tale macchina nel suo libro: *“I tentativi per raggiungere queste prestazioni potrebbero essere più dannosi che utili, se si trascurano altre importanti considerazioni”*. Nel seguito, egli identificava i principali meriti di una macchina termica: sicurezza, solidità, minimi ingombri e costo.

E' utile rimarcare che la parola rendimento, applicata in questo contesto, non deve trarre in inganno: di solito il concetto di rendimento viene associato ad un limite *tecnologico*, ovvero

al fatto che le imperfezioni costruttive precludono il raggiungimento della massima efficienza (è questo il caso, ad esempio, del rendimento isoentropico di una turbina, definito nel Cap.5). In questo caso tuttavia il rendimento di una macchina termica rappresenta un limite *fisico*: nessuna macchina, per quanto perfetta dal punto di vista tecnologico, può superarlo senza infrangere il secondo principio della termodinamica.

In questo contesto, è utile definire anche un *rendimento di secondo principio*, ovvero il rapporto tra il rendimento della macchina e quello della macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature estreme

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{REV}} \quad (9)$$

Il rendimento di secondo principio può (anche se solo idealmente) raggiungere il valore 1.

### ***ESEMPIO 7.1 - Rendimento di un ciclo a vapore.***

Una centrale termoelettrica operante con un ciclo a vapore produce una potenza elettrica di 1200 MW e riversa nell'ambiente esterno a 35 °C una potenza termica di 1530 MW. La temperatura massima del vapore è di 550 °C. Valutare i rendimenti di primo e secondo principio.

Il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{|W_M|}{|W_{TC}|} = \frac{|W_M|}{|W_M| + |W_{TF}|} = \frac{1200}{1200 + 1530} = 0.44$$

per valutare il rendimento di secondo principio, bisogna calcolare il rendimento della macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature estreme (ossia 35 °C e 550 °C)

$$\eta_{REV} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{308.15}{823.15} = 0.626$$

(notare che è indispensabile convertire le temperature in K). Si ha quindi

$$\varepsilon = \frac{0.44}{0.626} = 0.70$$

□

### ***Metodi e motivazioni per aumentare il rendimento delle macchine termiche.***

Alla luce di quanto visto, è utile passare in rassegna le possibilità di aumentare il rendimento di una macchina e le motivazioni che ci spingono a farlo. Tali considerazioni, sebbene riferite per ora alla sola macchina semplice, valgono qualitativamente per qualunque macchina ciclica. Bisogna tenere presente che, allo stato attuale, nella maggioranza dei casi l'energia termica necessaria al funzionamento della macchina viene prodotta tramite la *combustione* di un combustibile, e questo apre una serie molto articolata di problematiche, che possono qui essere discusse solo per sommi capi.

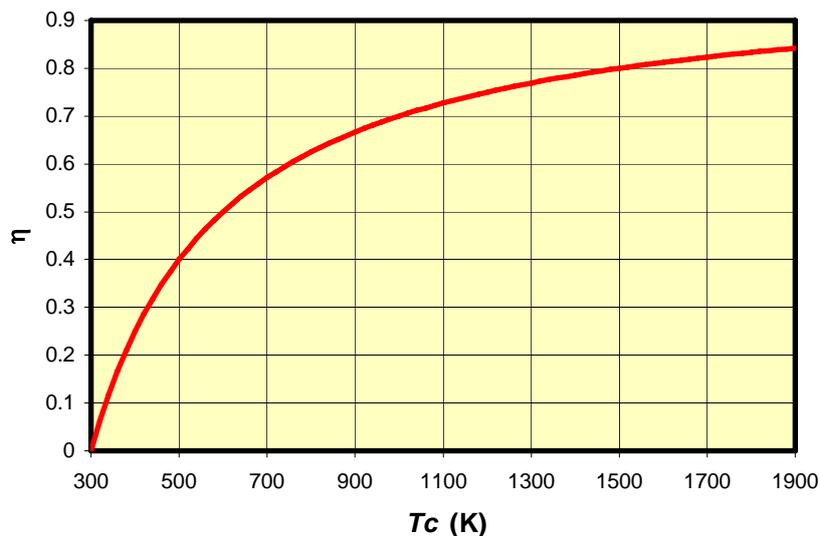
- Innanzitutto ogni combustibile ha un *costo*, che si ripercuote su quello dell'energia prodotta;
- inoltre la reazione combustione produce una serie di *inquinanti atmosferici* (attualmente, quelli che ci preoccupano di più sono l'anidride carbonica, principale responsabile dell'effetto serra, e l'ossido di azoto);

- infine, i combustibili più usati attualmente, i cosiddetti *combustibili fossili* (carbone, petrolio, metano) vengono estratti dalle riserve accumulate sulla terra nel corso di milioni di anni e sono pertanto *soggetti ad esaurimento*.

Aumentare il rendimento di una macchina vuol dire ridurre i suoi consumi di combustibile *a parità di energia utile prodotta*, e quindi mitigare le problematiche accennate in precedenza.

I metodi per aumentare il rendimento di primo principio sono in sintesi i seguenti.

- Riduzione delle irreversibilità. Bisogna tenere conto tuttavia che la riduzione delle irreversibilità implica generalmente un miglioramento tecnologico della macchina, i cui costi possono superare i benefici in termini di risparmio di combustibile.
- Aumento della temperatura superiore del ciclo: questo implica un miglioramento dei materiali di cui sono costituite le pareti della macchina, o l'introduzione di sistemi di raffreddamento, ed anche in questo caso i costi possono superare i benefici: si parla pertanto di limite *tecnico-economico*. Attualmente, con particolari accorgimenti tecnici, si possono raggiungere temperature stazionarie superiori del ciclo di circa 1350 °C, che crescono ulteriormente nel caso di motori a regime periodico, come il motore a scoppio. La Fig.4 riporta la variazione del rendimento della macchina di Carnot con la temperatura superiore del ciclo, per una temperatura inferiore fissata di 300 K.



**Figura 4:** Rendimento della macchina di Carnot; la temperatura della sorgente fredda, ovvero dell'ambiente, è fissata a 300 K.

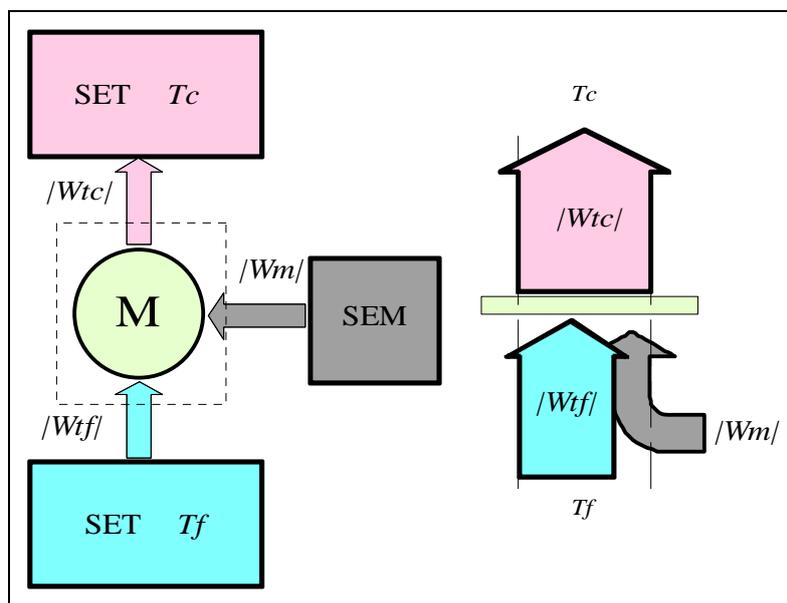
- Diminuzione della temperatura inferiore del ciclo: in genere, le macchine termiche cedono calore all'ambiente esterno, la cui temperatura non è regolabile. Sebbene, in linea teorica, sarebbe possibile refrigerare l'ambiente con una macchina frigorifera, è facile convincersi che il lavoro assorbito da quest'ultima macchina sarebbe superiore all'incremento di lavoro della macchina motrice. Questa soluzione non è quindi praticabile; non di meno, il rendimento delle macchine termiche aumenta di fatto in inverno od in ambienti molto freddi.

**Parametri principali per la valutazione di una macchina termica**

A conclusione del paragrafo, indichiamo brevemente quali sono i principali parametri che bisogna tenere in considerazione nel valutare le prestazioni di una macchina termica motrice:

- Rendimento di primo principio: caratterizza la macchina dal punto di vista economico, dando una indicazione sul costo (sia in termini economici che ambientali) del combustibile per il suo funzionamento. Tuttavia, macchine a rendimento superiore possono richiedere soluzioni tecnologiche più sofisticate ed avere quindi costi di investimento e manutenzione superiori, e non rivelarsi quindi vantaggiose.
- Rendimento di secondo principio: indica se la macchina sfrutta razionalmente l'energia, ossia se il suo rendimento è vicino al massimo teoricamente raggiungibile o meno.
- Temperatura massima del ciclo: pone dei requisiti sui materiali o sugli eventuali sistemi di raffreddamento dei componenti della macchina; in altri termini ci dice se la macchina è realizzabile o meno e se i relativi costi sono accettabili.
- Consumo specifico di fluido o portata massica unitaria (PMU): portata di fluido necessaria per ottenere la potenza unitaria (espressa in kg/s/W, oppure kg/J): caratterizza le dimensioni della macchina dando quindi un'idea del peso e del costo. Macchine della stessa tipologia con minori portate massiche unitarie richiedono, a parità di potenza, portate minori e quindi sono in linea di massima più leggere e meno ingombranti.

**Macchina semplice operatrice**



**Figura 5:** Schema di funzionamento e flusso di energia nella macchina semplice operatrice.

Come già accennato, la macchina termica operatrice (od inversa) trasferisce calore dalla sorgente fredda a quella calda assorbendo potenza meccanica: il relativo schema è riportato in Fig.5.

Il ciclo di lavoro è anche in questo caso costituito da due isoterme e due adiabatiche; nel caso di irreversibilità nulle, esso è riportato sul piano  $T-s$  in Fig.6. Si noti che in questo caso il

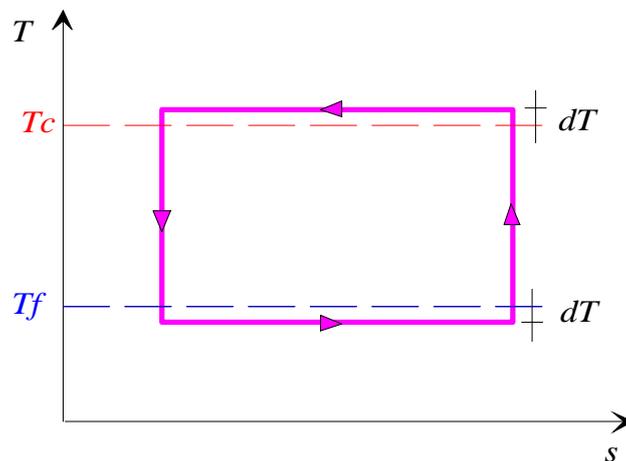
ciclo viene percorso in senso antiorario, dato che la macchina assorbe energia meccanica; l'isoterma superiore deve trovarsi ad una temperatura superiore di almeno un infinitesimo  $dT$  a  $T_C$  per consentire che lo scambio termico avvenga nel verso ipotizzato (cessione di calore alla sorgente calda), mentre l'opposto deve avvenire per l'isoterma inferiore.

Convenzionalmente, si parla di *macchina frigorifera* se la temperatura ambiente corrisponde a quella *superiore* del ciclo, e di *pompa di calore* se la temperatura ambiente corrisponde a quella *inferiore* del ciclo.

Il funzionamento e gli schemi delle due macchine sono identici, cambia solo la definizione del coefficiente di prestazione, che verrà data in seguito.

### Macchina frigorifera

Le macchine frigorifere vengono usate per mantenere un locale a temperatura inferiore a quella dell'ambiente circostante, "pompando fuori" l'energia termica che "filtra" comunque attraverso le pareti (nonostante queste ultime siano in genere costituite di materiali termicamente isolanti). Nella pratica, esse trovano impiego nella refrigerazione domestica ed industriale e nel condizionamento estivo dei locali.



**Figura 6:** Ciclo termodinamico della macchina semplice operatrice reversibile.

Come già accennato, la macchina semplice frigorifera lavora secondo lo schema di Fig.5, in cui  $T_C=T_{amb}$ . Il primo e secondo principio si scrivono dunque nella forma:

$$\begin{aligned} 0 &= -|W_{TC}| + |W_{TF}| + |W_M| \\ 0 &= -\frac{|W_{TC}|}{T_C} + \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (10)$$

per valutare le prestazioni della macchina si introduce il coefficiente di prestazione (*COP*, acronimo dell'inglese *coefficient of performance*). In questo caso, l'effetto utile che si vuole ottenere è l'asportazione di calore dalla sorgente fredda, mentre la spesa è rappresentata dalla potenza meccanica assorbita, per cui

$$COP_f = \frac{|W_{TF}|}{|W_M|} = \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}| - |W_{TF}|} \quad (11)$$

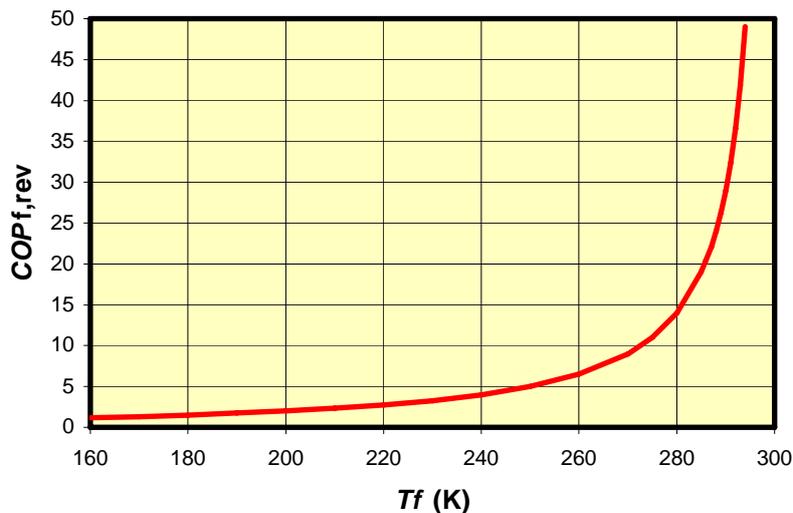
E' ovvio che le prestazioni della macchina sono tanto migliori quanto maggiore è il  $COP_f$ . Con una procedura analoga a quella seguita per la macchina motrice, l'espressione del  $COP_f$  può essere ottenuta ricavando  $W_{TC}$  dalla seconda delle equazioni di bilancio e sostituendola nella prima

$$COP_f = \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1 + \frac{T_C \dot{S}_{irr}}{|W_{TF}|}} \quad (12)$$

da cui si vede che il  $COP_f$  diminuisce all'aumentare della irreversibilità del ciclo. Nel caso di macchina reversibile la relazione diviene

$$COP_{f,REV} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad (13)$$

Per una macchina frigorifera reversibile, la variazione del  $COP_{f,REV}$  con la temperatura inferiore del ciclo (la superiore è quella ambiente, fissata a 300 K) è riportata in Fig.7. Da essa si ricava che il  $COP_{f,REV}$  può variare da 0 ad infinito e diminuisce al crescere della differenza di temperatura, presentando un asintoto verticale quando le temperatura della sorgente fredda va a coincidere con quella della sorgente calda, condizione nella quale la potenza meccanica tende a zero.



**Figura 7:** Coefficiente di prestazione della macchina frigorifera reversibile; la temperatura della sorgente calda, ovvero dell'ambiente, è fissata a 300 K.

**ESEMPIO 7.2 - Macchina frigorifera.**

Una macchina frigorifera sottrae 220 kW da una cella frigorifera mantenuta a -5 °C, cedendo calore all'ambiente esterno a 22 °C. La potenza meccanica richiesta è di 88 kW. Determinare il COP della macchina e confrontarlo con quello della macchina ideale che opera tra le stesse temperature.

Il COP del ciclo frigorifero è dato da

$$COP_f = \frac{|W_{TF}|}{|W_M|} = \frac{220}{88} = 2.5$$

il COP della macchina semplice ideale che opera tra le stesse temperature estreme è

$$COP_{f,rev} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{268}{295 - 268} = 9.9$$

(notare che è indispensabile convertire le temperature in K). Si ha quindi

$$\psi = \frac{COP_f}{COP_{f,rev}} = \frac{2.5}{9.9} = 0.25$$

□

**Pompa di calore**

Una pompa di calore può essere usata come dispositivo di riscaldamento, prelevando calore dall'ambiente esterno freddo e "pomandolo" in un locale a temperatura maggiore. La macchina semplice lavora secondo lo schema di Fig.5, in cui  $T_F = T_{amb}$ . Da tale figura risulta evidente il vantaggio di tale macchina rispetto ad un impianto di riscaldamento convenzionale: una parte dell'energia termica che viene riversata nel locale viene infatti prelevata dall'ambiente esterno ed è, per così dire, "gratuita".

Taluni impianti di condizionamento sono reversibili e di inverno operano come pompe di calore riscaldando i locali in cui sono installati. Nella pratica, il vantaggio energetico di tali impianti è bilanciato da un elevato costo di investimento rispetto ai convenzionali impianti di riscaldamento, e questo rende ragione della loro limitata diffusione.

Il primo e secondo principio si scrivono nella stessa forma della macchina frigorifera:

$$\begin{aligned} 0 &= -|W_{TC}| + |W_{TF}| + |W_M| \\ 0 &= -\frac{|W_{TC}|}{T_C} + \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \tag{14}$$

In questo caso, l'effetto utile che si vuole ottenere è la cessione di calore alla sorgente calda, mentre la spesa è rappresentata sempre dalla potenza meccanica assorbita, per cui il  $COP_p$  è definito come

$$COP_p = \frac{|W_{TC}|}{|W_M|} = \frac{|W_{TC}|}{|W_{TC}| - |W_{TF}|} \tag{15}$$

L'espressione del  $COP_p$  può essere ottenuta con una procedura analoga alle precedenti

$$COP_p = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C} + \frac{T_F \dot{S}_{irr}}{|W_{TC}|}} \quad (16)$$

da cui si vede che il  $COP_p$  diminuisce all'aumentare della irreversibilità del ciclo. Per una pompa di calore reversibile si ha

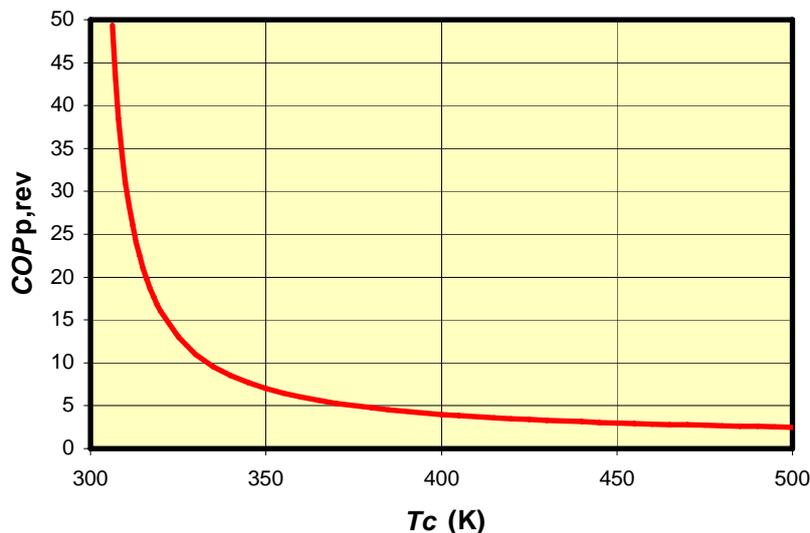
$$COP_{p,REV} = \frac{T_C}{T_C - T_F} \quad (17)$$

la variazione del  $COP_{p,REV}$  con la temperatura superiore del ciclo (la inferiore è quella ambiente, fissata a 300 K) è riportata in Fig.8. Da essa si ricava che il  $COP_{p,REV}$  può variare da infinito ad 1 (ha un asintoto orizzontale quando la temperatura calda tende ad infinito) e diminuisce al crescere della differenza di temperatura; presentando un asintoto verticale quando le temperatura della sorgente calda va a coincidere con quella della sorgente fredda (condizione in cui la potenza meccanica assorbita tende a zero).

In maniera analoga a quanto fatto per le macchine motrici, anche per quelle inverse (siano esse frigorifere o pompe di calore) si può definire *un coefficiente di prestazione di secondo principio*, ovvero il rapporto tra il  $COP$  effettivo e quello della macchina semplice reversibile che opera tra le medesime temperature estreme:

$$\psi = \frac{COP}{COP_{REV}} \quad (18)$$

che caratterizza la “bontà” della macchina reale rispetto alla migliore teoricamente realizzabile.



**Figura 8:** Coefficiente di prestazione della pompa di calore reversibile; la temperatura della sorgente fredda, ovvero dell'ambiente, è fissata a 300 K.

**ESEMPIO 7.3 - Pompa di calore.**

Un edificio richiede 1250 MJ al giorno per mantenersi a 21 °C con una temperatura esterna di 10 °C. Determinare la minima potenza meccanica teorica per una pompa di calore destinata a questo compito.

La potenza termica da fornire all'edificio è

$$|W_{TC}| = \frac{1250 \cdot 10^6}{86400} = 14.47 \text{ kW}$$

Il  $COP_{p,rev}$  della pompa di calore semplice reversibile è dato da

$$COP_{p,rev} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{294}{294 - 283} = 26.7$$

(notare che è indispensabile convertire le temperature in K). Si ha quindi

$$COP_{p,rev} = \frac{|W_{TC}|}{|W_M|} \Rightarrow |W_M| = \frac{|W_{TC}|}{COP_{p,rev}} = \frac{14470}{26.7} = 542 \text{ W}$$

la rimanente potenza termica (13.9 kW) viene “pompatà” dalla sorgente fredda. Le pompe di calore tecnicamente realizzabili hanno  $COP$  effettivi assai inferiori (3-5).



## Cenni all'analisi di disponibilità

### Introduzione

Nella prima parte di questo capitolo abbiamo sfruttato il secondo principio della termodinamica per determinare la massima quantità di lavoro meccanico ottenibile da un processo *ciclico*; intendiamo ora generalizzare queste considerazioni ad un processo *qualunque*. Questo tipo di studio prende il nome di *analisi di disponibilità* (*availability analysis*) o *anche analisi exergetica*, anche se per alcuni questo secondo termine dovrebbe essere limitato ai sistemi aperti a regime.

Per chiarire il concetto di *disponibilità* dell'energia facciamo il seguente esempio: consideriamo un sistema *isolato* costituito da due porzioni distinte: una bombola chiusa contenente aria ad alta pressione e temperatura, e da aria a pressione e temperatura ambiente che circonda la bombola (notare che anche questa seconda porzione fa parte del sistema). Se apriamo il volantino della bombola, il sistema si porterà alla fine in una condizione di equilibrio in cui pressione e temperatura sono uniformi nella bombola e nello spazio circostante. I due principi della termodinamica, enunciati nella forma di Clausius nel primo capitolo, ci dicono che *l'entropia* del nostro sistema isolato tende ad un *massimo*, raggiunto il quale ogni trasformazione si arresta, mentre *l'energia* rimane *costante*. Eppure una volta che la nostra trasformazione si è compiuta ed il sistema ha raggiunto l'equilibrio, intuiamo di avere perduto irrimediabilmente qualcosa: avremmo potuto utilizzare l'energia del gas contenuto nella bombola per ottenere lavoro da una turbina, e adesso non possiamo più. In altre parole, l'energia contenuta nella bombola non è *scomparsa*, ma non è più *disponibile* per produrre lavoro.

Questo risponde ad una delle domande più giustificate ed ingenue, e quindi terribili, che gli studenti prima o poi si pongono: se l'energia si conserva, come è che noi la consumiamo? In realtà ciò che consumiamo è la *disponibilità*, non l'*energia*. Per la stessa ragione non possiamo utilizzare le grandi quantità di energia contenute nel mare o nell'atmosfera per produrre lavoro: tale energia, come vedremo in seguito, è infatti *indisponibile*.

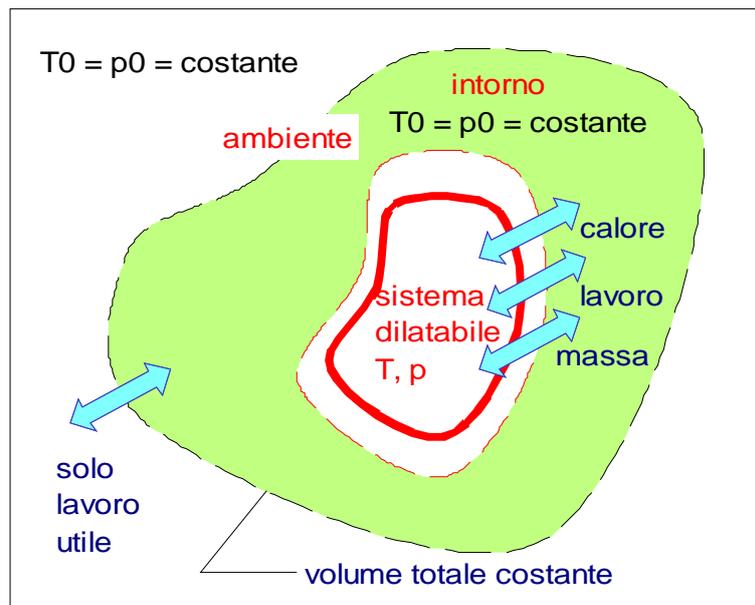
L'analisi di disponibilità riveste grande importanza nello sviluppare sistemi che utilizzino efficientemente e razionalmente le risorse energetiche. Via via che tali risorse vengono utilizzate, la loro energia non va perduta (essa si ritrova in ultima analisi nel riscaldamento dell'ambiente), ma la loro disponibilità viene distrutta. L'analisi di disponibilità dà risposta principalmente alle domande seguenti

- Quale è la massima quantità di lavoro utile che posso ottenere da una risorsa energetica?
- Dato che a causa delle irreversibilità otterrò sicuramente meno lavoro del massimo teorico, dove e in quale misura sono localizzati gli sprechi nell'utilizzo di tale risorsa?

E' evidente che la risposta alla seconda domanda fornisce i criteri per migliorare il progetto dei sistemi termodinamici e guida le azioni volte al loro miglioramento.

La disponibilità della energia dipende dalla esistenza di differenze di temperatura, pressione, energia cinetica e potenziale, che possono essere sfruttati per produrre lavoro mentre il sistema si porta in equilibrio con la parte di ambiente che lo circonda: è pertanto evidente che essa va valutata rispetto una condizione di riferimento circostante. Generalmente si assume per tale stato quello della pressione e della temperatura ambiente: Dato che temperatura e pressione ambiente hanno una certa variabilità, convenzionalmente si assume  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar}$  e  $T_0 = 25 \text{ °C}$ . E' chiaro che un sistema (o una porzione di sistema) in tali condizioni,

avendo annullato ogni forma di gradiente e di energia cinetica o potenziale, non è più in grado di produrre lavoro e pertanto tale stato si definisce *stato morto* (*dead state*). Nel seguito faremo anche uso del concetto di *intorno* (*surroundings*) di un sistema: questo è inteso come la parte di ambiente immediatamente circostante al sistema, in cui si risentono gli effetti delle trasformazioni subite dal sistema stesso. Si assume che *unicamente lavoro meccanico tecnicamente utilizzabile* possa fluire dall'*intorno* all'*ambiente* e che le irreversibilità siano localizzate unicamente all'interno del sistema e del suo intorno. Inoltre si assume che il volume totale del sistema più il suo intorno si mantenga costante e che l'intorno si mantenga a pressione e temperatura costanti ( $p_0, T_0$ ) (v. Fig.9).



**Figura 9:** Intorno di un sistema: da esso fuoriesce solo il lavoro meccanico utile.

In pratica, con il concetto di *intorno* dividiamo ulteriormente l'ambiente (o esterno) in due parti, riconoscendo che siamo interessati a trasportare al di fuori dell'intorno solo gli effetti meccanici utili. Gli altri effetti delle trasformazioni del sistema (scambio termico e irreversibilità) rimangono confinati nell'intorno: la superficie che divide l'intorno dall'ambiente esterno è pertanto adiabatica. La parte di ambiente al di fuori dell'intorno è quindi un serbatoio di energia meccanica.

**Definizione di disponibilità e sua espressione.**

Si definisce *disponibilità* la massima quantità di lavoro meccanico tecnicamente utilizzabile che può essere prodotta da un sistema mentre esso si porta in equilibrio termico e meccanico con il suo intorno, ovvero raggiunge lo stato morto. Per determinare la sua espressione, facciamo uso combinato delle equazioni di bilancio per un sistema chiuso scritte nella forma di energia totale [J], applicandole al *sistema combinato* (*chiuso*) costituito dal sistema oggetto di studio e dal suo intorno.

Tale sistema è per definizione adiabatico per cui

$$\begin{aligned}\Delta E_{tot} &= (U_0 - U - E_c - E_p) + \Delta U_{int} = -L \\ \Delta S_{tot} &= (S_0 - S) + \Delta S_{int} = \Delta S_s\end{aligned}\quad (19)$$

dove il suffisso *tot* si riferisce al sistema combinato, *int* all'intorno, *0* allo stato morto e abbiamo sfruttato il fatto che l'intorno non subisce variazioni di energia cinetica e potenziale e che le variazioni di energia interna e di entropia sono additive.

Per la prima equazione di Gibbs applicata all'intorno abbiamo

$$T_0 \Delta S_{int} = \Delta U_{int} + p_0 \Delta V_{int} \quad (20)$$

da cui, sfruttando la seconda delle (19) si ha

$$\Delta U_{int} = T_0 \Delta S_{int} - p_0 \Delta V_{int} = T_0 \Delta S_s - T_0 (S_0 - S) - p_0 \Delta V_{int} \quad (21)$$

e sostituendo nella prima delle (19) cambiata di segno si ottiene infine

$$L = (U + E_c + E_p - U_0) + p_0 \Delta V_{int} - T_0 (S - S_0) - T_0 \Delta S_s \quad (22)$$

rimane da eliminare la variazione di volume dell'intorno, il che si ottiene facilmente ricordando che il volume totale del sistema combinato è per definizione costante, per cui

$$(V_0 - V) + \Delta V_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{int} = (V - V_0) \quad (23)$$

Dove è opportuno notare che  $V_0$  rappresenta il volume del sistema una volta che ha raggiunto l'equilibrio con lo stato morto.

Da cui si ottiene infine

$$L = (U + E_c + E_p - U_0) - T_0 (S - S_0) - p_0 (V_0 - V) - T_0 \Delta S_s \quad (24)$$

E' evidente che, essendo l'ultimo termine (il termine di irreversibilità) positivo o nullo, il massimo lavoro si avrà in assenza di irreversibilità e questo definisce la disponibilità, che indichiamo con  $A$

$$A = L_{max} = (U + E_c + E_p - U_0) - T_0 (S - S_0) - p_0 (V_0 - V) \quad (25)$$

La equazione suddetta afferma una cosa abbastanza ovvia: il lavoro massimo ottenibile da una trasformazione che porta un sistema allo stato morto si verifica in condizioni reversibili ed è dato da tre termini: la variazione di energia totale (iniziale-finale), meno il calore ceduto reversibilmente all'intorno per raggiungere l'equilibrio con esso, meno il lavoro connesso alla dilatazione del sistema (positivo se  $V_0 > V$ , ovvero quando il sistema si dilata per raggiungere l'equilibrio), che essendo fatto sull'intorno, non è tecnicamente utilizzabile all'esterno di esso.

La disponibilità, fin quando  $T_0$  e  $p_0$  rimangono costanti, è una funzione di stato estensiva e può quindi anche essere espressa per unità di massa come

$$a = \frac{A}{M} = (u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) \quad (26)$$

possiamo quindi scrivere che per unità di massa il lavoro ottenuto in una trasformazione reversibile o meno che porta allo stato morto è dato da

$$l = a - T_0 \Delta s_s \quad (27)$$

Da questa relazione risulta chiaro il ruolo delle irreversibilità nel ridurre il lavoro ottenuto da una trasformazione ed in ultima analisi nel *distruggere la disponibilità*. Si può anche vedere che il lavoro perduto è legato al termine di irreversibilità da

$$l_{perd} = T_0 \Delta s_s \quad (28)$$

che viene detta anche *equazione di Gouy-Stodola*.

**ESEMPIO 7.4 – Valutazione della disponibilità di un sistema.**

Supponiamo che la bombola di cui abbiamo parlato nell'introduzione abbia un volume di 100 L e contenga aria (gas ideale con  $c_p$  costante,  $R = 287$ ,  $k = 1.4$ ) alla temperatura di 700 °C e alla pressione di 7 bar. Valutare la disponibilità del sistema assumendo  $T_0 = 25$  °C e  $p_0 = 101.3$  kPa.

La disponibilità specifica è data da

$$a = (u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v)$$

I termini di energia cinetica e potenziale sono nulli, e inoltre si ha

$$c_v = \frac{R}{k-1} = 717.5 \text{ J/kg K}; \quad c_p = k c_v = 1005 \text{ J/kg K}; \quad p_0 (v_0 - v) = R \left( T_0 - T \frac{p_0}{p} \right)$$

per cui, sfruttando le espressioni di  $du$  e  $ds$  per il gas ideale si ha

$$\begin{aligned} a &= (u - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) = c_v (T - T_0) - T_0 \left( c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} \right) - R \left( T_0 - T \frac{p_0}{p} \right) = \\ &= 717.5 (973.15 - 298.15) - 298.15 \left( 1005 \ln \frac{973.15}{298.15} - 287 \ln \frac{7}{1.013} \right) - 287 \left( 298.15 - 973.15 \frac{1.013}{7} \right) = \\ &= 250.1 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

La bombola contiene una massa  $M = pV/RT = 0.25$  kg di aria, per cui

$$A = M a = 0.25 \cdot 250.1 = 62.5 \text{ kJ}$$

In questo caso, la disponibilità del gas contenuto nella bombola avrebbe consentito di produrre, utilizzando dispositivi opportuni, un lavoro meccanico *fino a 62.5 kJ* (in assenza di irreversibilità); aprendo il volantino della bombola tale potenzialità viene completamente distrutta dalle irreversibilità senza che si ottenga alcuna forma di lavoro utile.

□

Bisogna notare che in questa valutazione della disponibilità si è trascurato *il contributo chimico*, ovvero la possibilità di produrre lavoro addizionale sfruttando le reazioni chimiche che possono avvenire all'interno del sistema. Questo aspetto riveste particolare importanza ad es. nello studio dei processi di combustione, ma viene per ora tralasciato.

Concludiamo questa sezione notando che *un valore negativo di disponibilità non ha significato fisico*. Se il sistema non si trova in equilibrio con lo stato morto, può comunque raggiungerlo *spontaneamente* con una trasformazione che implica *lavoro nullo*. Conseguentemente il *massimo* lavoro ricavabile non può essere inferiore a zero, e quindi la disponibilità può essere solo positiva o nulla.

**Bilancio di disponibilità ed exergia**

La funzione disponibilità è una proprietà estensiva del sistema e quindi anche per essa è possibile scrivere una equazione di bilancio. Nel far ciò bisogna tenere conto che la disponibilità non è una grandezza conservativa, ma viene distrutta dalle irreversibilità. Pertanto, sulla falsariga di quanto fatto nel capitolo 4 per massa, energia ed entropia si potrà scrivere

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_{calore} + \dot{A}_{l.mecc.} + \dot{A}_{trasp.massa} - \dot{A}_{distrutta} \quad (29)$$

Ovvero che la variazione di disponibilità di un sistema è data dalla somma del flusso di disponibilità associato al lavoro meccanico ( $\dot{A}_{l.mecc.}$ ) più il flusso di disponibilità associato allo scambio termico ( $\dot{A}_{calore.}$ ) più il flusso di disponibilità associato al trasporto di massa ( $\dot{A}_{trasp.massa}$ ), meno la disponibilità distrutta per unità di tempo dalle irreversibilità ( $\dot{A}_{distrutta}$ ).

La disponibilità, come il calore, è considerata positiva quando entra nel sistema.

Il resto di questa sezione è dedicato ad ottenere le espressioni dei quattro termini suddetti. Per non appesantire eccessivamente la trattazione, perdendo così di vista il significato fisico di quanto viene derivato, si riportano nel seguito solo gli aspetti qualitativi confinando le dimostrazioni nell'App.2. Nelle sezioni successive, il bilancio di disponibilità verrà come di consueto specializzato per i sistemi chiusi e per quelli aperti a regime.

Il flusso di disponibilità dovuto allo scambio di lavoro meccanico è dato da

$$\dot{A}_{l.mecc.} = -W'_{m,a} = -\left(W'_m - p_0 \frac{dV}{dt}\right) \quad (30)$$

questa espressione tiene conto che la potenza tecnicamente utilizzabile rilasciata dal sistema va a decrescere la disponibilità ed è data dalla potenza meccanica erogata meno la potenza impegnata nella dilatazione del sistema contro il suo intorno (notare che vi compare  $p_0$  e non  $p!$ ), che non è utilizzabile a fini pratici.

Il contributo dovuto allo scambio termico è dato da

$$\dot{A}_{calore} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} \quad (31)$$

questo termine tiene conto che la potenza termica rilasciata dal sistema attraverso una superficie a temperatura  $T_k$  potrebbe essere utilizzata in un ciclo di Carnot (che a sua volta la rilascia a temperatura  $T_0$ ) per produrre una potenza meccanica  $W_m = \eta_C W_t$  dove  $\eta_C$  è appunto il rendimento della macchina di Carnot. Ovviamente, se il calore viene rilasciato dal sistema alla temperatura dello stato morto ( $T_0$ ) nessuna ulteriore produzione di lavoro è possibile.

Bisogna anche notare che il fattore tra parentesi nella Eq.(31) (detto anche fattore di Carnot) diviene negativo quando  $T_k < T_0$ , vale a dire per temperature di scambio inferiori a quelle dello stato morto: in questo caso la disponibilità del sistema diminuisce quando  $W_{tk}$  è positivo, ovvero il sistema acquista calore da sorgenti a bassa temperatura: in altri termini, il sistema deve consumare disponibilità perché questo possa avvenire, come accade infatti nelle macchine frigorifere.

Il termine dovuto allo scambio di massa è dato da

$$\dot{A}_{trasp.massa} = \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) \quad (32)$$

dove  $a_f$  è detta *disponibilità di efflusso* o più comunemente *exergia* ed è data da

$$a_f = h - h_0 - T_0 (s - s_0) \quad (33)$$

tale quantità tiene conto non solo del flusso di disponibilità specifica ma anche del contributo del lavoro di efflusso attraverso l'ingresso o l'uscita del sistema.

In altri termini, con la terminologia che abbiamo adottato, tra exergia e disponibilità c'è la stessa relazione che sussiste tra entalpia ed energia: l'exergia è la variazione di disponibilità da associare al trasporto di massa al di fuori del sistema, che tiene conto al suo interno del lavoro di efflusso. Tuttavia, come verrà accennato nelle conclusioni, questa terminologia non è universalmente condivisa.

Infine il termine di distruzione della disponibilità, ricavabile anche dall'equazione di Gouy-Stodola (eq.28) è esprimibile come

$$\dot{A}_{distrutta} = T_0 \dot{S}_{irr} \quad (34)$$

Combinando le precedenti espressioni si ottiene infine il bilancio di disponibilità del sistema nella forma

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \sum_k \left( 1 - \frac{T_0}{T_k} \right) W_{t,k} - W'_{m,a} \\ & + \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (35)$$

Bisogna notare che tale equazione, essendo stata ricavata combinando i bilanci di energia e di entropia (v. App.2), *non rappresenta una nuova equazione indipendente*, ma può essere utilizzata in sostituzione di una delle due precedenti.

### **Bilancio di disponibilità per un sistema chiuso**

Come di consueto, per un sistema chiuso i termini convettivi nel bilancio si annullano, per cui

$$\frac{dA}{dt} = \sum_k \left( 1 - \frac{T_0}{T_k} \right) W_{t,k} - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (36)$$

Da cui si ricava

$$W'_{m,a} = - \frac{dA}{dt} + \sum_k \left( 1 - \frac{T_0}{T_k} \right) W_{t,k} - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (37)$$

Per un sistema chiuso si ha dunque che il lavoro fatto per unità di tempo è dato dalla diminuzione di disponibilità, più il lavoro che potrebbe ancora essere ottenuto dal calore rilasciato a temperatura maggiore di quella ambiente, meno la distruzione della disponibilità dovuta alle irreversibilità.

**ESEMPIO 7.5 – Un'automobile ad aria compressa?**

Un'automobile ad aria compressa funziona prelevando energia da un serbatoio di aria compressa, a temperatura ambiente, del volume di 350 L. Si supponga che tale auto debba avere un'autonomia di 200 km, per percorrere i quali occorre un'energia meccanica di 50 MJ, equivalente grossomodo ad un consumo di 50 km per litro di benzina. Determinare la minima pressione che si dovrebbe avere nella bombola, ipotizzando che l'aria sia un gas ideale con  $c_p$  costante.

In questo caso, ipotizzando un processo completamente reversibile, dall'equazione di bilancio si ha

$$W'_{m,a,REV} = - \frac{dA}{dt}$$

Il termine relativo al calore nell'Eq. si annulla perché  $T_k = T_0$  senza necessità di dover dichiarare il processo adiabatico. Integrando, si trova il lavoro massimo ottenibile

$$L_{max,REV} = A - A_0 = A - 0$$

la disponibilità iniziale nella bombola dovrebbe quindi essere data da 50 MJ. Si ipotizza, come di consueto, che la temperatura dello stato morto coincida con quella ambiente. Si ha quindi

$$A = M a = \frac{pV}{RT_0} \left[ (u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) \right]$$

Il primo termine tra parentesi quadra è nullo, dato che non vi sono variazioni di temperatura, energia cinetica e energia potenziale. Il significato fisico del terzo termine tra parentesi quadra indica che una parte del lavoro meccanico scambiato deve essere utilizzato per effettuare la dilatazione del gas compresso nell'atmosfera circostante e non può quindi essere utilizzato a fini pratici. Si ha quindi

$$A = M a = \frac{pV}{RT_0} \left[ -T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v) \right]$$

Utilizzando l'espressione del ds per un gas ideale a  $c_p$  costante e l'equazione di stato per il calcolo del volume specifico si ha

$$A = \frac{pV}{RT_0} \left[ T_0 R \ln \frac{p}{p_0} - p_0 \left( \frac{RT_0}{p_0} - \frac{RT_0}{p} \right) \right] = pV \left( \ln \frac{p}{p_0} - 1 + \frac{p_0}{p} \right) = 50 \text{ MJ}$$

Che può anche essere scritta come

$$\frac{A}{p_0 V} = p' \left( \ln p' - 1 + \frac{1}{p'} \right) \quad \text{dove} \quad p' = \frac{p}{p_0}$$

Questa costituisce una equazione implicita in  $p'$  che risolta numericamente (assumendo come di consueto  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ ) fornisce  $p = 30.1 \text{ MPa}$  (301 bar).

Nella realtà, dato che tale valore rappresenta la pressione *minima*, occorrerà una pressione più alta o una bombola di volume maggiore. Rimane poi da progettare il motore (ed il relativo ciclo termodinamico) in grado di realizzare in pratica tale lavoro (e da alloggiare nell'auto un serbatoio a pressione di 350 litri ...).

□

*Bilancio di disponibilità per una macchina termica ciclica – temperature medie di scambio*

E' interessante riportare le conclusioni che si ricavano dal bilancio di disponibilità per una macchina termica semplice reversibile, ovvero un sistema ciclico che scambia calore con due sole sorgenti a temperatura  $T_C$  e  $T_F$ . Per tale sistema a regime si ha  $dA/dt = 0$ , e indicando gli scambi termici in valore assoluto, si ha

$$W'_{m,a} = \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) |W_{TC}| - \left(1 - \frac{T_0}{T_F}\right) |W_{TF}| \quad (38)$$

e quindi

$$\eta = \frac{W'_{m,a}}{W_{TC}} = \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_F}\right) \frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} \quad (39)$$

D'altra parte, dal bilancio di entropia per un sistema reversibile si ha (vedi Eq.6)

$$\frac{|W_{TF}|}{|W_{TC}|} = \frac{T_F}{T_C} \quad (40)$$

Sostituendo nella precedente, con facili passaggi

$$\eta = \frac{W'_{m,a}}{W_{TC}} = \left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) - \left(1 - \frac{T_0}{T_F}\right) \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad (41)$$

Si vede quindi che dalla più generale Eq.(38) si ritrovano le conclusioni enunciate da Carnot nel 1824. E' tuttavia adesso immediata la generalizzazione della Eq.(38) ad una macchina ciclica che scambia calore un numero  $k$  arbitrario di sorgenti:

$$W'_{m,a} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} \quad (42)$$

E' possibile, con un po' di pazienza, esprimere il rendimento di tale macchina in modo semplice e significativo. Limitandosi per semplicità al caso in cui tutte le temperature  $T_k$  sono superiori a quella dello stato morto, gli addendi della sommatoria a secondo membro della Eq.(39) possono essere positivi o negativi a seconda del segno di  $W_{t,k}$ . Dividendo quindi gli scambi di calore positivi e quelli negativi, e passando ai valori assoluti per maggiore chiarezza, si ha

$$W'_{m,a} = \sum_i \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) |W_{TC,i}| - \sum_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j}\right) |W_{TF,j}| \quad (43)$$

che può essere riarrangiata come

$$W'_{m,a} = \sum_i |W_{TC,i}| - \sum_j |W_{TF,j}| + T_0 \left( \sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i} - \sum_j \frac{|W_{TF,j}|}{T_j} \right) \quad (44)$$

Si definiscono ora le *temperature medie di scambio* superiore ed inferiore come

$$T_{mC} = \frac{\sum_i |W_{TC,i}|}{\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i}}, \quad T_{mF} = \frac{\sum_j |W_{TF,j}|}{\sum_j \frac{|W_{TF,j}|}{T_j}} \quad (45)$$

In pratica, le temperature medie di scambio sono medie opportune, pesate sulla potenza termica scambiata, che conservano il flusso entropico nel sistema. Sostituendo le temperature medie di scambio nella precedente Eq.(44) si ottiene

$$W'_{m,a} = \left(1 - \frac{T_0}{T_{mC}}\right) \sum_i |W_{TC,i}| - \left(1 - \frac{T_0}{T_{mF}}\right) \sum_j |W_{TF,j}| \quad (46)$$

che, pur contenendo le temperature medie di scambio e le sommatorie delle potenze “calde” e “fredde”, è del tutto analoga alla Eq.(38). Seguendo allora la stessa procedura, si può esprimere il rendimento di una macchina *reversibile* che scambia calore con una molteplicità di sorgenti come

$$\eta = \frac{W'_{m,a}}{\sum_i |W_{TC,i}|} = 1 - \frac{T_{mF}}{T_{mC}} \quad (47)$$

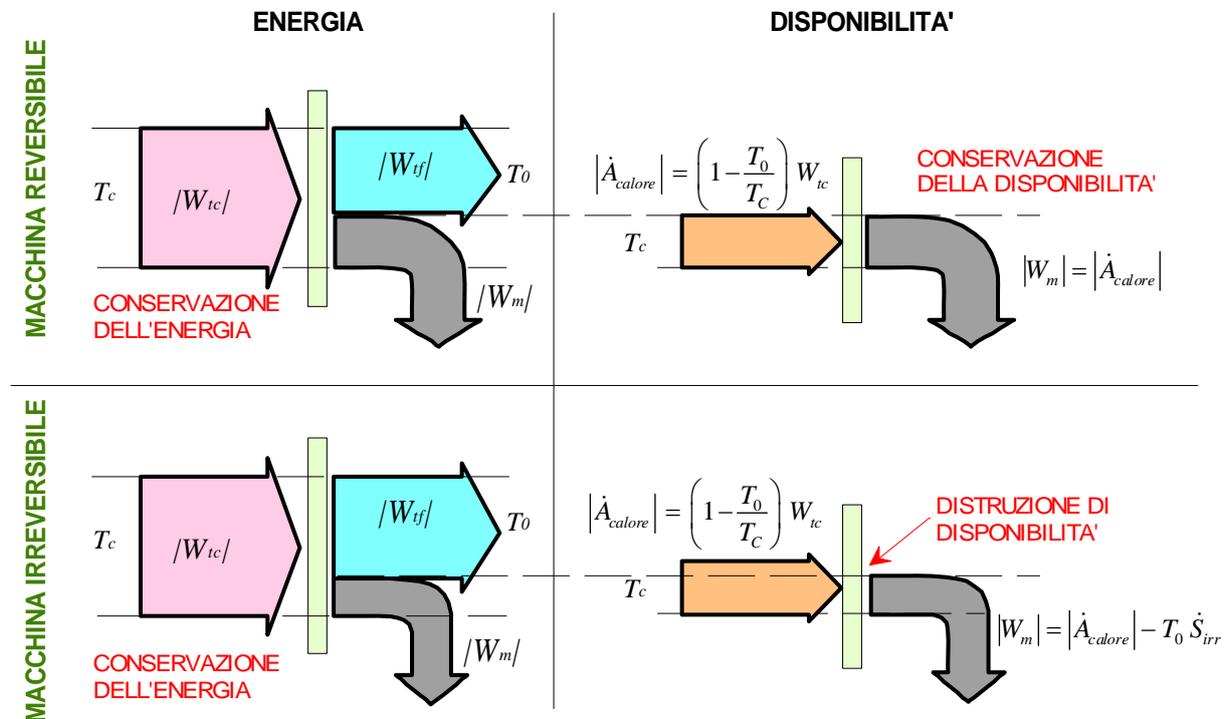
ovvero in una forma *analoga* al rendimento della macchina di Carnot, dove però in luogo delle temperature superiore ed inferiore del ciclo compaiono le temperature medie di scambio, definite nella Eq.(45).

A questo punto, è semplice dimostrare che, *a parità di temperature estreme* ( $T_{C,max}$ ,  $T_{F,max}$ ) nessuna macchina può avere un rendimento superiore alla macchina di Carnot: infatti è intuitivo (ma potrebbe anche essere dimostrato rigorosamente) che comunque

$$T_{mF} > T_{F,max}, \quad T_{mC} < T_{C,max} \quad (48)$$

per cui il rendimento espresso dalla Eq.(47) non può essere superiore a quello della Eq.(39).

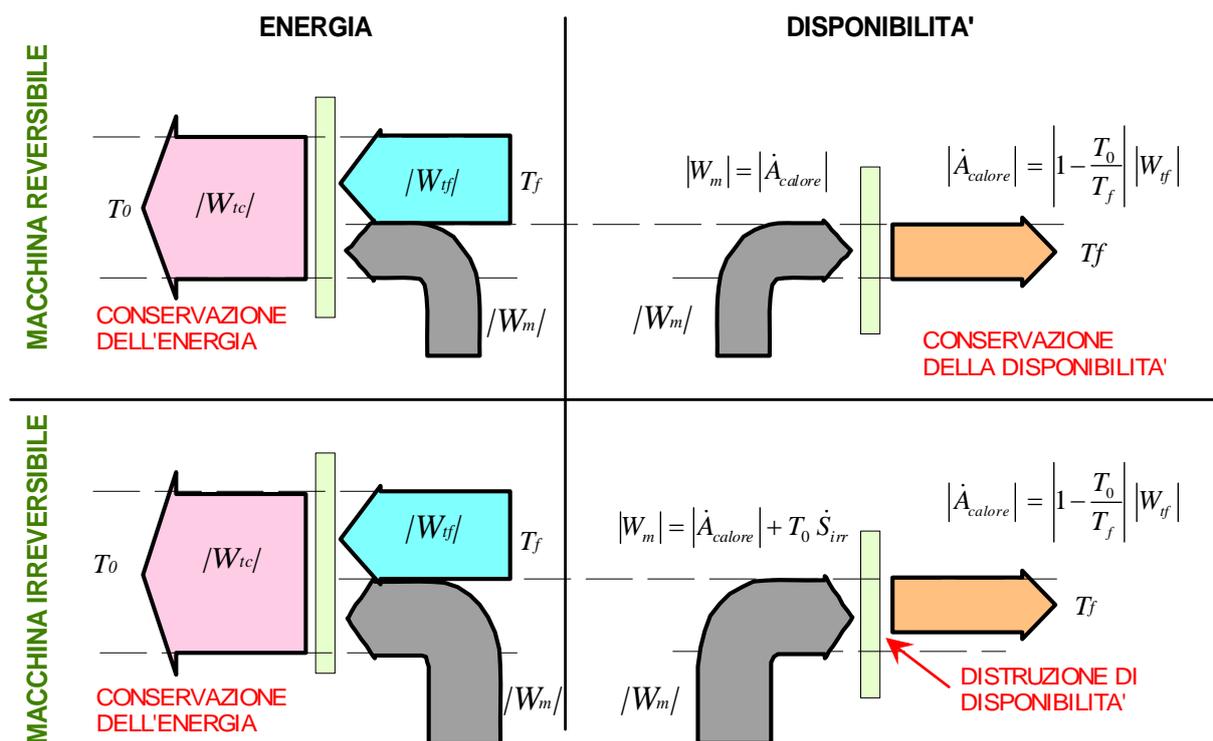
Flussi di energia e di disponibilità per una macchina termica ciclica



**Figura 10:** Flusso di energia e disponibilità in una macchina termica motrice semplice con temperatura inferiore pari a quella dello stato morto ( $T_c > T_0$ ).

Per concludere questa sezione, è utile meditare sui flussi di energia e disponibilità nelle macchine, limitandosi al caso delle macchine semplici che consentono di capire i concetti essenziali senza troppe complicazioni formali.

A tale scopo, si riporta in Fig.10 il flusso di energia e disponibilità per una macchina semplice la cui temperatura inferiore è pari a quella dello stato morto: questo consente di eliminare lo scambio di disponibilità con la sorgente a temperatura inferiore, dato che il fattore di Carnot si annulla (vedi paragrafo precedente). Si vede che nel caso di macchina reversibile anche il flusso di disponibilità si conserva, mentre nel caso irreversibile la disponibilità in uscita (potenza meccanica utile) è inferiore a quella della disponibilità in ingresso (calore scambiato moltiplicato per il fattore di Carnot). In altri termini, a causa delle irreversibilità, la macchina *distrugge disponibilità*: mentre, del tutto ovviamente, in nessun caso essa può distruggere l'energia.



**Figura 11:** Flusso di energia e disponibilità in una macchina termica frigorifera semplice con temperatura superiore pari a quella dello stato morto ( $T_0 > T_c$ ).

Gli stessi diagrammi del caso precedente sono riportati in Fig.11 per una macchina frigorifera la cui temperatura superiore coincide con quella dello stato morto. In questo caso, il flusso di disponibilità con la sorgente a temperatura superiore è nullo (fattore di Carnot pari a zero) mentre il flusso di disponibilità connesso al calore scambiato con la sorgente fredda è *negativo*, ovvero uscente, in quanto la temperatura della sorgente fredda è *inferiore* a quella dello stato morto (quindi il fattore di Carnot è negativo). E' del tutto evidente che il sistema, per mantenersi in stato stazionario, deve assorbire disponibilità dall'esterno sotto forma di potenza meccanica, ovvero si perviene alla stessa conclusione dell'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica. Tale assorbimento di disponibilità sotto forma di potenza meccanica è esattamente pari al flusso di disponibilità uscente in caso di macchina reversibile, maggiore in caso di macchina irreversibile: anche in questo caso, quindi, *la macchina irreversibile distrugge disponibilità*.

**Bilancio di disponibilità per un sistema aperto a regime**

Per un sistema aperto a regime si ha  $dA/dt = 0$ ,  $dV/dt = 0$ , per cui

$$0 = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - W'_{m,a} + \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (49)$$

da cui

$$W'_{m,a} = \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) + \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (50)$$

ovvero la potenza massima ottenibile è data dalle differenze tra i flussi convettivi exergetici in ingresso e in uscita, più la potenza ulteriormente recuperabile dalla cessione di calore a temperatura superiore a quella ambiente, meno la potenza perduta per irreversibilità.

Notare che i termini connessi allo scambio di calore si annullano non solo in caso di trasformazioni adiabatiche, ma anche se il calore viene rilasciato alla temperatura dello stato morto,  $T_0$ .

**ESEMPIO 7.6 – Analisi exergetica di uno scambiatore di calore a superficie**

Un generatore di vapore produce una portata  $G_a = 50$  t/h di vapore a  $p = 100$  bar  $T = 450$  °C, partire da acqua alla temperatura di  $120$  °C. A tale scopo viene utilizzata una portata  $G_s = 125$  t/h di fumi di combustione inizialmente a temperatura di  $1200$  °C, assimilabili ad un gas ideale con  $c_p =$  costante =  $1100$  J/kg K. Determinare la perdita di lavoro nel dispositivo, trascurando le perdite di carico e le variazioni di energia cinetica e potenziale.

Si ha a che fare con uno scambiatore a superficie, e dato che le perdite di carico sono trascurabili le trasformazioni subite dall'acqua e dal vapore sono isobare. Lo scambio di calore e lavoro con l'esterno è nullo, pertanto i bilanci energetico e di disponibilità si scrivono nella forma seguente, dove i suffissi 1 e 2 si riferiscono al vapore (risp. ingresso ed uscita) e 3 e 4 ai fumi (risp. ingresso ed uscita)

$$G_a (h_1 - h_2) + G_s c_{p,s} (T_3 - T_4) = 0$$

$$G_a (a_{f1} - a_{f2}) + G_s (a_{f3} - a_{f4}) - \dot{A}_{distr} = 0$$

La seconda equazione, sfruttando le espressioni del gas ideale, può essere sviluppata nella forma

$$\dot{A}_{distr} = G_a \left[ h_1 - h_2 - T_0 (s_1 - s_2) \right] + G_s \left[ c_{p,s} (T_3 - T_4) - T_0 \left( c_{p,s} \ln \frac{T_3}{T_4} \right) \right]$$

Dalle tavole termodinamiche si ricava per l'acqua:

$$h_1 = 510.6 \text{ kJ/kg}, h_2 = 3241 \text{ kJ/kg}, s_1 = 1.519 \text{ kJ/kg K}, s_2 = 6.419 \text{ kJ/kg K}.$$

Dalla prima equazione si ottiene con semplici passaggi la temperatura di uscita dei fumi,

$$T_4 = T_3 - \frac{G_a (h_2 - h_1)}{G_s c_{p,s}} = 1200 - \frac{50 \cdot (3241 - 510)}{125 \cdot 1.1} = 207 \text{ °C}$$

dalla seconda si ricava il lavoro perduto per unità di tempo (notare che adesso è necessario convertire le portate in kg/s e le temperature in K):

$$\dot{A}_{distr} = 13.9 \left[ 510 - 3241 - 298.15 \cdot (1.519 - 6.419) \right] + \\ + 34.7 \left[ 1.1 \cdot (1473 - 480) - 298.15 \cdot \left( 1.1 \cdot \ln \frac{1473}{480} \right) \right] = 7.48 \text{ MW}$$

Questa grande perdita (rispetto ai 38 MW effettivamente scambiati) è dovuta al fatto che la disponibilità di calore a 1200 °C nei fumi viene “sprecata” per riscaldare il vapore a “soli” 450 °C.

Si può anche definire un rendimento di secondo principio dello scambiatore nella forma

$$\varepsilon = \frac{\text{aum. di disponib. corrente fredda}}{\text{dimin. di disponib. corrente calda}} = \frac{G_a (a_{f4} - a_{f3})}{G_s (a_{f1} - a_{f2})} = \frac{17653}{25142} = 0.70$$

il che equivale a dire che solo il 70% della disponibilità ceduta dai fumi “sopravvive” alle irreversibilità dello scambiatore.

□

### **ESEMPIO 7.7 – Analisi exergetica di una turbina a vapore.**

Determinare la massima potenza meccanica ottenibile da una turbina a vapore che opera in regime stazionario nelle seguenti condizioni

- portata di fluido  $G = 4.6 \text{ t/h}$ ;
- condizioni in ingresso:  $p_1 = 60 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 600 \text{ °C}$ ;
- condizioni in uscita:  $p_2 = 0.1 \text{ bar}$ ,  $x_2 = 0.97$ .

Tramite le tabelle termodinamiche dell’acqua si ricavano i valori contenuti nella seguente tabella (dove le caselle ombreggiate indicano i valori usati come input)

punto	$T$ , °C	$p$ , bar	$h$ , kJ/kg	$s$ , kJ/kg K	$x$
1	600	60	3658	7.1676	=
2	45.8	0.1	2653	7.299	0.97
2i	45.8	0.1	2271	7.1676	0.87

da cui si ha

$$W'_m = G (h_1 - h_2) = 1.28 \cdot (3658 - 2653) = 1.286 \text{ MW}$$

$$\eta_T = \frac{W'_m}{W'_{m,i}} = \frac{G (h_1 - h_2)}{G (h_1 - h_{2i})} = \frac{1.286}{1.775} = 0.724$$

Il bilancio di disponibilità per il sistema aperto a regime, adiabatico, risulta in

$$W'_{m,a} = G (a_{f,1} - a_{f,2}) = G [(h_1 - h_2) - T_0 (s_1 - s_2)] = \\ = 1.28 \cdot [3658 - 2653 - 298.15 \cdot (7.167 - 7.299)] = 1.337 \text{ MW}$$

si ha pertanto un rendimento di secondo principio dato da

$$\varepsilon = \frac{W'_m}{W'_{m,a}} = \frac{1.286}{1.337} = 0.962$$

Notare che il rendimento di secondo principio della turbina *non corrisponde* al rendimento isoentropico introdotto nel cap.5 e i due valori sono notevolmente diversi in questo caso. La ragione di questo è che il rendimento isoentropico fa riferimento ad una diversa condizione finale (quella ideale) e soprattutto non tiene conto della disponibilità residua del vapore allo

scarico: in altre parole, è vero che a seguito delle irreversibilità si perde lavoro utile, ma è anche vero che allo scarico, a seguito delle irreversibilità, si ottiene un vapore con maggiore disponibilità.

A riprova di quanto detto, consideriamo la potenza disponibile che si può ottenere portando reversibilmente il vapore dalle condizioni 2 alle condizioni 2i

$$W'_{m,a} = G(a_{f,2} - a_{f,2i}) = G[(h_2 - h_{2i}) - T_0(s_2 - s_{2i})] =$$

$$= 1.28 \cdot [2653 - 2271 - 298.15 \cdot (7.299 - 7.167)] = 439 \text{ kW}$$

che sommato al precedente (1.337 MW) restituisce a meno degli arrotondamenti il valore totale di 1.775 MW relativo all'espansione isoentropica.

□

### **ESEMPIO 7.8 – Analisi exergetica di un compressore.**

Valutare il rendimento exergetico del compressore adiabatico studiato nell'esempio 5.5.

Si ricorda che nell'esempio 5.5 le condizioni erano

- Fluido: aria, gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$  e  $R = 287 \text{ J/kg K}$
- Portata  $G = 0.007 \text{ kg/s}$
- Ingresso:  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 290 \text{ K}$
- Uscita:  $p_2 = 7 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 560 \text{ K}$

Per un compressore adiabatico il rendimento exergetico può venire espresso come il rapporto tra la potenza ideale (ovvero la minima necessaria per portare il gas *alle stesse condizioni finali*, e non solo alla stessa pressione come nel caso del rendimento isoentropico) e la potenza effettivamente spesa

$$\varepsilon = \frac{\text{potenza minima necessaria}}{\text{potenza reale}} = \frac{W'_{m,a}}{W'_m} = \frac{G(a_{f2} - a_{f1})}{G(h_2 - h_1)}$$

sviluppando si ha

$$\varepsilon = \frac{(h_2 - h_1) - T_0(s_2 - s_1)}{(h_2 - h_1)} = 1 - \frac{T_0(s_2 - s_1)}{(h_2 - h_1)}$$

nell'esempio 5.5 abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 271 \text{ kJ/kg} \\ s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 103 \text{ J/kg K} \end{cases}$$

Sostituendo nella espressione del rendimento exergetico abbiamo

$$\varepsilon = 1 - \frac{298.15 \cdot 103}{271000} = 0.89$$

anche in questo caso, il rendimento exergetico è maggiore di quello isoentropico calcolato nell'esempio 5.5 ( $\eta_c = 0.8$ ). Come nell'esempio precedente (7.7) questo è dovuto alla maggiore disponibilità posseduta dal gas in uscita, a seguito della sua maggiore temperatura, che sarebbe potenzialmente recuperabile in seguito.

Si nota infine che, essendo il compressore adiabatico, si ha  $s_2 - s_1 = \Delta s_s$ , per cui l'espressione del rendimento exergetico, tenuto conto dell'Eq.28 di Gouy-Stodola, può essere interpretato anche come

$$\varepsilon = \frac{(h_2 - h_1) - T_0 \Delta s_s}{(h_2 - h_1)} = \frac{\text{lavoro fatto} - \text{lavoro perduto}}{\text{lavoro fatto}}$$



### **Conclusioni relative al bilancio di disponibilità**

In questa sezione abbiamo introdotto il bilancio di una nuova funzione termodinamica detta *disponibilità*, applicandola in particolare ai sistemi chiusi ed a quelli aperti a regime. Possiamo trarre tre conclusioni fondamentali che è consigliabile non dimenticare:

- tramite il bilancio di disponibilità è possibile valutare il massimo lavoro meccanico ricavabile da una generica trasformazione termodinamica, che si ottiene operando in condizioni reversibili;
- il termine di irreversibilità, ovvero la generazione entropica, è una misura della distruzione di lavoro disponibile subita nel processo, secondo l'equazione di Gouy-Stodola (Eq.28);
- il bilancio di disponibilità non è una nuova equazione termodinamica, essendo stato ottenuto combinando il bilancio energetico con quello entropico, ma può essere in alcuni casi vantaggiosamente usato in sostituzione del secondo nel valutare le prestazioni energetiche di un sistema.

In conclusione, la combinazione dei due principi della termodinamica, attuata in questo capitolo, ci consente, generalizzando l'analisi fatta da Carnot, di stabilire quale è la tendenza generale dei sistemi di conversione dell'energia: *conservazione* dell'energia e *incremento* dell'entropia, che si può sostituire con la *distruzione* della disponibilità.

Come ultima cosa, notiamo che sfortunatamente esiste in letteratura un po' di confusione sulla terminologia, ed i nomi con cui vengono indicate le varie funzioni variano da testo a testo; in particolare il ruolo dei termini disponibilità ed exergia viene spesso scambiato. Ad es. nel testo di A.Bejan si indica la disponibilità *a* con il nome *di non-flow exergy*, contrapponendola all'exergia *a<sub>f</sub>* che viene chiamata *flow exergy*. Altrove, l'exergia è definita semplicemente come  $h - T_0 s$  senza sottrarre i valori allo stato morto.

## **BIBLIOGRAFIA**

*Per le macchine termiche semplici:*

R. Mastrullo, P. Mazzei, R. Vanoli, Fondamenti di Energetica, Liguori, Napoli, 1992, cap.2.

*Per l'analisi di disponibilità:*

J. Moran and H. Shapiro, Fundamentals of Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, cap. 7.

R. Sonntag and G. Van Wylen, Introduction to Thermodynamics: Classical and Statistical, Wiley, NY, cap.9.6-9.7.

A. Bejan, Advanced Engineering Thermodynamics, Wiley, NY, cap.3.

### APPENDICE 7.1: Dimostrazione che in una macchina termica semplice il senso degli scambi termici non può essere invertito.

L'assunto viene dimostrato per assurdo. Riscriviamo i bilanci di entropia ed energia cambiando segno agli scambi termici

$$\begin{aligned} 0 &= -|W_{TC}| + |W_{TF}| - |W_M| \\ 0 &= -\frac{|W_{TC}|}{T_C} + \frac{|W_{TF}|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (51)$$

Da cui, ricavando  $W_{TF}$  dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ottiene

$$\begin{aligned} |W_M| &= |W_{TF}| - |W_{TC}| \\ 0 &= |W_{TC}| \left( \frac{1}{T_F} - \frac{1}{T_C} \right) + \frac{|W_M|}{T_F} + \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (52)$$

Come si vede, tutti e tre gli addendi della seconda equazione sono positivi (essendo  $1/T_C < 1/T_F$ ) e la loro somma non può quindi essere nulla.

In altri termini, la macchina non può cedere all'esterno potenza meccanica prelevando calore dalla sorgente fredda e cedendolo a quella calda.

### APPENDICE 7.2: Derivazione del bilancio di disponibilità

Partiamo dalla espressione generale dei bilanci di energia ed entropia, ricavate nel cap.4, modificandole lievemente per evidenziare in particolare tra gli scambi termici la potenza termica  $W_{t,0}$  ceduta all'intorno del sistema, che si trova alla temperatura  $T_0$ .

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = \left( W_{t,0} + \sum_k W_{t,k} \right) - W'_m + \sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) \quad (53)$$

$$\frac{dS}{dt} = \left( \frac{W_{t,0}}{T_0} + \sum_k \frac{W_{t,k}}{T_k} \right) + \sum_i G_i s_i - \sum_u G_u s_u + \dot{S}_{irr} \quad (54)$$

Eliminando  $W_{t,0}$  tra le due precedenti equazioni, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d(U + E_c + E_p - T_0 S)}{dt} &= \sum_k \left( 1 - \frac{T_0}{T_k} \right) W_{tk} - W'_m + \\ &\sum_i G_i (h_i + e_{ci} + e_{pi} - T_0 s_i) - \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu} - T_0 s_u) - T_0 \dot{S}_{irr} \end{aligned} \quad (55)$$

Per completare il nostro studio è necessario notare che una parte della potenza meccanica che il sistema cede all'esterno viene impegnata nell'effettuare la dilatazione del sistema nel suo intorno, che si trova a pressione  $p_0$ , e si può quindi separare da quella totale evidenziando la *potenza meccanica utile, o disponibile*,  $W'_{m,a}$ . In altre parole si ha

$$W'_{m,a} = W'_m - p_0 \frac{dV}{dt} \quad (56)$$

Notare che il lavoro atmosferico diminuisce  $W'_{m,a}$  solo quando il sistema si dilata, quando il sistema si contrae il lavoro disponibile può anche essere superiore a  $W'_m$ . E' questo il caso dei primi motori atmosferici sviluppati, come la macchina a vapore di Papin o di Newcomen, dove la pressione interna al cilindro è inferiore a quella atmosferica nella fase utile.

Sostituendo la Eq.46 nel precedente bilancio e portando il termine  $p_0 dV/dt$  a primo membro si ottiene infine

$$\frac{d(U + E_c + E_p + p_0 V - T_0 S)}{dt} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{tk} - W'_{m,a} + \sum_i G_i (h_i + e_{c,i} + e_{p,i} - T_0 s_i) - \sum_u G_u (h_u + e_{c,u} + e_{p,u} - T_0 s_u) - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (57)$$

Come ultimo passo, dobbiamo riferire le grandezze di stato allo stato morto  $T_0, h_0, V_0, s_0$ . Questo non comporta modifiche sostanziali alle equazioni: è sufficiente sottrarre dalla precedente la seguente equazione

$$\frac{dM(u_0 + p_0 v_0 - T_0 s_0)}{dt} = \sum_i G_i (h_0 - T_0 s_0) - \sum_u G_u (h_0 - T_0 s_0) \quad (58)$$

che risulta identicamente verificata in forza del bilancio di massa.

Dopo questo, è immediato riconoscere nell'argomento della derivata a primo membro la funzione disponibilità  $A$  (v. Eq.25), nei termini tra parentesi che moltiplicano le portate in ingresso e in uscita la somma delle energie potenziale e cinetica specifiche con la exergia  $a_f = h - T_0 s$ , e nell'equazione appena trovata il bilancio di disponibilità, Eq.35

$$\frac{dA}{dt} = \sum_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) W_{t,k} - W'_{m,a} + \sum_i G_i (a_{f,i} + e_{p,i} + e_{c,i}) - \sum_u G_u (a_{f,u} + e_{p,u} + e_{c,u}) - T_0 \dot{S}_{irr} \quad (59)$$

## APPENDICE 7.3 – Cenno sulle fonti di energia

### *Classificazione delle fonti energetiche*

Tramite un'analisi attenta, ci si rende conto che l'energia disponibile sulla terra ha origine da tre sole sorgenti, ovvero:

- solare,
- nucleare,
- gravitazionale.

L'*energia solare* viene continuamente irradiata verso la terra dal sole con una potenza di picco<sup>1</sup> (al di fuori dell'atmosfera) di  $1353 \text{ W/m}^2$  (la cosiddetta *costante solare*). A seconda della latitudine, dell'altitudine e della nuvolosità, su ogni metro quadro di superficie terrestre "piovono" ogni giorno all'incirca da 2 a 9 kWh (in Italia la media è intorno a 4). Sono di origine solare tutte quelle fonti che traggono o hanno tratto energia dal sole: direttamente il cosiddetto *solare fotovoltaico* (conversione diretta dell'energia solare in energia elettrica) e il *solare termico* (l'uso della radiazione solare per riscaldare – a temperatura più o meno alta) un fluido. Ma ci sono anche altre forme di energia che indirettamente (e talvolta inaspettatamente) derivano dal sole: ad esempio le *biomasse* (la legna e gli altri combustibili di origine vegetale od animale) si sviluppano grazie alle reazioni di fotosintesi clorofilliana che prelevano energia dal sole. In definitiva tutti gli animali (che si nutrono di vegetali o di altri animali che a loro volta si sono nutriti di vegetali) funzionano quindi "ad energia solare". Anche l'energia *idroelettrica* è di origine solare: infatti i bacini idrici di alta quota sono alimentati dalle piogge, che a loro volta derivano dalla evaporazione dell'acqua degli oceani, che a sua volta è indotta all'energia solare. Più in generale tutti i moti atmosferici traggono la loro energia dal sole, inclusi gli uragani e i venti, i quali ultimi possono anche essere sfruttati in generatori *eolici*. Infine, i *combustibili organici fossili* (petrolio, carbone e gas naturale) derivano dall'accumulo e dalla decomposizione di organismi vissuti nelle ere passate: essi non sono quindi altro che una forma "congelata" di energia solare. Ad un livello più ampio, si potrebbe considerare anche l'energia solare come una forma di energia nucleare prodotta dalle reazioni di fusione nucleare nel sole, ma per i nostri scopi questo non ha interesse.

La fonte *nucleare* deriva la sua energia dalle trasformazioni che coinvolgono i nuclei degli atomi. Può essere direttamente utilizzata nelle reazioni nucleari di *fissione* (la rottura del nucleo di un elemento pesante, come l'uranio, in due nuclei più leggeri) e di *fusione* (l'unione di due nuclei più leggeri in uno più pesante, ad esempio di due nuclei di idrogeno in uno di elio). Ma anche il fatto che il nucleo terrestre si mantiene caldo e fuso è dovuto al calore di decadimento degli elementi radioattivi contenuti al suo interno, in quantità piccole, ma significative sotto questo aspetto. Quindi tutti i fenomeni geodinamici, inclusi il vulcanismo, la deriva dei continenti ed i terremoti traggono la loro energia dalla fonte nucleare. Parimenti, è di origine nucleare l'*energia geotermica*, che otteniamo sfruttando il vapore proveniente da pozzi – naturali od artificiali – scavati sulla superficie terrestre.

La fonte *gravitazionale* è dovuta all'azione gravitazionale del sole e della luna sulla terra è quella meno sfruttabile dal punto di vista pratico: ad essa sono attribuibili le *maree*, che in

---

<sup>1</sup> Più precisamente, tale quantità varia di  $\pm 3\%$  a causa dell'eccentricità dell'orbita terrestre. A livello suolo, la potenza di picco vale circa  $1.1 \text{ kW/m}^2$ , con il sole allo zenith.

alcuni paesi nordici, dove le escursioni di livello nelle insenature sono elevate, sono sfruttate per la produzione di energia elettrica.

***Fonti energetiche primarie, rinnovabili e non rinnovabili***

Si definiscono *fonti energetiche primarie* quelle disponibili in natura senza subire alcuna trasformazione: i combustibili fossili, le fonti rinnovabili, il combustibile nucleare. Esse sono dette anche "risorse energetiche primarie" o "materie prime energetiche".

Alcune fonti energetiche (ad es. solare termico e fotovoltaico, biomasse, idroelettrico) sono *rinnovabili*, in quanto sono inesauribili oppure l'energia che preleviamo viene reintegrata dai processi naturali *in tempi dello stesso ordine di grandezza di quelli in cui viene consumata*. Ad esempio, l'energia solare non si attenua nel tempo, le piante ricrescono, le piogge reintegrano l'acqua prelevata dai bacini idroelettrici, etc.

Secondo la legislazione italiana sono considerate fonti rinnovabili quelli che utilizzano il sole, il vento, l'acqua, le risorse geotermiche, le maree, il moto ondoso e la trasformazione dei rifiuti organici ed inorganici o di biomasse; sono "assimilate a fonti rinnovabili" le forme di energia recuperabili in processi e in impianti, gli scarti di lavorazione e/o di processi.

Altre fonti, come ad esempio i materiali fissili nucleari, il petrolio e gli altri combustibili fossili sono invece *non rinnovabili*: quello che noi consumiamo non viene reintegrato alla stessa velocità e pertanto tali fonti sono *soggette ad esaurimento*.

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 7.1

Un ciclo di Carnot che utilizza aria ( $R = 0,287 \text{ kJ/kg K}$ ,  $k=1.4$ ) come fluido motore è caratterizzato dai seguenti valori  $p$ ,  $v$  e  $T$ :

$$\begin{array}{ll} p_3 = 40 \text{ bar} & \\ V_3 = 0,030 \text{ m}^3 & V_4 = 0,08 \text{ m}^3 \\ T_3 = 1000 \text{ }^\circ\text{C} & T_4 = 1000 \text{ }^\circ\text{C} \\ T_1 = 270 \text{ }^\circ\text{C} & T_2 = 270 \text{ }^\circ\text{C} \end{array}$$

Determinare il rendimento del ciclo e le quantità di calore e di lavoro trasferite.

### ESERCIZIO 7.2

Uno studioso afferma di aver realizzato un ciclo motore che assorbe 2000 kJ dalla sorgente a temperatura superiore (a 500 °C), restituisce 600 kJ alla sorgente a temperatura inferiore (a 20 °C), producendo un lavoro pari a 1700 kJ. Commentare tale affermazione.

[E' impossibile]

### ESERCIZIO 7.3

Un inventore proclama di essere riuscito a realizzare miglie tecniche ad un impianto a ciclo Rankine (temperatura massima del vapore 550 °C, temperatura al condensatore 30 °C) che ne portano il rendimento a 0.66. Dimostrare che è un ciarlatano.

[Il rendimento di una macchina termica che opera tra quelle temperature non può superare 0.635]

### ESERCIZIO 7.4

Si vuole riscaldare, mantenendola a 25 °C, una villetta di montagna, che richiede a questo scopo una potenza termica di 10 kW, prelevando calore con una macchina operatrice da un laghetto attiguo che si trova alla temperatura di 5 °C. Valutare la potenza meccanica minima che deve assorbire la macchina per potere assicurare queste prestazioni. (Suggerimento: fare riferimento alla "migliore" macchina termica inversa teoricamente ipotizzabile).

[W = 0.671 kW]

### ESERCIZIO 7.5

Una centrale termoelettrica da 1000 MW elettrici (potenza utile erogata) ha un rendimento  $\eta = 0.412$ . Il secondario del condensatore è refrigerato tramite una portata esterna  $G = 50 \text{ t/s}$  di acqua. Determinare la variazione di temperatura dell'acqua di raffreddamento tra ingresso e uscita del condensatore.

[ $\Delta T = 6.8 \text{ K}$ ]

### ESERCIZIO 7.6

Un motore termico opera tra due sorgenti termiche, una alla temperatura di 400 °C e quella inferiore alla temperatura di 50 °C.

Il motore produce 7.5 kW di potenza e scarica sulla sorgente a temperatura inferiore una potenza termica di 9 kW

1. Trovare il rendimento del motore termico.
2. Il processo in questione è reversibile?

[0.455; no]

**ESERCIZIO 7.7**

Determinare la disponibilità di 2 kg di acqua a 70 °C alla pressione di 1 bar, considerandola un liquido incomprimibile con  $c = 4186 \text{ J/kg K}$ .  
[12.9 kJ/kg]

**ESERCIZIO 7.8**

Dell'acqua (liquido incomprimibile con  $c = 4186 \text{ J/kg K}$ ) inizialmente a 25 °C raffredda un freno idraulico in cui viene dissipata una potenza meccanica di 50 kW. Determinare la portata di acqua necessaria per avere in uscita una temperatura di 70 °C e la perdita di disponibilità ( $\dot{A}_{irr}$ ) che si verifica nel dispositivo. Come mai è inferiore alla potenza meccanica introdotta?  
[ $G = 0.27 \text{ kg/s}$ ; 46.5 kW]

**ESERCIZIO 7.9**

Un compressore adiabatico riceve 0.3 kg/s di aria a 1 atm e 25 °C e la comprime fino a 8 bar con un rendimento isoentropico di compressione  $\eta_c = 80\%$ . Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Determinare

1. la temperatura di uscita dell'aria;
2. la potenza assorbita;
3. la potenza minima necessaria per il processo secondo l'analisi di disponibilità;
4. il rendimento di secondo principio del compressore, definito come il rapporto tra quest'ultima e la potenza assorbita di cui al punto 1.

Considerare l'aria un gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$

[1) 598 K; 2) - 90.45 kW; 3) 81.22 kW; 4) 0.90]

**ESERCIZIO 7.10**

Una sorgente geotermica eroga 10 t/h di vapore a 300 °C e 40 bar, che viene fatto espandere in una turbina con rendimento isoentropico 0.8 fino alla pressione di 1 bar, e quindi scaricato nell'atmosfera dove condensa e raggiunge le condizioni di equilibrio di acqua liquida alla pressione di 1 atm e a 25 °C. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Determinare la potenza massima disponibile, quella erogata e l'efficienza di secondo principio del processo (rapporto tra le precedenti due quantità).

[2.96 MW; 1.42 MW; 0.48]

**ESERCIZIO 7.11**

Una turbina a vapore riceve in ingresso 30 kg/s di vapore a 30 bar, 350 °C. Nella posizione dove la pressione raggiunge 5 bar, si spillano 5 kg/s vapore alla temperatura di 200 °C. Le perdite termiche dall'involucro (a temperatura  $T_0$ ) ammontano a 150 kW. La rimanente parte di vapore esce dalla turbina alla pressione di 0.15 bar ed un titolo del 90%. Le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Determinare:

1. la potenza erogata dalla turbina;
2. la exergia del vapore all'ingresso ed alle due uscite;
3. la potenza massima erogabile reversibilmente;
4. il rendimento di secondo principio della turbina, definito come il rapporto tra la potenze di cui ai punti 1 e 3.

[1) 20.0 MW; 2) 1109.6 kJ/kg, 755.3 kJ/kg, 195.0 kJ/kg; 3) 24.6 MW; 4) 0.811]

**ESERCIZIO 7.12**

Per avviare il motore a scoppio di un'automobile è necessario un lavoro meccanico di 260 kJ, che viene in generale prelevato da un accumulatore elettrico. Supponendo che tale lavoro debba invece venire prelevato da una bombola del volume di 1 L, contenente aria compressa a temperatura ambiente, in un processo in cui il calore viene scambiato solo con l'intorno del sistema, determinare la minima pressione che si dovrebbe avere nella bombola, ipotizzando che l'aria sia un gas ideale con  $c_p$  costante.

[ $p = 50$  MPa]

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap.7. I cicli termici delle macchine motrici

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.02 – 02.04.07*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## 1. Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio delle macchine termiche motrici. Nella maggior parte dei casi (tranne che nei reattori nucleari, nelle applicazioni geotermiche e nei collettori solari) tali macchine prelevano l'energia termica ad alta temperatura da una reazione di combustione: i combustibili maggiormente usati sono quelli cosiddetti *fossili*, ovvero carbone, metano e petrolio. Si distinguono quindi le macchine a *combustione esterna*, in cui il fluido viene riscaldato attraverso uno scambiatore di calore, da quelle a *combustione interna*, in cui il fluido aumenta di temperatura e pressione attraverso una reazione chimica che avviene direttamente al suo interno. Nella prima parte del capitolo, vengono studiati i cicli termici effettivamente adottati nelle macchine motrici e gli accorgimenti per migliorarne il rendimento di primo principio.

L'aumento di rendimento di una macchina riduce, a parità di potenza meccanica utile prodotta, sia il costo del combustibile che le emissioni di prodotti inquinanti della combustione nell'atmosfera. La riduzione dei costi di esercizio implica tuttavia, in genere, un aumento di quelli di investimento, dato che la macchina deve essere realizzata con materiali e tecnologie migliori, e non si traduce quindi sempre in un risparmio economico.

Dopo decenni di sviluppo tecnologico, in cui le risorse primarie di energia sono state (eccetto che per la breve parentesi della crisi petrolifera degli anni '70) disponibili in misura superiore ai bisogni, considerazioni di risparmio economico e soprattutto di salvaguardia ambientale ci spingono adesso a limitare lo sfruttamento delle cosiddette *fonti primarie* di energia. Alcuni cenni su tali fonti sono riportati in Appendice 6-1.

Il risparmio energetico può essere perseguito quanto meno utilizzando le risorse disponibili in un modo più razionale. In un certo senso, come Pinocchio, siamo arrivati a chiederci se, dopo le pere, non sia venuto il momento di cominciare a mangiare anche le bucce e i torsoli! Alcune tecniche avanzate per un uso più razionale dell'energia, che ormai hanno raggiunto la piena maturità industriale, quali i *cicli combinati*, sono illustrati nella parte finale del capitolo; viene anche fatto cenno alla *cogenerazione*, che sarà oggetto in seguito di uno studio più dettagliato. In futuro, un maggiore ricorso a tali tecniche può permettere di risparmiare ed inquinare meno senza per questo dover contrarre eccessivamente i consumi energetici, il che porterebbe ad una depressione della produzione industriale.

Mantenere costanti i consumi di combustibile si traduce infatti non solo in un risparmio economico, ma anche nel *mantenere costanti le emissioni di prodotti di combustione*, in ottemperanza agli accordi delle conferenze di Kyoto e successive. Per l'Italia, l'emissione attuale di CO<sub>2</sub> è di circa 0.6 kg/kWh di energia elettrica prodotta, contro gli 0.12 di Francia e Svizzera, che fanno ampio ricorso alle fonti energetiche idroelettrica e nucleare.

## 2. I cicli termici utilizzati attualmente nelle macchine motrici

Nel precedente capitolo abbiamo visto che il ciclo semplice reversibile è quello che garantisce, a parità di temperature estreme, il massimo rendimento di primo principio. Il ciclo di Carnot (costituito da due adiabatiche e due isoterme) non è mai stato realizzato a causa delle difficoltà tecniche che si frappongono alla sua realizzazione. Altri due cicli termici realizzati praticamente, ovvero il ciclo Stirling (due adiabatiche e due isocore con recupero del calore) e quello Ericsson (due adiabatiche e due isobare con recupero del calore), possono essere considerati cicli semplici in quanto scambiano calore con due sole sorgenti termiche,

ma hanno trovato scarsissima applicazione pratica. Per una descrizione più approfondita di tali cicli semplici si veda Jones & Dugan, Engineering Thermodynamics, Prentice-Hall, Cap.5.

La difficoltà di realizzare cicli semplici è strettamente connessa a quella di realizzare trasformazioni isoterme. Al contrario, è possibile costruire macchine in cui avvengono trasformazioni che con ottima approssimazione (a meno delle inevitabili perdite termiche e per attrito) possono essere considerate isobare, o adiabatiche, o isovolumiche. I cicli termici delle macchine reali sono dunque basati su tali tipi di trasformazioni, come risulta dalla Tabella 1. I fluidi adottati sono quelli largamente disponibili e di basso costo, ovvero l'aria e l'acqua: nessuna alternativa valida è stata a tutt'oggi trovata, sebbene in alcuni cicli a gas si adotti l'elio o l'anidride carbonica.

Ciclo	Descrizione sommaria	Fluido	Combustione	Principali applicazioni
Rankine/Hirn	due adiabatiche e due isobare	acqua/ vapore	esterna	Propulsione navale. Centrali termoelettriche.
Joule/Brayton	due adiabatiche e due isobare	aria  elio o CO <sub>2</sub>	interna  esterna	Propulsione aeronautica Centrali termoelettriche
Combinato	ciclo Brayton e ciclo Rankine (riscaldato dai gas di scarico del Brayton) in cascata	aria e vapore	interna	Centrali termoelettriche.
Otto	due adiabatiche e due isovolumiche	aria	interna	Motori alternativi per autotrazione. Generatori elettrici di bassa potenza.
Diesel	due adiabatiche, una isobara e una isovolumica	aria	interna	Motori alternativi per autotrazione. Propulsione navale.

**Tabella 1:** Principali caratteristiche dei cicli più usati nelle macchine termiche motrici.

Nel seguito, verranno illustrate le caratteristiche dei cicli Rankine/Hirn e di quello Joule/Brayton. Si tratteranno inoltre i cicli combinati, che uniscono i due precedenti in un unico impianto di maggiore rendimento e rappresentano gli impianti di maggiore interesse nel futuro prossimo. Si esporranno quindi brevemente i cicli Otto e Diesel, caratteristici dei motori alternativi per trazione, e dei generatori elettrici di limitata potenza.

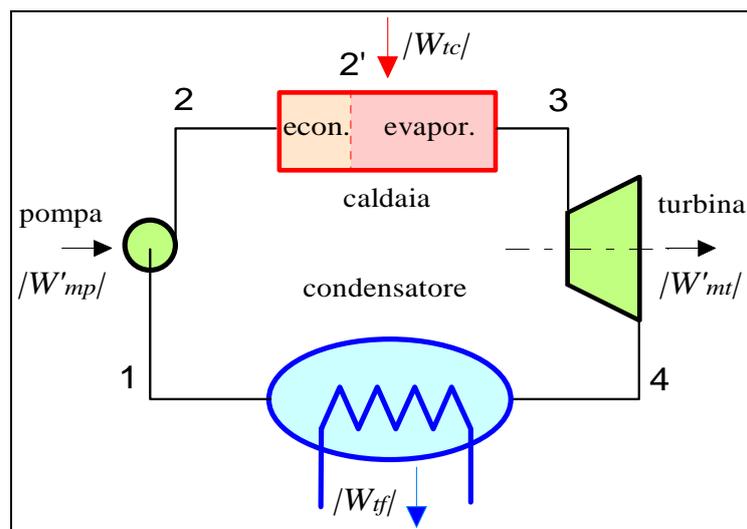
Nel corso di questo studio, faremo spesso riferimento a cicli *endoreversibili*, ovvero considereremo sistemi al cui interno non sono presenti irreversibilità. Studieremo separatamente l'effetto delle irreversibilità *interne* al ciclo.

Bisogna tenere conto che saranno comunque presenti delle *irreversibilità esterne*, dovute principalmente al fatto che sono necessarie differenze di temperatura finite per prelevare calore dalla sorgente calda e restituirlo alla sorgente fredda: la temperatura inferiore del fluido di lavoro sarà quindi lievemente maggiore di quella ambiente, e la temperatura superiore del fluido di lavoro sarà inferiore (in taluni casi anche largamente) a quella della sorgente calda. Questo implica una riduzione di rendimento rispetto a quello che si avrebbe utilizzando completamente il salto di temperatura disponibile. Per ridurre tali differenze al minimo, aumentando il salto termico (tra le temperature medie di scambio superiore ed inferiore)

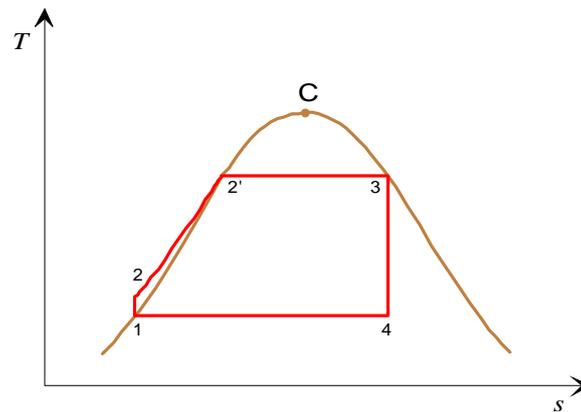
effettivamente a disposizione del ciclo e quindi il rendimento termodinamico, sono necessari scambiatori di calore ad alta efficienza.

### 3. Il ciclo Rankine/Hirn

Il ciclo di Rankine/Hirn (nel seguito lo si definirà semplicemente ciclo Rankine) è quello caratteristico delle macchine a vapore, usate attualmente principalmente per la produzione di energia elettrica, in impianti fissi che raggiungono la potenza complessiva di 1200 MW ed oltre. Sta invece cadendo rapidamente in disuso nella trazione ferroviaria (locomotive a vapore), sostituito dalla trazione elettrica o dal motore Diesel, e nella propulsione navale, in cui viene soppiantato dal Diesel a due o quattro tempi. Come vedremo meglio in seguito, il punto di forza di tale ciclo è la bassa quantità di energia richiesta per la compressione del fluido, dato che essa avviene allo stato liquido; ricordiamo che (vedi Cap.4) essendo il lavoro di compressione proporzionale a  $vdp$ , è sempre opportuno comprimere il fluido nello stato più denso (a minore volume specifico) possibile. La temperatura massima del vapore non supera attualmente i 550-620 °C, per evitare danni ai primi stadi della turbina ed ai fasci tubieri del generatore di vapore. Si raggiungono rendimenti di primo principio dell'ordine del 40-45 %, che potrebbero ulteriormente aumentare negli impianti cosiddetti *ultra super critici*, di cui parleremo in seguito.



**Figura 1:** Componenti principali di un impianto a vapore saturo.



**Figura 2:** Ciclo Rankine a vapore saturo sul diagramma  $T$ - $s$ .

**Ciclo Rankine a vapore saturo.**

I componenti principali di un impianto a ciclo Rankine sono illustrati in Fig.1. L'impianto è costituito da quattro organi, schematizzabili individualmente come sistemi aperti a regime, che nel loro complesso costituiscono un sistema chiuso. Il ciclo lavora fra due pressioni, quella superiore (dei punti 2 e 3) e quella inferiore, dei punti 4 e 1. Le trasformazioni sono rappresentate nel diagramma  $T$ - $s$  in Fig.2.

Il liquido saturo (punto 1) a bassa pressione e temperatura viene compresso isoentropicamente fino alla pressione  $p_2$ . L'aumento di temperatura in questa trasformazione è trascurabile, dato che il fluido può essere considerato incomprimibile (se fosse esattamente tale, l'aumento di temperatura sarebbe nullo, vedi Cap.2). La potenza meccanica assorbita in questa trasformazione,  $W'_{mp}$ , è trascurabile rispetto a quella erogata dalla turbina. Il liquido compresso e sottoraffreddato viene quindi immesso in una caldaia, in cui avviene la trasformazione isobara 2-3: esso raggiunge dapprima la temperatura di saturazione (punto 2') e successivamente evapora a pressione, e quindi anche a temperatura costante, fino alle condizioni di vapore saturo secco (punto 3). In tale trasformazione, esso assorbe dalla sorgente calda la potenza termica  $W'_{tc}$ . Il vapore viene quindi immesso nella turbina, dove si espande isoentropicamente fino alla pressione  $p_4$ , erogando la potenza  $W'_{mt}$ . Il vapore saturo all'uscita della turbina viene immesso nel condensatore, dove condensa a temperatura e pressione costanti (trasformazione isotermodarica) fino a tornare alle condizioni iniziali di liquido saturo, punto 1. In quest'ultima trasformazione, esso cede alla sorgente fredda (in genere l'ambiente) la potenza termica  $W'_{tf}$ . La potenza meccanica utile,  $W'_{mu}$ , è data dalla differenza tra quella erogata dalla turbina e quella di pompaggio

$$|W'_{mu}| = |W'_{mt}| - |W'_{mp}| \tag{7.1}$$

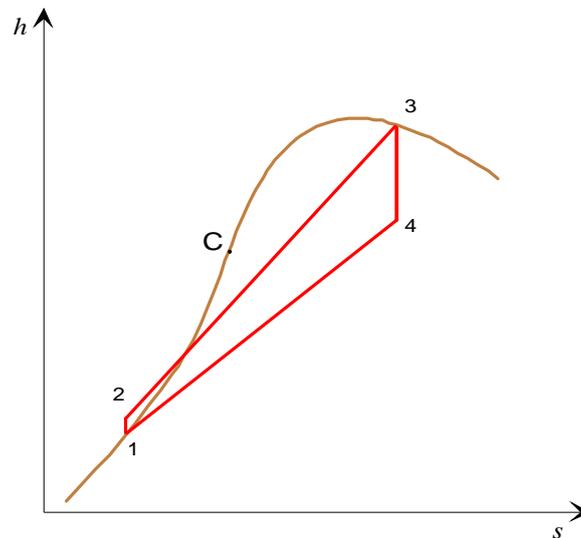
Il bilancio di energia, considerando come sistema il complesso dei quattro organi (sistema chiuso a regime) risulta in

$$W'_{tc} + W'_{tf} = W'_{mt} + W'_{mp} \tag{7.2}$$

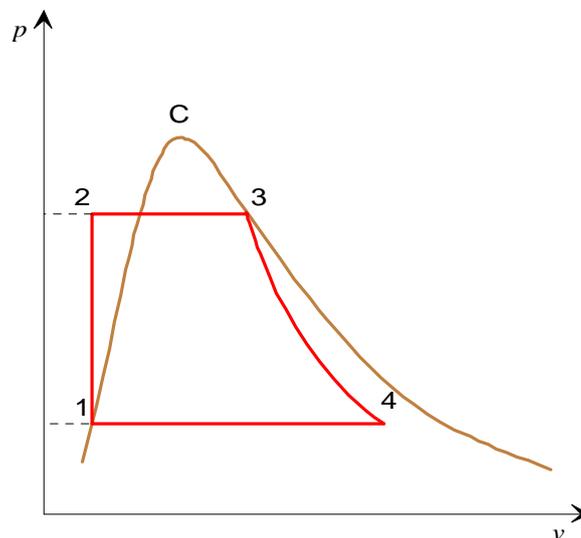
Nel diagramma  $T$ - $s$ , le aree sottese dalle trasformazioni 2-3 e 4-1 rappresentano il calore scambiato per unità di massa rispettivamente con la sorgente calda (positivo) e la sorgente fredda (negativo): la differenza dei loro valori assoluti, ovvero l'area del ciclo, rappresenta il

lavoro utile per unità di massa, che moltiplicato per la portata in massa, dà la potenza meccanica utile,  $W'_{mu}$ .

Il ciclo termico può essere rappresentato anche nel diagramma di Mollier,  $h-s$ , (Fig.3) o in quello  $p-v$  (Fig.4) Da quest'ultimo risulta evidente che il lavoro di pompaggio ( $-\int v dp$ , vedi Cap.1) nella trasformazione 1-2 è trascurabile rispetto a quello di espansione nella trasformazione 3-4. Nei casi pratici, tali lavori stanno indicativamente nel rapporto 1:100.



**Figura 3:** Ciclo Rankine a vapore saturo sul diagramma di Mollier ( $h-s$ ).



**Figura 4:** Ciclo Rankine a vapore saturo sul diagramma  $p-v$ .

I bilanci di energia dei quattro organi (sistemi aperti a regime) danno rispettivamente

$$\text{pompa (1-2)} \quad W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) \quad (7.3)$$

$$\text{caldaia (2-3)} \quad W_{tc} = G(h_3 - h_2) \quad (7.4)$$

$$\text{turbina (3-4)} \quad W'_{mt} = G(h_3 - h_4) \quad (7.5)$$

$$\text{condensatore (4-1)} \quad W_{cf} = -G(h_4 - h_1) \quad (7.6)$$

Dove si è supposto che i due scambiatori siano a pareti indeformabili (lavoro nullo) e la turbina e la pompa adiabatiche. Il rendimento di primo principio è dato quindi da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{W'_{mt} - |W'_{mp}|}{W_{tc}} = \frac{G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1)}{G(h_3 - h_2)} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} \quad (7.7)$$

Dato che il lavoro di compressione è trascurabile, e che quindi  $h_2 \cong h_1$ , la espressione precedente si può approssimare come

$$\eta \cong \frac{(h_3 - h_4)}{(h_3 - h_1)} \quad (7.8)$$

con il vantaggio che  $h_1$  è facilmente ottenibile dalle tabelle del vapore saturo. La procedura per il calcolo del rendimento è riportata nel successivo esempio 7.1.

La portata massica unitaria (*PMU*) ovvero la portata di fluido necessaria per produrre 1 W di potenza meccanica utile è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = \frac{1}{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)} \cong \frac{1}{(h_3 - h_4)} \quad (7.9)$$

Dalla equazione precedente, si può anche dedurre che la *PMU* è inversamente proporzionale all'area del ciclo sul piano *T-s*.

Il rendimento di secondo principio è dato da

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} \quad (7.10)$$

dove è necessario esprimere le temperature in kelvin.

La scelta delle temperature che compaiono nel rendimento della macchina di Carnot è per certi versi arbitraria: si possono scegliere le temperature estreme del ciclo, come è stato fatto sopra, oppure, considerando che il calore è originariamente disponibile alla temperatura di combustione, la temperatura di combustione stessa (circa 1200 °C) e quella dell'ambiente, che è leggermente inferiore (di 10-15 K) alla  $T_4$ .

Una espressione alternativa del rendimento di primo principio può essere ricavata introducendo il concetto di temperatura media di scambio. Da quanto visto sull'analisi di disponibilità nel Cap.6, per una macchina ciclica reversibile

$$\eta = 1 - \frac{T_{mF}}{T_{mC}} \quad (7.11)$$

Dove  $T_{mC}$  e  $T_{mF}$  sono le temperature medie di scambio superiore ed inferiore, già definite nello stesso Cap. 6 come

$$T_{mC} = \frac{\sum_i |W_{TC,i}|}{\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i}}, \quad T_{mF} = \frac{\sum_j |W_{TF,j}|}{\sum_j \frac{|W_{TF,j}|}{T_j}} \quad (7.12)$$

E' evidente quindi che qualunque azione che incrementi la  $T_{mC}$  o riduca la  $T_{mF}$  ha come conseguenza un aumento di rendimento. Ma possiamo vedere adesso come si può arrivare ad una semplice interpretazione fisica delle temperature medie di scambio. Limitandoci per semplicità alla sola  $T_{mC}$  (ma il discorso sarebbe completamente analogo per la  $T_{mF}$ ), possiamo scrivere

$$T_{mC} = \frac{\sum_i |W_{TC,i}|}{\sum_i \frac{|W_{TC,i}|}{T_i}} = \frac{G(h_3 - h_2)}{G \int_2^3 \frac{dh}{T}} \quad (7.13)$$

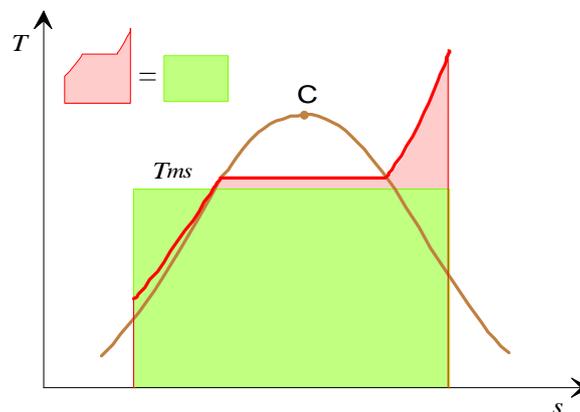
ma dalla seconda equazione di Gibbs, per un processo isobaro, si ha

$$dh = Tds + vdp = Tds \quad (7.14)$$

e quindi,

$$T_{mC} = \frac{G(h_3 - h_2)}{G \int_2^3 \frac{T ds}{T}} = \frac{h_3 - h_2}{\int_2^3 ds} = \frac{h_3 - h_2}{s_3 - s_2} \quad (7.15)$$

Dalla equazione precedente e dalla Fig.5 si può vedere che, sul diagramma,  $T-s$  la  $T_{mC}$  rappresenta graficamente l'altezza di un rettangolo che ha la stessa area di quella sottesa dalla trasformazione 2-3. Infatti il calore scambiato reversibilmente per unità di massa nella trasformazione isobara 2-3 è rappresentato, oltre che dal salto entalpico, dall'area sottesa dalla curva stessa (vedi Cap.1).



**Figura 5:** Rappresentazione grafica della temperatura media di scambio superiore.

Analogamente si può definire la temperatura media di scambio inferiore come

$$T_{mF} = \frac{h_4 - h_1}{s_4 - s_1} \quad (7.16)$$

E dato che la trasformazione 4-1 avviene a temperatura costante, la  $T_{mF}$  in questo caso è semplicemente la temperatura al condensatore.

Il ciclo Rankine a vapore saturo viene scarsamente utilizzato in pratica poiché il vapore a titolo relativamente basso alla fine della espansione contiene una frazione di liquido troppo elevata. Tale liquido, in forma di gocce, provoca un precoce danneggiamento per erosione delle palette degli ultimi stadi della turbina. Tuttavia, esso può risultare conveniente per applicazioni a bassa temperatura del vapore (fino a 300 °C) oppure quando l'espansore, anziché una turbina, è una macchina a pistoni (locomotive, vecchi impianti navali). Negli altri casi, si procede a *surriscaldare* il vapore, come esposto nel successivo paragrafo.

Come già accennato, il ciclo di Rankine è stato largamente usato in passato per la trazione ferroviaria nelle locomotive a vapore: in questo caso, dato che un condensatore mobile è tecnicamente improponibile, l'impianto lavora in ciclo aperto scaricando il vapore nell'atmosfera, alla pressione di 1 bar. E' quindi necessario trasportare nel tender (il piccolo rimorchio che segue la locomotiva), oltre al combustibile, anche l'acqua necessaria per l'intero viaggio.

**ESEMPIO 7-1 –Ciclo Rankine a vapore saturo.**

Un ciclo Rankine a vapore saturo lavora tra le pressioni di ammissione in turbina di 100 bar e la pressione al condensatore di 0.04 bar. La portata di vapore vale  $G = 30$  kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

 *I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKINE.XLS (che richiede la libreria TPX). Alternativamente si può utilizzare il programma RACY (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori).*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella tabella seguente. Notare che i punti 1 e 3 sono completamente determinati dal punto di vista termodinamico, dato che per essi si conoscono due proprietà di stato indipendenti; i punti 2 e 4 sono determinati dalla pressione e dal valore dell'entropia, che è uguale rispettivamente a quella dei punti 1 e 3 determinati in precedenza.

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m <sup>3</sup> /kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.0009996	131.5	0.4226	
3.	311.1	10	0.01803	2725	5.614	1
4.	28.96	0.004	22.44	1690	5.614	0.6447

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = 0.395$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} = \frac{39.5}{48.3} = 81.8\%$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1) = 30.8 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G(h_3 - h_2) = 77.8 \text{ MW}$$

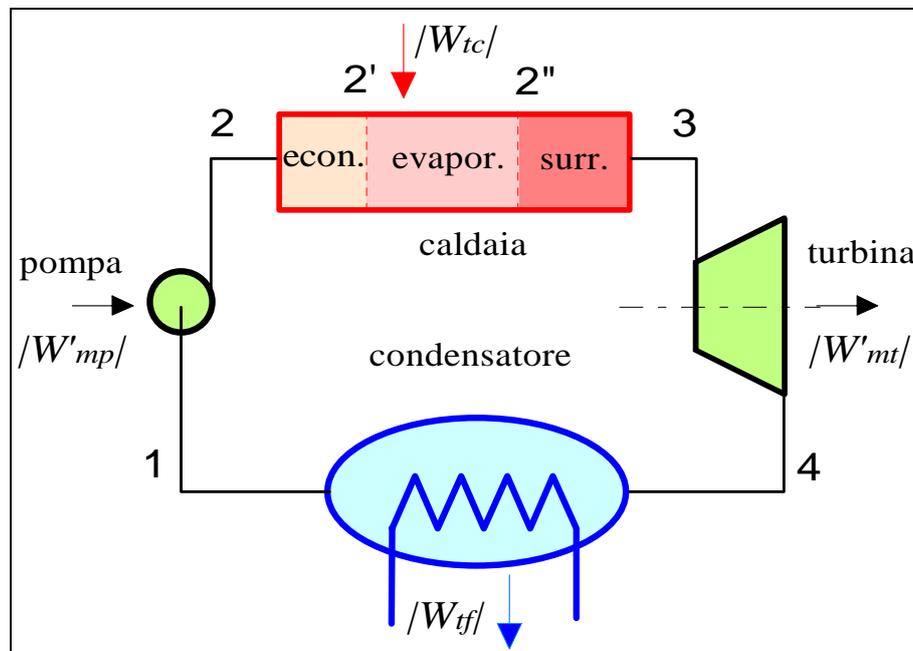
ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.97 \text{ kg/MJ}$$

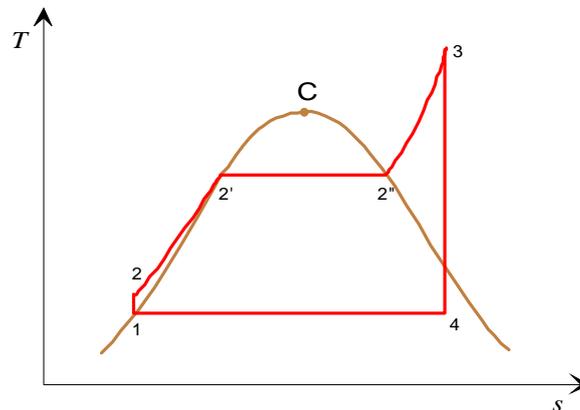
□

### Ciclo Rankine a vapore surriscaldato.

Il ciclo Rankine a vapore surriscaldato viene anche indicato come ciclo Hirn. Abbiamo già accennato come una riduzione eccessiva del titolo del vapore comporti un rapido danneggiamento delle palettature degli ultimi stadi della turbina. Per ovviare a questo inconveniente, si può introdurre il vapore in turbina nello stato surriscaldato: questo implica che nell'impianto, a valle dell'evaporatore, si debba aggiungere un ulteriore componente detto *surriscaldatore* (v. Fig.6). Il ciclo si modifica come indicato sul diagramma *T-s* in Fig.7. Le equazioni di bilancio e le espressioni dei rendimenti e della *PMU* rimangono inalterate, Eqq. (7.3)-(7.9). E' intuitivo che il surriscaldamento porta ad un aumento della temperatura media di scambio superiore, con un conseguente miglioramento del rendimento. Contemporaneamente, la *PMU* diminuisce, a causa del maggiore salto entalpico disponibile in turbina.



**Figura 6:** Componenti principali di un impianto a vapore surriscaldato.



**Figura 7:** Ciclo Rankine a vapore surriscaldato sul diagramma T-s.

**ESEMPIO 7-2 –Ciclo Rankine a vapore surriscaldato.**

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. La portata di vapore vale  $G = 30 \text{ kg/s}$ . Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

*I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKINE.XLS (che richiede la libreria TPX). Alternativamente si può utilizzare il programma RACY (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori).*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m <sup>3</sup> /kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.001	131.5	0.4226	
3.	500	10	0.03279	3374	6.597	
4.	28.96	0.004	26.68	1987	6.597	0.7668

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = 42.5\%$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} = \frac{42.5}{60.9} = 69.8\%$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1) = 41.3 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G(h_3 - h_2) = 97.3 \text{ MW}$$

ed infine la PMU è data da

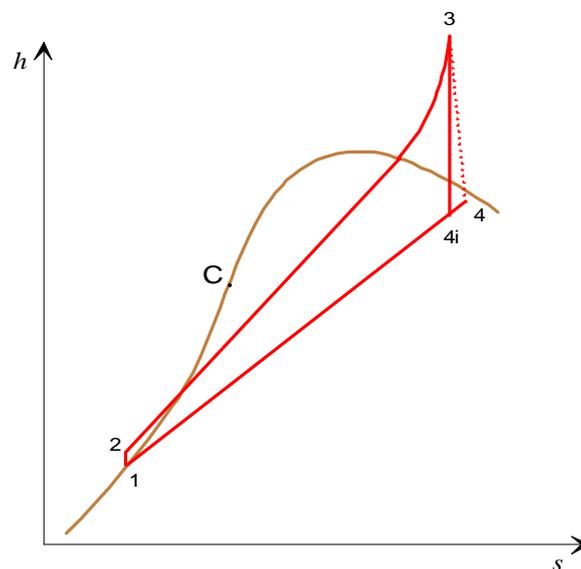
$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.72 \text{ kg/MJ}$$



### ***Effetto delle irreversibilità nel ciclo Rankine***

Ogni componente del ciclo Rankine presenta un certo grado di irreversibilità, che riduce le prestazioni del ciclo rispetto al caso ideale. Le irreversibilità nella pompa hanno un effetto trascurabile, per il basso valore della potenza richiesta. Parimenti, le cadute di pressione nel condensatore hanno un effetto trascurabile. Le cadute di pressione tra pompa e turbina possono arrivare a circa 30 bar in un impianto termoelettrico tradizionale (incluso l'attraversamento di tutti i preriscaldatori) su una pressione di ammissione del vapore in turbina di circa 170 bar: dato il basso valore della potenza di pompaggio del fluido, anche queste hanno tutto sommato una influenza trascurabile. Le irreversibilità nella turbina sono comunque le più rilevanti: abbiamo già visto che il rendimento isoentropico della turbina oscilla all'incirca tra 0.85 e 0.90: tale valore comporta una corrispondente riduzione della potenza erogata dalla turbina, e quindi del rendimento di primo e secondo principio. L'unico piccolo vantaggio della irreversibilità della turbina consiste nel fatto che il vapore in uscita ha un titolo maggiore rispetto al caso ideale, vedi Fig.8.

Un'altra grossa fonte di irreversibilità, che noi però abbiamo considerato *esterna* al ciclo, è dovuta allo scambio termico con elevata differenza di temperatura in caldaia fra i prodotti di combustione (circa 1200 °C) ed il vapore, che non supera i 600 °C. Questo comporta la distruzione di una rilevante aliquota di disponibilità dei fumi stessi. Vedremo successivamente come il ciclo combinato ponga rimedio a questo inconveniente.



**Figura 8:** Ciclo Rankine a vapore surriscaldato sul diagramma  $h$ - $s$ : confronto tra espansione in turbina reversibile ed irreversibile.

**ESEMPIO 7-3 –Ciclo Rankine a vapore surriscaldato con espansione reale.**

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. Il rendimento isoentropico di espansione è dell'85%. La portata di vapore vale  $G = 30 \text{ kg/s}$ . Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

☐ *I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKINE.XLS (che richiede la libreria TPX). Alternativamente si può utilizzare il programma RACY (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori).*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m <sup>3</sup> /kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.001	131.5	0.4226	
3.	500	10	0.03279	3374	6.597	
4i.	28.96	0.004	26.68	1987	6.597	0.7668
4r.	28.96	0.004	29.66	2195	7.285	0.8523

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_{4r}) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} = 36\%$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_4}{T_3}} = 59.1\%$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G(h_3 - h_{4r}) - G(h_2 - h_1) = 35.1 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{ic} = G(h_3 - h_2) = 97.3 \text{ MW}$$

ed infine la *PMU* è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.85 \text{ kg/MJ}$$

☐

**Miglioramento delle prestazioni del ciclo Rankine**

Ogni miglioramento del rendimento di primo principio comporta, secondo la Eq.(7.11), un abbassamento della  $T_{mF}$  od un innalzamento della  $T_{mC}$ . Per cui, le possibili azioni possono essere classificate come segue.

- *Mantenere più bassa possibile la pressione nel condensatore*, compatibilmente con la temperatura dell'ambiente esterno e con il salto di temperatura comunque necessario per trasferire il calore all'ambiente stesso. Il condensatore opera tipicamente a temperature di 30-35 °C, cui corrisponde una pressione di saturazione di circa 5 kPa: sono necessari pertanto organi ausiliari che rimuovano con continuità i gas incondensabili (frutto delle

reazioni di corrosione o delle infiltrazioni dall'esterno) che inevitabilmente tendono ad accumularsi nel condensatore stesso.

Gli impianti aperti, privi di condensatore, che scaricano il vapore saturo nell'atmosfera a pressione di circa 1 bar, hanno una temperatura media inferiore di scambio di 100 °C e subiscono quindi una forte penalizzazione di rendimento. Per tale motivo, oltre che per riciclare l'acqua di processo, il condensatore è sempre presente negli impianti fissi.

- *Aumentare la temperatura di ammissione in turbina:* attualmente, come detto in precedenza, il limite tecnologico è attualmente di circa 620 °C, ed è imposto principalmente dalla resistenza alle sollecitazioni termomeccaniche delle tubazioni del surriscaldatore; molti impianti ENEL lavorano a 538 °C.
- *Aumentare la pressione di esercizio della caldaia:* questa azione aumenta la  $T_{mC}$ , ma, come ci si può facilmente rendere conto per mezzo del diagramma  $T-s$ , ha come conseguenza indesiderata (a parità di temperatura di ammissione in turbina) una riduzione del titolo in uscita dalla turbina. Sono quindi necessari uno o più risurriscaldamenti, come esposto in seguito. Inoltre, aumentano le sollecitazioni meccaniche sui fasci tubieri della caldaia. In alcuni impianti (impianti *ipercritici*, tipo la centrale termoelettrica di La Spezia) la pressione in caldaia supera la pressione critica dell'acqua, che vale 22.09 MPa.

Negli impianti termoelettrici a vapore, la pressione di esercizio è salita negli anni da 70 bar agli attuali 170 bar. L'impianto ipercritico di La Spezia ha una pressione di ammissione in turbina di circa 250 bar. Negli impianti di prossima generazione, detti *ultra super critici*, si prevede di arrivare a condizioni di ammissione in turbina di 620 °C e 300 bar.

- *Risurriscaldare il vapore:* si fraziona l'espansione, rinviando il vapore in caldaia tra un'espansione e l'altra. Questa tecnica è illustrata in dettaglio in un paragrafo successivo.
- *Preriscaldare l'acqua di alimento* della caldaia sfruttando piccole quantità di vapore prelevato (*spillato*) dalla turbina. Dall'esame del ciclo di Rankine, Fig.2, si nota che il riscaldamento dell'acqua dalla temperatura di uscita della pompa ( $T_2 \cong T_1$ ) a quella di saturazione  $T_2'$ , comporta un notevole abbassamento della  $T_{mC}$ . Con lo spillamento, il riscaldamento dell'acqua a bassa temperatura viene effettuato a spese di uno scambio di energia interno al ciclo: la prima parte della trasformazione 2-2' è pertanto adiabatica rispetto all'esterno, e di conseguenza non deve essere tenuta in conto nel calcolo della temperatura media superiore di scambio. L'effetto complessivo è quindi un aumento della  $T_{mC}$ , e quindi del rendimento. Tale tecnica, detta degli *spillamenti*, o *rigenerazione*, è largamente adottata in pratica e viene discussa in dettaglio in un paragrafo successivo.

### **Il ciclo Rankine con risurriscaldamento**

Lo schema a blocchi di questo impianto è riportato in Fig.9 ed il relativo diagramma  $T-s$  in Fig.10. Dopo una prima espansione in turbina, fino alla pressione intermedia  $p_i$ , il vapore viene riportato in caldaia, dove viene nuovamente surriscaldato fino alla massima temperatura del ciclo in un apposito fascio tubiero, detto appunto *risurriscaldatore*, e nuovamente inviato agli stadi a media e bassa pressione della turbina.

La potenza meccanica erogata è la somma delle aliquote relative alle due turbine

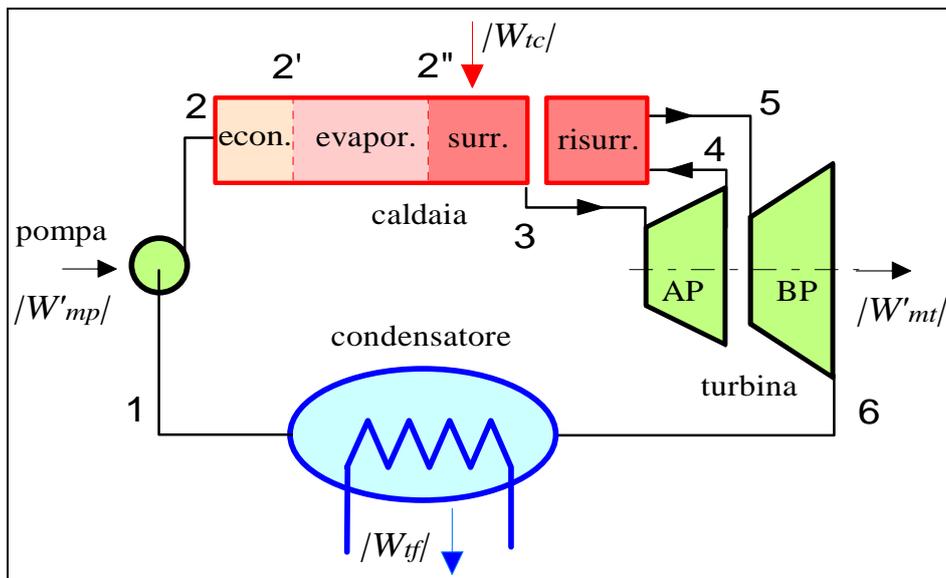
$$W'_{mt} = G(h_3 - h_4) + G(h_5 - h_6) \quad (7.17)$$

D'altra parte, anche la potenza termica da fornire è la somma di due aliquote

$$W_{ic} = G(h_3 - h_2) + G(h_5 - h_4) \quad (7.18)$$

E conseguentemente il rendimento di primo principio (trascurando la potenza di pompaggio) si esprime come

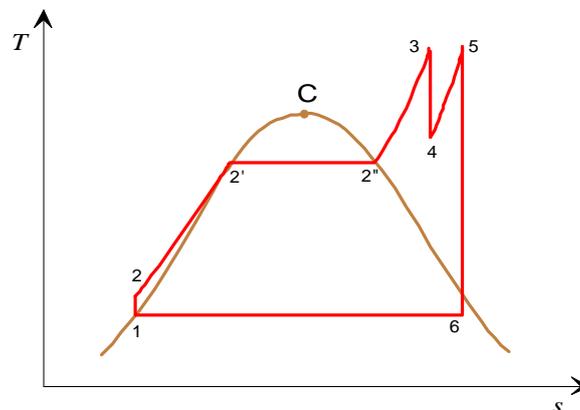
$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6)}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} \quad (7.19)$$



**Figura 9:** Componenti principali di un impianto a vapore con risurriscaldamento.

I vantaggi principali di tale procedura sono:

- *aumento del titolo in uscita* dalla turbina senza aumento della temperatura nella stessa: è questa la principale ragione per cui si esegue il risurriscaldamento;
- *lieve aumento del rendimento*, conseguente a quello della  $T_{mC}$ , se la pressione di risurriscaldamento è superiore ad un determinato valore.
- *diminuzione della PMU*, associata all'aumento dell'area del ciclo sul diagramma  $T-s$ .



**Figura 10:** Ciclo Rankine a vapore con risurriscaldamento sul diagramma  $T-s$ .

**ESEMPIO 7-4 –Ciclo Rankine con risurriscaldamento.**

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. Il vapore viene risurriscaldato fino a 500 °C alla pressione di 40 bar. La portata di vapore vale  $G = 30 \text{ kg/s}$ . Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

*I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKRIS.XLS (che richiede la libreria TPX). Alternativamente si può utilizzare il programma RACY (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori).*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m3/kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.18	10	0.001	131.5	0.4226	
3.	500	10	0.03279	3374	6.597	
4.	353.7	4	0.06697	3102	6.597	
5.	500	4	0.08643	3445	7.09	
6.	28.96	0.004	28.82	2136	7.09	0.828

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) + (h_5 - h_6)}{(h_3 - h_2) + (h_5 - h_4)} = 43.8\%$$

e quello di secondo principio  $\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 71.9\%$

La potenza meccanica utile è data da  $W'_{mu} = G(h_3 - h_4) + G(h_5 - h_6) - G(h_2 - h_1) = 47.1 \text{ MW}$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da  $W_{tc} = G(h_3 - h_2) + G(h_5 - h_4) = 108 \text{ MW}$

ed infine la  $PMU$  è data da  $PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.637 \text{ kg/MJ}$

La seguente tabella riporta i valori dei principali parametri in funzione della pressione di risurriscaldamento, a parità di altri dati:

$p_4$	$x_6$	$\eta$	$W'_{mu}$	$PMU$
bar	%	%	MW	kg/MJ
80	78	43	43	0.698
60	80	43.4	44.9	0.668
40	82.8	43.8	47.1	0.637
30	85	44	48.4	0.620
20	87	44	49.9	0.601
10	91	43.7	51.6	0.581
5	95	43.1	52.7	0.569

da essa si vede che il risurriscaldamento a pressioni troppo basse può portare ad una diminuzione di rendimento.



**Il ciclo Rankine con spillamento**

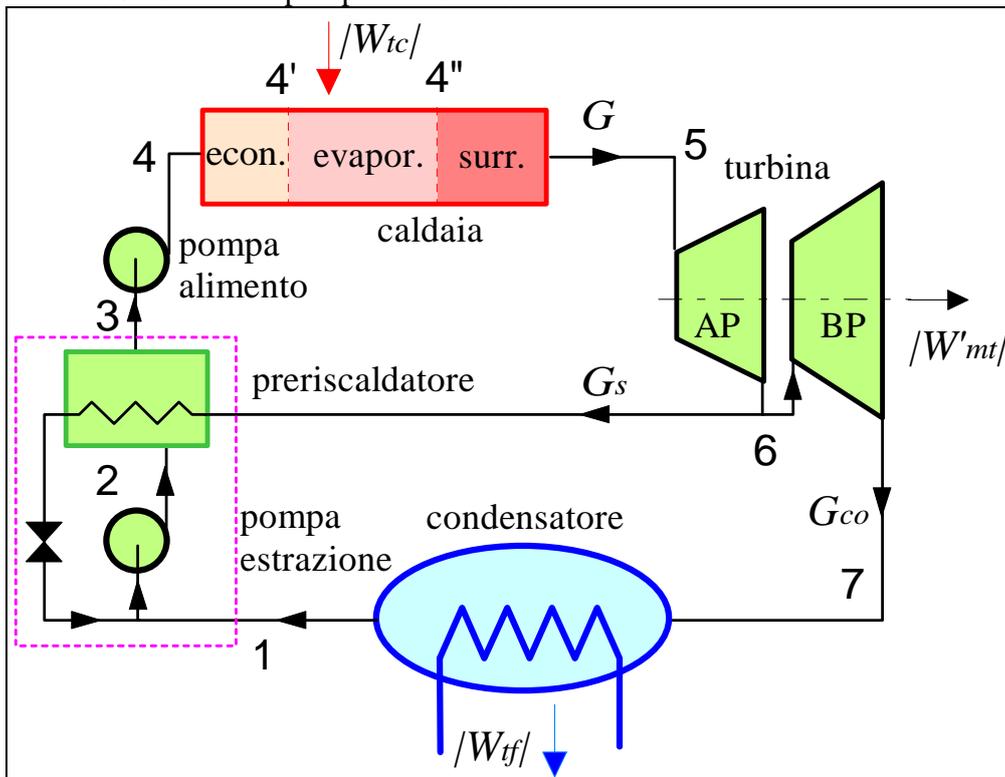
Lo schema a blocchi di questo impianto è riportato in Fig.11. Il vapore spillato dalla turbina AP viene inviato ad uno scambiatore (detto preriscaldatore) dove esso condensando cede calore all'acqua di alimento. Il condensato viene quindi reimmesso nella linea di alimentazione, previa laminazione, in corrispondenza del punto 1. Come si vedrà in seguito, questo primo schema rappresenta il processo di preriscaldamento in forma semplificata rispetto all'impianto reale, ma concettualmente corretta. Nell'impianto sono presenti due pompe, una a monte ed una a valle del preriscaldatore, che opera quindi ad una pressione intermedia tra  $p_1$  e  $p_4$ . Il ciclo risultante è riportato in Fig.12: in realtà esso consiste nella sovrapposizione dei due cicli, uno dei quali (3-4-5-6) effettuato dal fluido spillato e l'altro (1-4-5-7) effettuato dal fluido che si espande anche nella turbina BP. Per tale motivo, l'area totale del ciclo in questo caso non è pari al lavoro per unità di massa.

Si definisce *rapporto di spillamento* la quantità

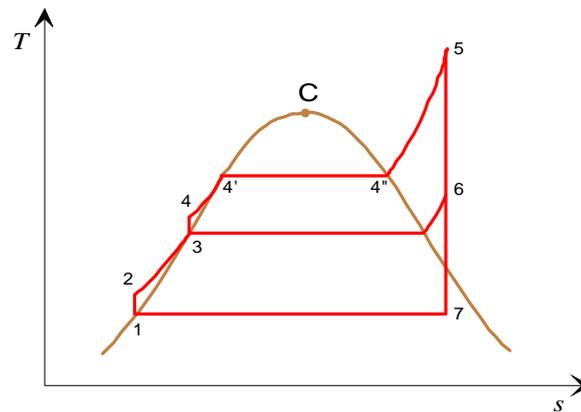
$$Y = \frac{G_s}{G} = \frac{G_s}{G_s + G_{co}} \quad (7.20)$$

Per studiare il ciclo a spillamento, si fanno le seguenti assunzioni:

- il fluido uscente dal preriscaldatore (punto 3) è liquido saturo alla pressione dello spillamento ( $p_3 = p_6$ );
- la potenza assorbita dalle pompe è trascurabile.



**Figura 11:** Componenti principali di un impianto a vapore surriscaldato con spillamento.



**Figura 12:** Ciclo Rankine a vapore con spillamento sul diagramma  $T$ - $s$ .

Con tali ipotesi, possiamo determinare il valore della portata da spillare (o di  $Y$ ) facendo il bilancio energetico del sistema incluso nella linea tratteggiata in Fig.11 (in pratica, uno scambiatore a miscelamento)

$$\begin{aligned}
 G_s h_6 + G_{co} h_1 &= (G_s + G_{co}) h_3 \\
 \frac{G_{co}}{G_s} &= \frac{h_6 - h_3}{h_3 - h_1} \quad (7.21) \\
 Y = \frac{G_s}{G} &= \frac{1}{1 + \frac{G_{co}}{G_s}} = \frac{h_3 - h_1}{h_6 - h_1}
 \end{aligned}$$

Il rendimento di primo principio è espresso da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W'_{tc}} \cong \frac{W'_{mt}}{W'_{tc}} = \frac{G(h_5 - h_6) + G_{co}(h_6 - h_7)}{G(h_5 - h_4)} = \frac{(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)}{(h_5 - h_4)} \quad (7.22)$$

Sebbene non sia evidente a prima vista, ci si può convincere che  $\eta$  aumenta notando che, come detto in precedenza, si eliminano scambi termici a bassa temperatura e quindi si aumenta  $T_{mC}$ .

Un difetto di questa procedura è che, in conseguenza della riduzione di portata nella turbina BP, la  $PMU$  aumenta, come risulta da (sempre trascurando la potenza di pompaggio)

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = \frac{G}{G(h_5 - h_6) + G_{co}(h_6 - h_7)} = \frac{1}{(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)} \quad (7.23)$$

Tuttavia si ha anche un vantaggio consistente nella riduzione di dimensioni del condensatore e degli stadi di bassa pressione della turbina, che sono attraversati da una portata di vapore ridotta. La tecnica degli spillamenti, combinati con uno o più surriscaldamenti, è ampiamente utilizzata negli impianti termoelettrici in cui si eseguono tipicamente sette-otto spillamenti, per una portata totale di vapore spillato che può raggiungere il 60-70%.

La pressione a cui si effettua lo spillamento è un parametro suscettibile di ottimizzazione: si potrebbe dimostrare che il massimo aumento di rendimento si ottiene se lo spillamento viene

realizzato alla temperatura media tra quelle di saturazione delle pressioni inferiore e superiore del ciclo, ovvero  $T_6 = (T_4 + T_7)/2$ .

Di solito si eseguono spillamenti multipli, a diverse pressioni: il grafico di Fig.13 mostra tuttavia che il rendimento tende ad un asintoto orizzontale all'aumentare del numero di spillamenti.

**ESEMPIO 7-5 –Ciclo Rankine con spillamento.**

Un ciclo Rankine a vapore surriscaldato lavora tra le pressioni e temperatura di ammissione in turbina di 100 bar e 500 °C e la pressione al condensatore di 0.04 bar. Il vapore viene spillato alla pressione di 20 bar. La portata di vapore vale  $G = 30$  kg/s. Determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta in caldaia e la portata massica unitaria.

*I calcoli sono eseguiti tramite il foglio di calcolo EXCEL C7RANKSPIL.XLS (che richiede la libreria TPX). Alternativamente si può utilizzare il programma RACY (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori).*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	m3/kg	kJ/kg	kJ/kg/K	
1.	28.96	0.004	0.001004	121.4	0.4226	0
2.	29.01	2	0.001003	123.4	0.4226	
3.	212.4	2	0.001177	908.8	2.447	0
4.	213.9	10	0.00117	918.2	2.447	
5.	500	10	0.03279	3374	6.597	
6.	260.8	2	0.1146	2930	6.597	
7.	28.96	0.004	26.68	1987	6.597	0.7668

Il rapporto di spillamento è dato da

$$Y = \frac{h_3 - h_1}{h_6 - h_1} = 0.28$$

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)}{(h_5 - h_4)} = 45.3\%$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_c} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_7}{T_5}} = 0.74$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G [(h_5 - h_6) + (1 - Y)(h_6 - h_7)] = 33.4 \text{ MW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G (h_5 - h_4) = 73.7 \text{ MW}$$

ed infine la PMU è data da

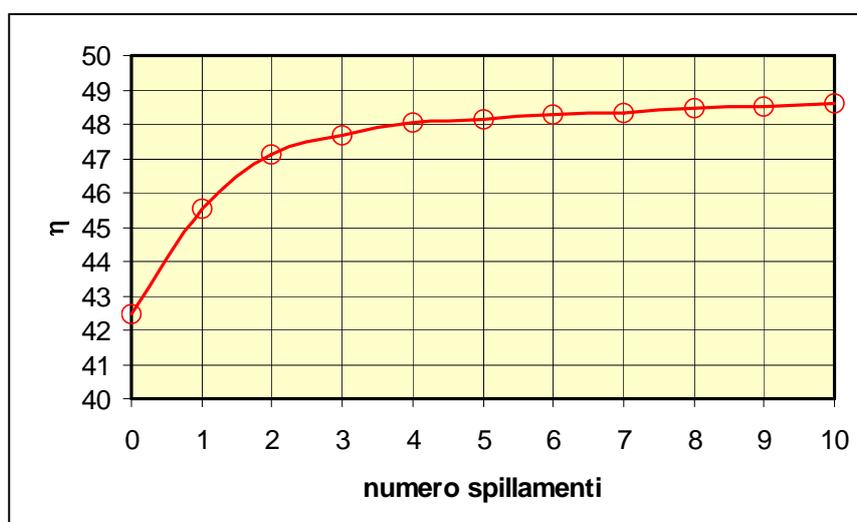
$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.898 \text{ kg/MJ}$$

La seguente tabella riporta i valori dei principali parametri in funzione della pressione dello spillamento, a parità di altri dati:

$p_6$	$T_6$	$\eta$	$W'_{mu}$	$PMU$	$Y$
bar	°C	%	MW	kg/MJ	%
40	354	44.6	30.5	0.983	32
30	313	45.0	31.8	0.943	30
20	261	45.3	33.4	0.898	28
10	182	45.5	35.5	0.845	24
7	165	45.6	36.4	0.824	22
5	152	45.5	37.2	0.807	20
2	120	45.3	38.8	0.773	16

da essa emerge la convenienza di spillare a basse pressioni e si nota che il rendimento ha un massimo alla temperatura di spillamento che è la media tra quelle di saturazione alla pressione inferiore e superiore (nel nostro caso  $(311+29)/2 = 170$  °C).

□



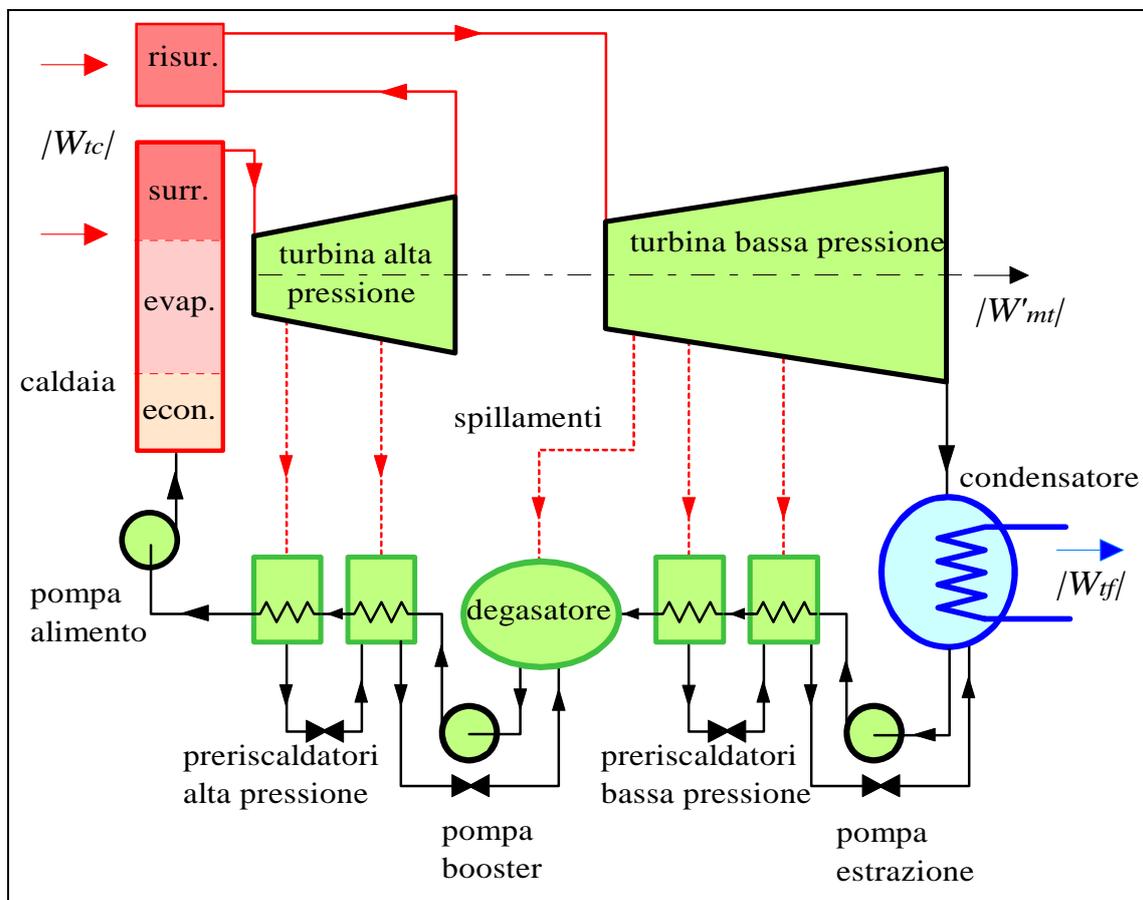
**Figura 13:** Andamento del rendimento all'aumentare del numero di spillamenti.

Negli impianti di maggior potenza (v.Fig.14), gli spillamenti sono organizzati in due gruppi, ad alta pressione (*preriscaldatori di alta*) e a bassa pressione (*preriscaldatori di bassa*), separati da un componente, detto *degassatore*, che oltre al preriscaldamento assolve lo scopo di rimuovere i gas incondensabili che sono presenti nel vapore o vi si accumulano a causa delle infiltrazioni d'aria nella sezione subatmosferica dell'impianto.

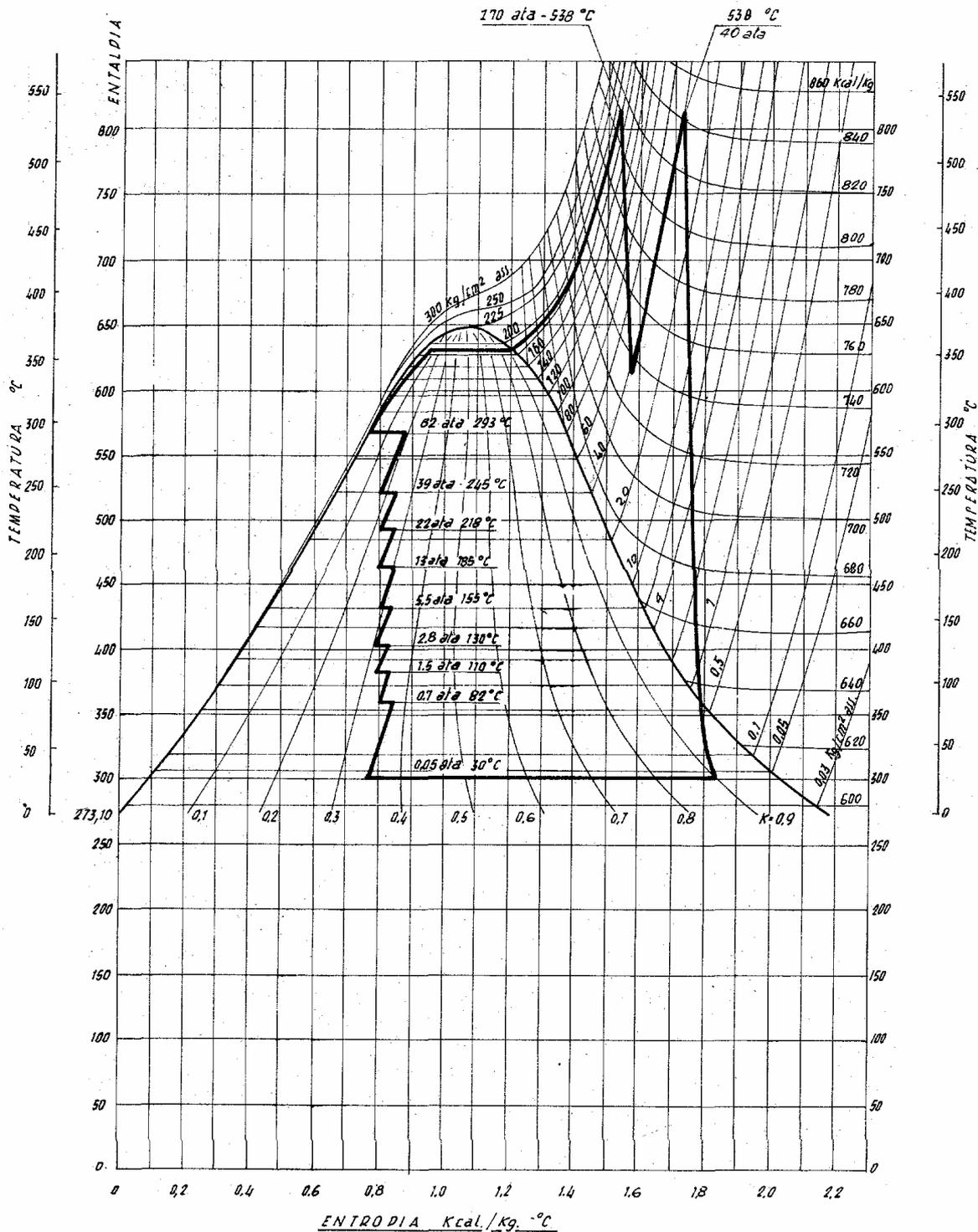
Questi gas, accumulandosi nel condensatore e non potendo essere condensati, causerebbero un incremento di pressione nello stesso (*perdita di vuoto al condensatore*) con conseguente peggioramento del rendimento.

Il degasatore è l'unico scambiatore a miscelamento; gli altri sono a superficie: in essi il vapore spillato condensa preriscaldando l'acqua di alimento, viene successivamente laminato (per riportarlo allo stato vapore che ha un più alto coefficiente di scambio termico) ed inviato ai preriscaldatori successivi per essere infine convogliato nel *degasatore* (per i preriscaldatori di alta) o nel condensatore (per quelli di bassa). Il *degasatore* opera ad una pressione intermedia per cui è necessario dividere il sistema di pompaggio in tre sezioni: pompe di *estrazione del condensato* (dal condensatore al *degasatore*), pompe *booster* (dal *degasatore* ai preriscaldatori di alta) e *pompe di alimento* (dai preriscaldatori di alta al generatore di vapore).

Il ciclo termodinamico standard di un impianto ENEL da 320 MW è riportato in Fig.15.



**Figura 14:** Organizzazione degli spillamenti in un impianto termoelettrico a ciclo Rankine con risurriscaldamento.



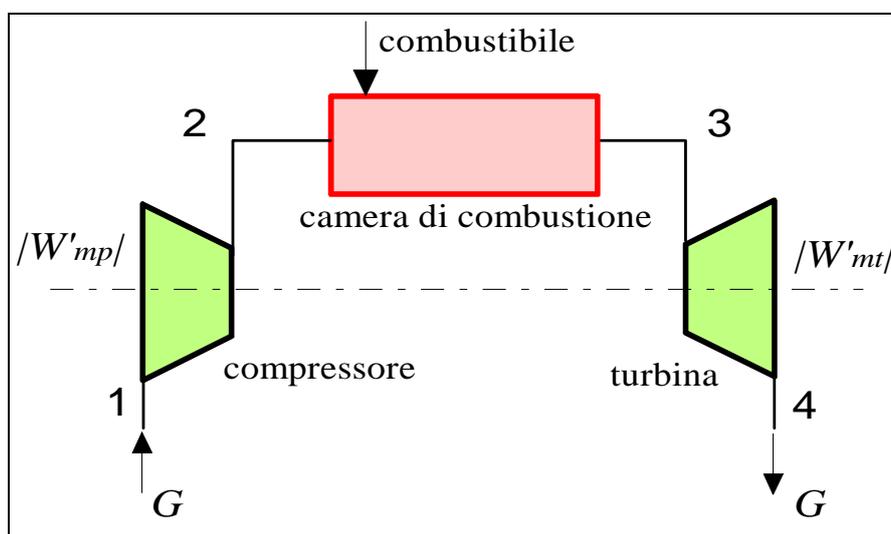
**Figura 15:** Ciclo Rankine caratteristico dei gruppi termoelettrici ENEL da 320 MW. Si nota la presenza di 8 spillamenti ed un risurriscaldamento. Gli spillamenti vengono rappresentati in modo che l'area racchiusa dal ciclo rappresenti il lavoro effettivo per unità di massa. Il rendimento effettivo del ciclo è di circa il 41%.

#### 4. Il ciclo Joule/Brayton

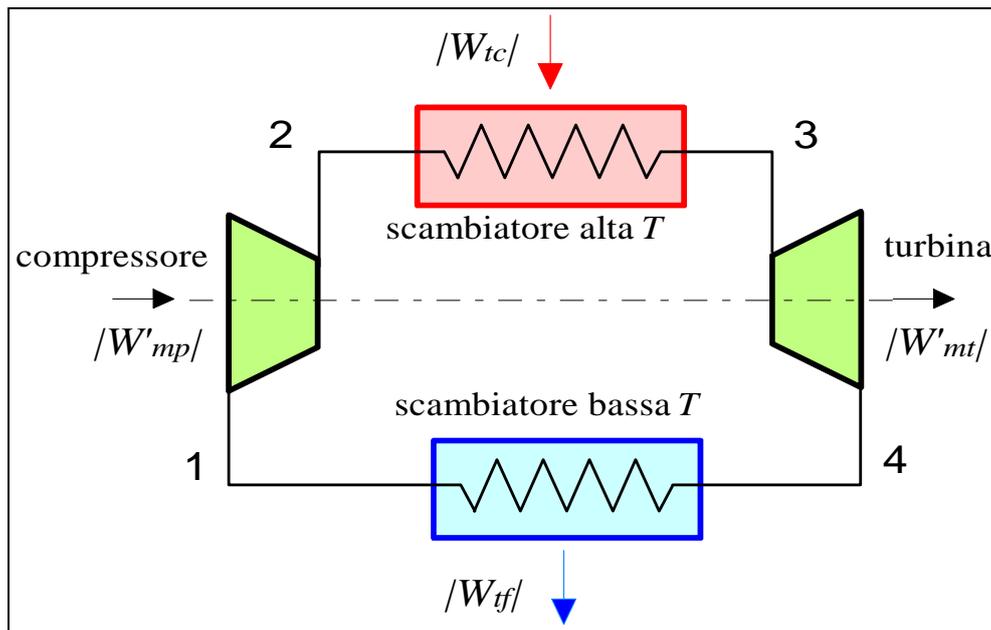
Gli impianti motori con turbina a gas sono caratterizzati da un basso rapporto peso/potenza e costo/potenza e dalla relativa facilità con cui possono far fronte a variazioni di carico. Per questo motivo essi sono largamente adottati nella propulsione aeronautica, ma anche in impianti fissi per la produzione di energia elettrica e per l'azionamento di macchine operatrici, (es. centrali di pompaggio). I valori attuali del rendimento di primo principio sono però inferiori a quelli del ciclo Rankine. Lo schema del motore è riportato in Fig.16: il fluido di lavoro (aria), dopo la compressione, entra nella camera di combustione, dove viene immesso il combustibile e avviene, a pressione approssimativamente costante, la reazione chimica di combustione: i gas prodotti di reazione, ad elevata temperatura e pressione, si espandono nella turbina e vengono scaricati nell'atmosfera. In questa configurazione, l'impianto è *a circuito aperto e combustione interna*. Lo stesso impianto (Fig.17) può funzionare a circuito chiuso: in questo caso il fluido (generalmente elio, o anidride carbonica) riceve calore isobaricamente in uno scambiatore ad alta temperatura (che può essere originato da una combustione esterna o anche un reattore nucleare) e dopo l'espansione in turbina, cede il calore residuo all'ambiente in un secondo scambiatore a bassa temperatura.

Nello studio dell'impianto a ciclo Brayton assumeremo le ipotesi semplificative seguenti, che consentono comunque una descrizione soddisfacente del caso reale.

- L'impianto è a circuito chiuso: la eventuale reazione di combustione può essere sostituita dalla adduzione dall'esterno di una equivalente quantità di calore a pressione costante; lo scarico in atmosfera può essere sostituito da una cessione di calore isobara all'ambiente che riporta il fluido nelle condizioni iniziali.
- Il fluido di lavoro può essere considerato un gas ideale a calore specifico costante.
- Turbina e compressore sono adiabatici. Tutte le trasformazioni sono reversibili.



**Figura 16:** Turbina a gas a circuito aperto.



**Figura 17:** Turbina a gas a circuito chiuso (ciclo Brayton semplice).

Il ciclo risultante è riportato sul diagramma  $T-s$  in Fig.18. In tali ipotesi, il bilancio termico dei quattro sistemi aperti in serie che costituiscono l'impianto dà come risultato:

$$\text{compressore (1-2)} \quad W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) = -G c_p (T_2 - T_1) \quad (7.24)$$

$$\text{scambiatore alta } T \text{ (2-3)} \quad W_{tc} = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2) \quad (7.25)$$

$$\text{turbina (3-4)} \quad W'_{mt} = G(h_3 - h_4) = G c_p (T_3 - T_4) \quad (7.26)$$

$$\text{scambiatore bassa } T \text{ (4-1)} \quad W_{tf} = -G(h_4 - h_1) = -G c_p (T_4 - T_1) \quad (7.27)$$

Notare che i bilanci suddetti sono perfettamente analoghi a quelli del ciclo Rankine, con le importanti differenze che l'ipotesi di gas ideale con  $c_p$  costante permette di sostituire i salti entalpici con i corrispondenti salti termici e che in questo caso il lavoro di compressione per un aeriforme *non è trascurabile*.

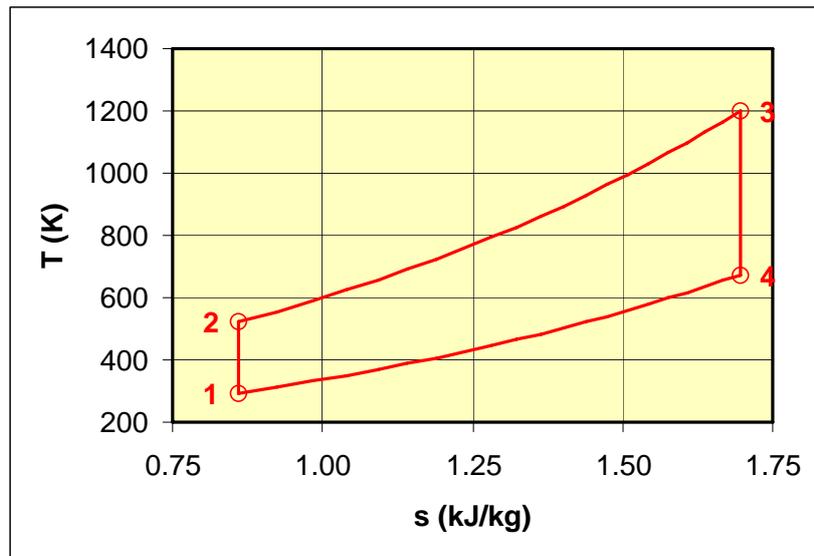
Posto

$$a = \frac{R}{c_p} = \frac{k - 1}{k} \quad (7.28)$$

$$r_p = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4}$$

dalla espressione della trasformazione adiabatica reversibile per un gas ideale risulta

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = r_p^a \quad (7.29)$$



**Figura 18:** Ciclo Brayton reversibile sul diagramma  $T$ - $s$ .

Il rendimento di primo principio del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{ic}} = \frac{G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1)}{G(h_3 - h_2)} \quad (7.30)$$

e, tenendo conto della ipotesi di gas ideale ( $\Delta h = c_p \Delta T$ ) ed eliminando la quantità  $G c_p$

$$\eta = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (7.31)$$

l'espressione precedente può essere semplificata notevolmente tenendo conto che

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = r_p^a \quad \Rightarrow \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_2} r_p^a \quad (7.32)$$

da cui

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1 \left( \frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{r_p^a} \quad (7.33)$$

Come si vede, il rendimento cresce all'aumentare del rapporto di compressione, e dipende solo da quest'ultimo e dal tipo di fluido adottato (che determina il valore di  $a$ ). Non dipende invece da nessun valore di temperatura del ciclo (ma questo vale solo per il ciclo endoreversibile).

Il rendimento di secondo principio è dato da

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{1 - \frac{T_1}{T_2}}{1 - \frac{T_1}{T_3}} \quad (7.34)$$

La  $PMU$  è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = \frac{1}{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)} = \frac{1}{c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)]} \quad (7.35)$$

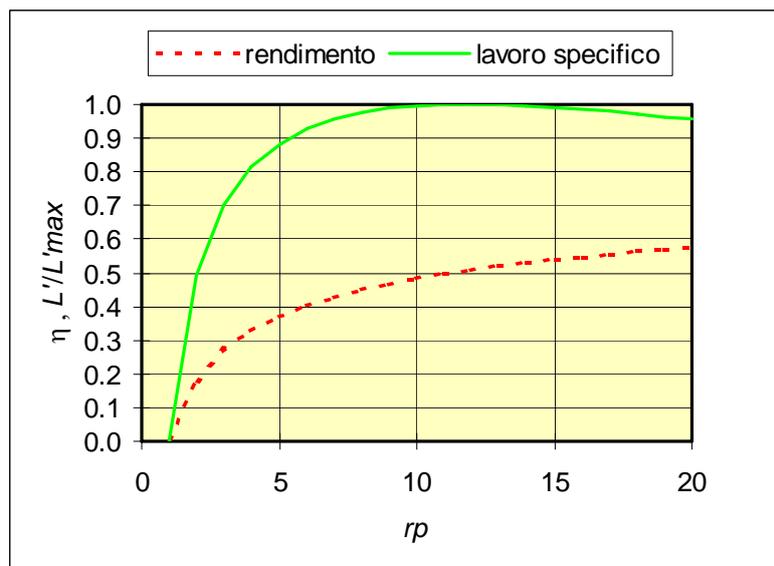
E può essere riarrangiata nella forma

$$PMU = \frac{1}{c_p T_1 \left( 1 + \frac{T_3}{T_1} - r_p^a - \frac{T_3}{T_1 r_p^a} \right)} \quad (7.36)$$

La  $PMU$  diminuisce all'aumentare del rapporto  $T_3/T_1$  ed è inversamente proporzionale a  $c_p$ : questo giustifica l'adozione dell'elio che ha un  $c_p$  molto alto, e spiega la tendenza ad incrementare continuamente  $T_3$ .

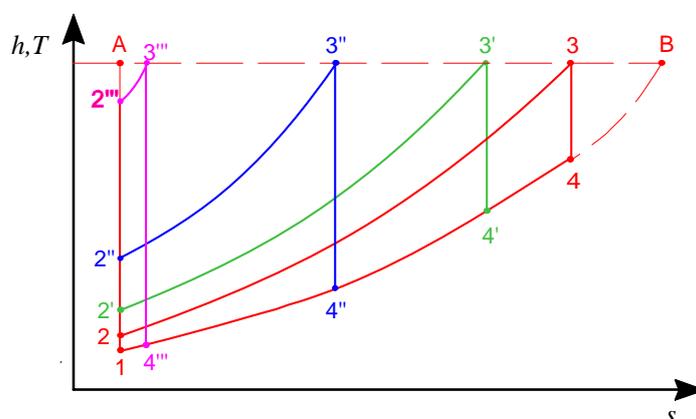
E' interessante riportare in funzione del rapporto di compressione l'andamento di  $\eta$  e del lavoro unitario  $L' = 1/PMU$ , per un dato valore del rapporto  $T_3/T_1$ , per l'aria (Fig.19). Da esso si vede come il rendimento cresce monotonamente con il rapporto di compressione, ma  $L'$  ha un massimo (e corrispondentemente la  $PMU$  ha un minimo) per un valore del rapporto di compressione dato da

$$r_{pOTT} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{a}}} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{c_p}{2R}} \quad (7.37)$$



**Figura 19:** Andamento del rendimento e del lavoro specifico in funzione del rapporto di compressione per un ciclo Brayton reversibile.

Il rapporto di compressione ottimale può essere ricavato derivando la Eq.(7.36) rispetto al rapporto di compressione ed uguagliando a zero.



**Figura 20:** Diverse configurazioni del ciclo Brayton reversibile, al variare del rapporto di compressione, per le medesime condizioni di ingresso ( $T_1, p_1$ ) e la medesima temperatura massima ( $T_3$ ).

Queste considerazioni possono essere meglio comprese osservando il diagramma  $T-s$  di Fig.20: avendo imposto il valore della temperatura massima del ciclo  $T_3$  e le condizioni di ingresso  $T_1, p_1$ , il ciclo deve essere comunque contenuto all'interno del triangolo mistilineo 1-A-B. Si vede che al crescere del rapporto di compressione (ovvero via via che il punto 2 si sposta verso l'alto) l'area del ciclo prima aumenta e poi torna a diminuire (essa infatti è nulla sia quando 2 coincide con 1 che quando 2 coincide con A). Dato che l'area del ciclo è proporzionale al lavoro ottenuto per unità di massa (e quindi inversamente proporzionale alla PMU) si comprende come il lavoro per unità di massa abbia un massimo come riportato in Fig.19.

Quindi da un lato la tendenza ad incrementare il rendimento porterebbe ad aumentare il rapporto di compressione (riducendo i costi di esercizio), dall'altra il costo di impianto ed il peso possono essere ridotti minimizzando la PMU, ovvero lavorando in condizioni prossime al rapporto di compressione ottimale. Queste considerazioni verranno parzialmente modificate nel prossimo paragrafo, in cui si terrà conto dell'effetto delle irreversibilità. Si nota che il rapporto di compressione ottimale dipende anche, attraverso la variabile  $a$ , vedi Eq.(7.37), dal tipo di fluido adottato.

E' relativamente semplice verificare che in un ciclo Brayton che lavora al rapporto di compressione ottimale si ha  $T_2 = T_4$ .

#### **ESEMPIO 7-6 –Ciclo Brayton endoreversibile ad aria.**

Un ciclo Brayton con turbina e compressore ideali lavora tra le temperature di ammissione in turbina di 1200 °C e la temperatura ambiente di 20 °C, pressione di 1 bar. La portata di fluido (aria con  $c_p$ = costante,  $k = 1.4$ ,  $R = 287$  J/kg K) vale  $G = 0.5$  kg/s. Per un valore del rapporto di compressione pari a 6, determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura e la portata massica unitaria. Ripetere i calcoli per il valore del rapporto di compressione corrispondente alle condizioni di minimo ingombro.

☐ I calcoli sono eseguiti tramite il programma JOULE (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori) o con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON.XLS.

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella, dove si sono sfruttate le relazioni (v. Cap.4)

$$T_2 = T_1 r_p^{R/c_p}, \quad T_4 = \frac{T_3}{r_p^{R/c_p}}$$

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	489.1	196.9	0.8598
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	882.8	592.3	1.9672

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^a} = 0.401$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.50$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 198 \text{ kW}$$

dove si è posto  $c_p = Rk / (k - 1) = 1004 \text{ J/kg K}$ .

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_2) = 494 \text{ kW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 2.54 \text{ kg/MJ}$$

Il rapporto di compressione ottimale è dato da

$$r_{pOTT} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{a}}} = 16.86$$

e, ripetendo i calcoli, risulta  $\eta = 0.554$ ,  $\varepsilon = 0.69$ ,  $W'_{mu} = 227 \text{ kW}$ ,  $W_{tc} = 410 \text{ kW}$ ,  $PMU = 2.21 \text{ kg/MJ}$ . Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	16.86	657.1	365.6	0.8598
3	16.86	1473	1185.2	1.6707
4	1	657.2	365.6	1.6707

☐

**ESEMPIO 7-7 –Ciclo Brayton endoreversibile ad elio.**

Ripetere i calcoli dell'esempio precedente considerando come fluido di lavoro l'elio (gas ideale con  $c_p$ = costante,  $k = 1.667$ ,  $R = 2078$  J/kg K).

☐ *I calcoli sono eseguiti tramite il programma JOULE (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori) o con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON.XLS.*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	6.2251
2	6	600.4	1595.7	6.2251
3	6	1473	6127.5	10.8860
4	1	719.2	2212.7	10.8860

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^a} = 0.512$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.64$$

La potenza meccanica utile (essendo per l'elio  $c_p = R k / (k-1) = 5195$  J/kg K) è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 1160 \text{ kW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{ic} = G c_p (T_3 - T_2) = 2266 \text{ kW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 0.43 \text{ kg/MJ}$$

Il rapporto di compressione ottimale (essendo per l'elio  $a = 0.400$ ) è dato da

$$r_{p\text{OTT}} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{a}}} = 7.52$$

e, ripetendo i calcoli, risulta  $\eta = 0.554$ ,  $\varepsilon = 0.69$ ,  $W'_{mu} = 1174$  kW,  $W_{ic} = 2120$  kW,  $PMU = 0.43$  kg/MJ (si vede che il minimo nella PMU è piuttosto blando, dato che questo valore praticamente coincide con il precedente). Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella.

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	6.2251
2	7.52	657.2	1890.6	6.2251
3	7.52	1473	6127.5	10.4168
4	1	657.1	1890.0	10.4168

Notare come, rispetto al caso dell'aria, si ottengano prestazioni decisamente superiori. ☐

**Effetto delle irreversibilità nel ciclo Brayton**

Le irreversibilità che influenzano le prestazioni del ciclo Brayton sono quelle dovute alla non idealità delle espansioni nella turbina e nel compressore. A differenza del ciclo Rankine, anche queste ultime sono importanti, dato che il compressore assorbe un'aliquota non trascurabile della potenza erogata dalla turbina. Le perdite di carico negli scambiatori hanno invece un impatto minore sulle prestazioni.

Altri problemi sono legati al fatto che il fluido non è un gas ideale: i calori specifici variano con la temperatura e la stessa natura del fluido, a causa delle reazioni chimiche di combustione e dissociazione termica, cambia da punto a punto nel ciclo.

Consideriamo quindi un ciclo Brayton a gas ideale in cui la turbina ed il compressore sono caratterizzati da un rendimento isoentropico di espansione e di compressione, rispettivamente  $\eta_t$  ed  $\eta_c$ . Il ciclo si modifica come in Fig.21. L'espressione del rendimento rimane formalmente inalterata

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \tag{7.38}$$

e con un po' di pazienza, tenendo conto delle relazioni tra  $T_2$ ,  $T_4$  e  $T_{2i}$ ,  $T_{4i}$  (vedi Cap.4), può essere rielaborata nella forma

$$\eta = \frac{\eta_t \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \frac{1}{r_p^a} \right) - \frac{r_p^a - 1}{\eta_c}}{\frac{T_3}{T_1} - 1 - \frac{r_p^a - 1}{\eta_c}} \tag{7.39}$$

Si nota pertanto che il rendimento è minore di zero se

$$\eta_c \eta_t < r_p^a \frac{T_1}{T_3} \tag{7.40}$$

In tal caso, il compressore assorbe più lavoro di quanto ne eroga la turbina. Fintantoché non è stato possibile costruire compressori con alto valore del rendimento isoentropico, il ciclo Brayton non ha trovato realizzazione pratica.

La *PMU* può essere espressa come segue

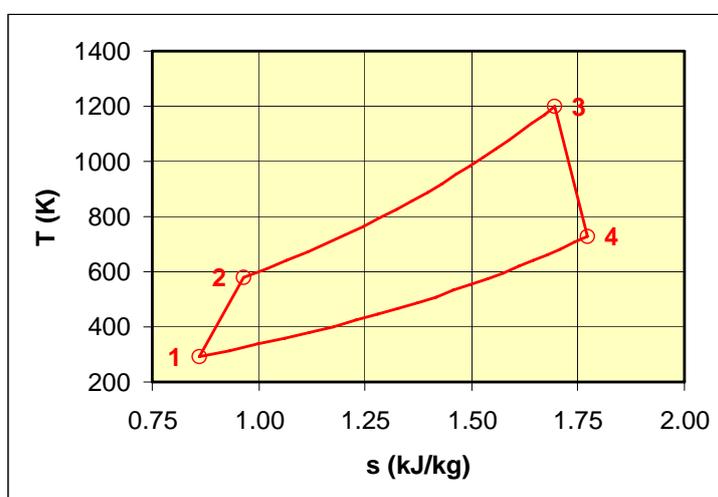
$$PMU = \frac{1}{c_p T_1 \left( \frac{T_3}{T_1} \frac{1 - 1/r_p^a}{\eta_t} + \frac{1 - r_p^a}{\eta_c} \right)} \tag{7.41}$$

Riportando nuovamente in grafico (Fig.22) i valori di  $\eta$  e  $L' = 1/PMU$ , si nota come  $L'$  abbia un massimo, dato da

$$r_{p,OTT,PMU} = \sqrt{\left( \frac{T_3}{T_1} \eta_c \eta_t \right)^{\frac{1}{a}}} \tag{7.42}$$

ovvero, spostato a valori minori rispetto al caso ideale.

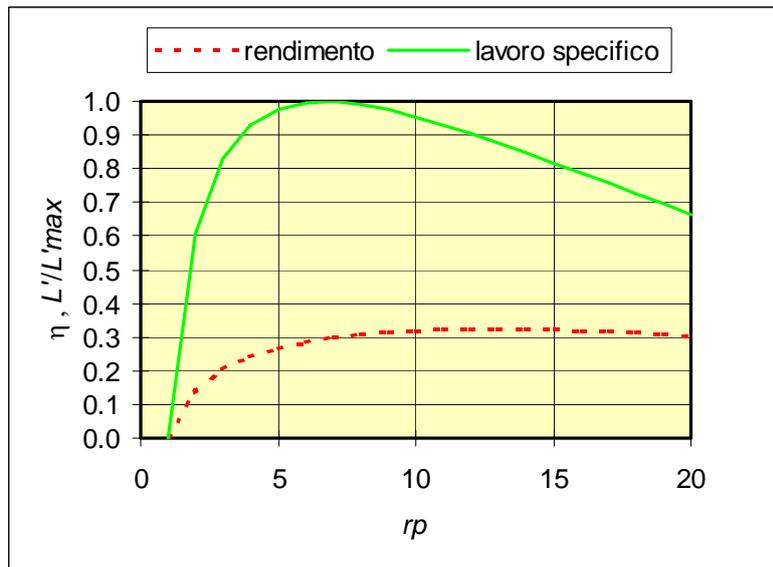
In questo caso, tuttavia, anche la curva del rendimento presenta un massimo per un valore del rapporto di compressione più elevato di quello della Eq.(7.42). Nel caso reale, inoltre, il rendimento aumenta anche all'aumentare della temperatura massima del ciclo,  $T_3$ , e questo giustifica la tendenza all'aumento di quest'ultima. Nella selezione del rapporto di compressione per una macchina reale, bisogna quindi scegliere il valore del rapporto di compressione in modo da operare in condizioni di massimo rendimento o di minimo ingombro. I motori aeronautici lavorano generalmente in condizioni di massimo rendimento, dato che questo permette di ridurre il carico di combustibile e quindi il peso globale dell'aeromobile. Al contrario, spesso gli impianti fissi vengono progettati per le condizioni di minimo ingombro per ridurre i costi di impianto. Notare anche che la condizione di massimo rendimento implica un rapporto di compressione maggiore di quella di minimo ingombro. La distanza tra i due valori ottimali del rapporto di compressione cresce con  $T_3$ .



**Figura 21:** Ciclo Brayton reale sul diagramma  $T$ - $s$ .

Indicativamente, i rapporti di compressione attualmente adottati oscillano tra 5 e 15 per impianti fissi (detti anche *heavy duty*) e tra 15 e 30 per motori aeronautici o turbine fisse *aeroderivate* (ovvero, derivate da motori aeronautici). C'è tendenza ad aumentare il rapporto di compressione (fino a 40:1). Le potenze installate sono da poche decine di kW fino a rispettivamente 200 MW per *heavy duty* e 40 MW per *aeroderivate*. I rendimenti sono, tranne poche eccezioni, intorno al 33-42%, ma si pensa di riuscire a superare in futuro il 45%. La temperatura massima di ammissione in turbina nelle applicazioni civili è attualmente di 1300 °C (oltre 1500 °C per gli aerei militari) e raggiungerà i 1450 °C nelle turbine di prossima generazione. Questo comporta l'adozione di sofisticati sistemi di raffreddamento delle palette, che, essendo alimentati dal compressore, possono impegnare fino al 20% dell'aria aspirata dalla macchina.

Gli impianti a ciclo Brayton devono il loro successo al limitato rapporto peso-potenza che, oltre a renderli adatti alla propulsione aeronautica, rende gli impianti fissi compatti e consegnabili "chiavi in mano". Inoltre, presentano brevi transitori di avviamento e sono quindi utili a far fronte ad improvvisi picchi nelle richieste di potenza. Come tutti i motori a combustione interna, non hanno coppia allo spunto e per l'avviamento hanno bisogno di un motore di lancio.



**Figura 22:** Andamento del rendimento e della PMU in funzione del rapporto di compressione per un ciclo Brayton reale.

**ESEMPIO 7-8 –Ciclo Brayton reale.**

Un ciclo Brayton con turbina e compressore reali lavora tra le temperature di ammissione in turbina di 1200 °C ed la temperatura ambiente di 20 °C, pressione di 1 bar. La portata di fluido (aria con  $c_p =$  costante,  $k = 1.4$ ,  $R = 287$  J/kg K) vale  $G = 0.5$  kg/s. Il rendimento isoentropico della turbina vale 0.9 e quello del compressore 0.8. Per un valore del rapporto di compressione pari a 6, determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura e la portata massica unitaria. Determinare inoltre la massima potenza teoricamente recuperabile dai gas di scarico.

*I calcoli possono essere eseguiti tramite il programma JOULE (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori) o con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON.xls.*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella, dove si sono sfruttate le relazioni seguenti (v. Cap.4)

$$T_{2i} = T_1 r_p^{R/c_p} \quad , \quad T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c}$$

$$T_{4i} = \frac{T_3}{r_p^{R/c_p}} \quad , \quad T_4 = T_3 - \eta_t (T_3 - T_{4i})$$

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	538.1	246.1	0.9557
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	941.8	651.6	2.0322

Il rendimento di primo principio vale

$$\eta = 1 - \frac{1 - \frac{T_3}{T_1} \left( 1 - \eta_t + \frac{\eta_t}{r_p^a} \right)}{1 - \frac{T_3}{T_1} + \frac{r_p^a - 1}{\eta_c}} = 0.306$$

e quello di secondo principio

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Carn}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.38$$

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 144 \text{ kW}$$

La potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_2) = 470 \text{ kW}$$

ed infine la PMU è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 3.49 \text{ kg/MJ}$$

Il rapporto di compressione ottimale che massimizza il lavoro specifico (o minimizza la PMU) è dato da

$$r_{p,OTT,PMU} = \sqrt{\left( \frac{T_3}{T_1} \eta_c \eta_t \right)^{\frac{1}{a}}} = 9.49$$

e, ripetendo i calcoli, risulta  $\eta = 0.351$ ,  $\varepsilon = 0.44$ ,  $W'_{mu} = 150 \text{ kW}$ ,  $W_{tc} = 427 \text{ kW}$ ,  $PMU = 3.35 \text{ kg/MJ}$ . Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	9.49	623.7	332.0	0.9723
3	9.49	1473	1185.2	1.8356
4	1	844.3	553.6	1.9223

Infine la potenza teorica massima ottenibile dai gas di scarico si può calcolare tramite il bilancio di disponibilità (v. Cap.6), e corrisponde a quella di un processo reversibile che riporta i gas di scarico allo stato morto (convenzionalmente  $T_0 = 298.15 \text{ K}$ ,  $p_0 = 1.013 \text{ bar}$ )

$$W'_{m,max} = G (a_{f,4} - a_{f,0}) = G a_{f,4} = G [(h_4 - h_0) - T_0 (s_4 - s_0)]$$

quindi, per un gas ideale con  $c_p = \text{cost}$

$$W'_{m,\text{max}} = G \left[ c_p (T_4 - T_0) - T_0 \left( c_p \ln \frac{T_4}{T_0} - R \ln \frac{p_4}{p_0} \right) \right] = G c_p \left[ (T_4 - T_0) - T_0 \ln \frac{T_4}{T_0} \right] = 151 \text{ kW}$$

dove il termine contenente le pressioni è nullo, perchè si scarica a pressione ambiente. La potenza (attenzione! massima, teorica) perduta è quindi dello stesso ordine di grandezza di quella prodotta.

□

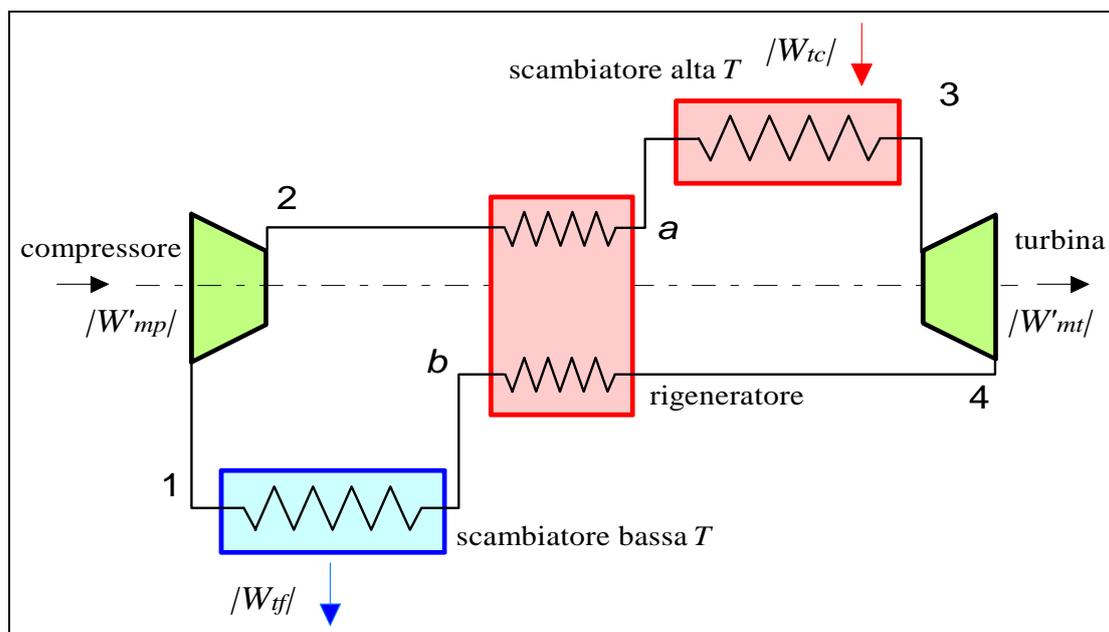
### Cenni all'utilizzazione del ciclo Brayton nei motori aeronautici

I turbomotori aeronautici moderni si dividono in due categorie:

- motori *turboelica*, in cui la turbina, oltre ad azionare il compressore, mette in movimento l'elica;
- motori *turbogetto*, in cui la turbina eroga potenza unicamente per azionare il compressore (questa parte di motore è detta generatore di gas); i gas in uscita dalla turbina, ancora ad elevato contenuto entalpico, vengono accelerati in un *ugello* fino ad una velocità superiore a quella di volo: la corrispondente variazione di quantità di moto fornisce la spinta propulsiva all'aereo.

Nei motori turbogetto, spesso il primo stadio di compressione è realizzato mediante un diffusore (v. Cap.4). I motori turbogetto hanno consentito la realizzazione di aeromobili per il volo ad alta velocità (anche superiore alla velocità del suono) ed alta quota.

Ultimamente, hanno preso piede anche i motori *turbofan*, che, in estrema sintesi, combinano i due tipi precedenti: in essi, *una parte* dell'aria aspirata viene semplicemente compressa, e, senza passare attraverso la camera di combustione viene scaricata posteriormente a velocità maggiore, realizzando un effetto propulsivo analogo a quello dell'elica. La parte centrale del motore è invece un normale turbogetto.



**Figura 23:** Schema di ciclo Brayton con rigenerazione.

**Il ciclo Brayton con rigenerazione**

Lo schema di questo tipo di impianto è riportato in Fig.23 ed il ciclo termodinamico in Fig.24: negli impianti a combustione interna e ciclo aperto, ovviamente lo scambiatore di bassa temperatura non è presente. In questo impianto si utilizzano i gas caldi in uscita dalla turbina, a temperatura ancora elevata, per preriscaldare tramite uno scambiatore di calore a superficie, detto *rigeneratore* il gas all'uscita del compressore prima dell'introduzione nella camera di combustione. Si risparmia quindi combustibile, aumentando il rendimento, a spese dell'introduzione di un nuovo componente, generalmente costoso ed ingombrante. La rigenerazione si adotta talvolta in impianti di potenza inferiore a 10 MW, ed è considerata antieconomica per potenze superiori date le grosse dimensioni del rigeneratore, per quanto l'introduzione di nuovi scambiatori di calore compatti potrebbe in futuro modificare queste considerazioni. Inoltre, essa è improponibile (per motivi di ingombro e peso) nel caso della propulsione aeronautica.

I bilanci dei cinque sistemi aperti che costituiscono l'impianto sono riportati nel seguito: le prime quattro espressioni sono identiche a quelle del ciclo Brayton semplice. Come di consueto, le espressioni in cui compare l'entalpia sono valide per qualunque fluido, quelle in cui compare la temperatura solo per gas ideali a  $c_p$  costante.

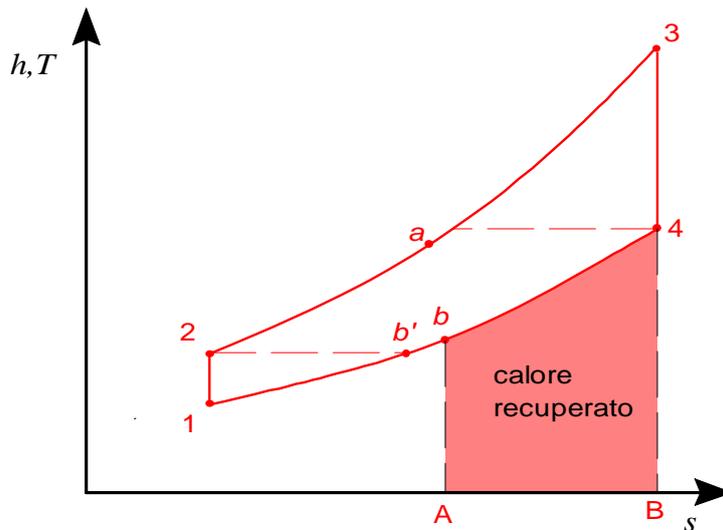
compressore (1-2)  $W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) = -G c_p (T_2 - T_1)$  (7.43)

scambiatore alta  $T$  (2-3)  $W'_{ic} = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2)$  (7.44)

turbina (3-4)  $W'_{mt} = G(h_3 - h_4) = G c_p (T_3 - T_4)$  (7.45)

scambiatore bassa  $T$  (4-1)  $W'_{tf} = -G(h_4 - h_1) = -G c_p (T_4 - T_1)$  (7.46)

rigeneratore (4-b e 2-a)  $G(h_a - h_2) = G(h_4 - h_b) \quad ; \quad T_a - T_2 = T_4 - T_b$  (7.47)



**Figura 24:** Diagramma  $T$ - $s$  per ciclo Brayton con rigenerazione.

Il calore recuperato nel rigeneratore è rappresentato sul piano  $T-s$  (Fig.24) dall'area  $AB4b$ . Ovviamente, dato che lo scambio termico avviene sempre dal corpo più caldo a quello più freddo, per la rigenerazione è necessario che i gas in uscita dalla turbina siano più caldi di quelli in uscita dal compressore, quindi deve essere

$$T_a \leq T_4 \quad ; \quad T_2 \leq T_b \quad (7.48)$$

da cui segue che

$$T_2 \leq T_4 \quad (7.49)$$

La condizione limite si ha dunque se il punto  $b$  in Fig.24 coincide con il punto  $b'$ . Nel caso di ciclo endoreversibile, essendo come è noto  $T_2 / T_1 = T_3 / T_4$  (v. Eq.(7.29)) nelle condizioni limite per la rigenerazione si ha

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_3 T_1} \quad (7.50)$$

Si vede quindi che la rigenerazione è possibile solo se il rapporto di compressione soddisfa

$$r_p \leq \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{c_p}{2R}} \quad (7.51)$$

e quindi per *bassi valori del rapporto di compressione* (notare che il valore limite di  $r_p$  corrisponde a quello per cui la PMU del ciclo endoreversibile ha un minimo, v. Eq.(7.37)).

La massima quantità di calore recuperabile per unità di tempo è dunque data da

$$W_{TR,max} = G c_p (T_4 - T_2) \quad (7.52)$$

Dalla figura 24, si vede che in questo caso il calore dovrebbe trasferirsi tra i due fluidi con differenza di temperatura nulla, per cui il corrispondente ipotetico scambiatore di calore dovrebbe avere superficie infinita. Si introduce pertanto l'*efficienza del rigeneratore*,  $\varepsilon_R$ , definita come

$$\varepsilon_R = \frac{\text{calore recuperato nel rigeneratore}}{\text{calore max. recuperabile}} = \frac{W_{TR}}{W_{TR,max}} = \frac{T_a - T_2}{T_4 - T_2} = \frac{T_4 - T_b}{T_4 - T_2} \quad (7.53)$$

Il concetto di *efficienza* si può applicare a qualunque scambiatore di calore e verrà ripreso in maggior dettaglio nel Cap.13. Ovviamente, l'efficienza è sempre minore di 1.

Poste queste definizioni, si può passare a determinare il *rendimento di primo principio* del ciclo Brayton con rigenerazione, che è dato da

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{G(h_3 - h_4) - G(h_2 - h_1)}{G(h_3 - h_a)} \quad (7.54)$$

e quindi per un gas ideale con  $c_p$  costante, tenuto conto anche della Eq.(7.53)

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_a} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2) - \varepsilon_R(T_4 - T_2)} \quad (7.55)$$

Tramite una serie di calcoli analoghi a quelli condotti in precedenza per il ciclo Brayton semplice, che qui si omettono, per  $\eta_c = \eta_t = 1$  questa espressione può essere messa in funzione delle sole temperature estreme del ciclo ( $T_1, T_3$ ) e dell'efficienza del rigeneratore  $\varepsilon_R$

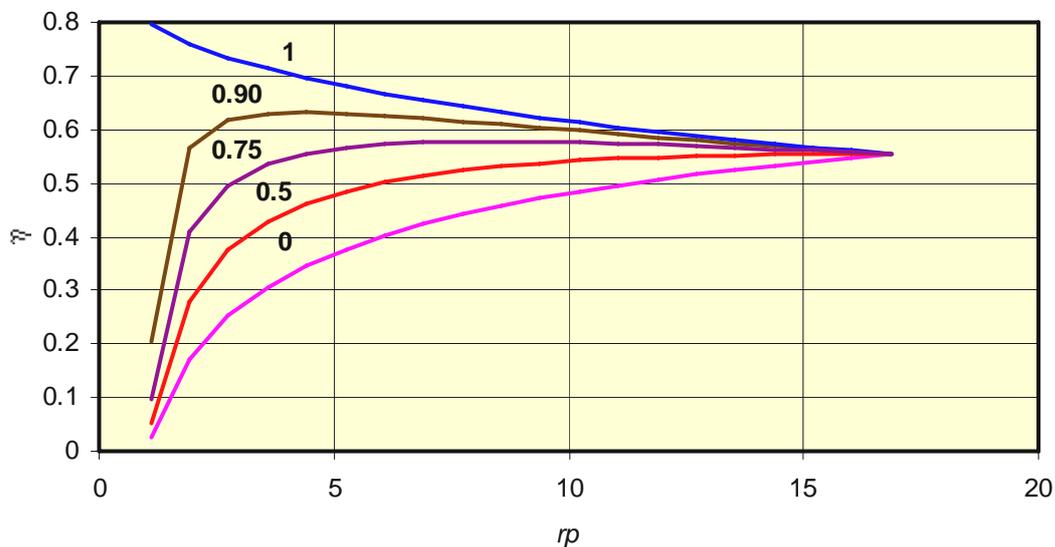
$$\eta = 1 - \frac{1}{r_p^a} \frac{\frac{T_3}{T_1} \frac{1}{r_p^a} (1 - \varepsilon_R) + \varepsilon_R r_p^a - 1}{\frac{T_3}{T_1} \frac{1}{r_p^a} \left( 1 - \frac{\varepsilon_R}{r_p^a} \right) + \varepsilon_R - 1} \quad (7.56)$$

Che nel caso ideale  $\varepsilon_R = 1$  si traduce in

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^a \quad (7.57)$$

Il rendimento è quindi in questo caso una funzione *decescente* del rapporto di compressione, al contrario del ciclo Brayton semplice. Dal diagramma di Fig.25 si vede che per efficienza dello scambiatore minore di 1, invece, il rendimento mostra un massimo che si sposta verso destra al diminuire dell'efficienza dello scambiatore. La curva  $\varepsilon_R = 0$  corrisponde al ciclo Brayton semplice.

Si noti che la rigenerazione *non altera l'area del ciclo sul piano T-s*, e quindi il lavoro specifico e la PMU (e la loro dipendenza dal rapporto di compressione) rimangono inalterati rispetto al corrispondente ciclo Brayton semplice. Si vede anche che guadagni significativi di rendimento sono possibili solo in caso di alta efficienza del rigeneratore.



**Figura 25:** Rendimento del ciclo Brayton con rigenerazione in funzione del rapporto di compressione, per diversi valori dell'efficienza del rigeneratore;  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_3 = 1200 \text{ }^\circ\text{C}$ . Il caso  $\varepsilon_R = 0$  corrisponde all'assenza di rigeneratore. Il rapporto di compressione limite per la rigenerazione in questo caso vale 16.9, e tutte le curve vanno a coincidere per tale valore.

Recentemente è stato proposto un ciclo Brayton rigenerato chiuso ad elio per il raffreddamento di futuri reattori nucleari a gas, con una potenza utile di circa 300 MW: con un rapporto di compressione pari a 2.7 ed una temperatura di ingresso in turbina pari a 850°C a 72 bar, ed efficienza di rigenerazione attorno al 95%, sembra possibile raggiungere rendimenti attorno al 50%.

**ESEMPIO 7-9 – Ciclo Brayton con rigenerazione.**

Un ciclo Brayton a rigenerazione, con turbina e compressore ideali, lavora tra le temperature di ammissione in turbina di 1200 °C e la temperatura ambiente di 20 °C, pressione di 1 bar. La portata di fluido (aria con  $c_p$ = costante,  $k = 1.4$ ,  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ) vale  $G = 0.5 \text{ kg/s}$ . Per un valore del rapporto di compressione pari a 6, ed una efficienza del rigeneratore  $\varepsilon_R = 0.75$ , determinare i rendimenti di primo e secondo principio, la potenza meccanica utile, la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura e la portata massica unitaria. Ripetere i calcoli per un rendimento isoentropico della turbina  $\eta_t = 0.9$  e del compressore  $\eta_c = 0.8$ .

☞ *I calcoli possono essere eseguiti tramite il programma JOULE (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori) o con il foglio di calcolo EXCEL C7BRAYTON-RIG.xls.*

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella, analoga a quella dell’Es.6: la presenza del rigeneratore in effetti non cambia nulla riguardo ai punti 1,2,3,4. Le proprietà dei punti *a* e *b* sono ricavabili dalla efficienza del rigeneratore, Eq.(7.53) da cui segue

$$T_a = T_2 + \varepsilon_R (T_4 - T_2) = 784.5 \text{ K}$$

$$T_b = T_4 - \varepsilon_R (T_4 - T_2) = 587.6 \text{ K}$$

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	489.1	196.9	0.8598
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	882.8	592.3	1.9672
<i>a</i>	6	784.5	493.5	1.3343
<i>b</i>	1	587.6	295.7	1.5582

La potenza meccanica utile è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 198 \text{ kW}$$

e rimane quindi inalterata rispetto al caso dell’Esempio 7.6 (infatti, l’area del ciclo e la portata rimangono invariate). Il calore ceduto in caldaia vale invece

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_a) = 345.9 \text{ kW}$$

Il rendimento di primo principio è ottenibile come

$$\eta = \frac{W'_{m,u}}{W_{tc}} = 0.572$$

ed è superiore a quello del ciclo Brayton semplice di pari caratteristiche, Es.6, che valeva 0.401. Si può anche verificare che esso coincide con quanto ricavabile dalla Eq.(7.56) (di uso molto più scomodo)

$$\eta = 1 - \frac{1 - \frac{T_3}{T_1} \frac{1}{r_p^a} (1 - \varepsilon_R) + \varepsilon_R r_p^a - 1}{\frac{r_p^a}{T_1} \frac{T_3}{r_p^a} \left( 1 - \frac{\varepsilon_R}{r_p^a} \right) + \varepsilon_R - 1} = 0.572$$

Il rendimento di secondo principio vale

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.71$$

ed infine la PMU (sempre inalterata rispetto all' Esempio 7.6) è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 2.54 \text{ kg/MJ}$$

Per quanto riguarda il caso di turbina e compressore non ideali, le proprietà dei punti 1,2,3,4 sono analoghe a quelle dell' Esempio 7.8 e sono riportate nella tabella seguente, dove si è fatto nuovamente uso della Eq.(7.53) per il calcolo di  $T_a$  e  $T_b$ .

	$p$	$T$	$h$	$s$
	bar	K	kJ/kg	kJ/kg K
1	1	293.15	0.0	0.8598
2	6	538.1	246.1	0.9557
3	6	1473	1185.2	1.9672
4	1	941.8	651.6	2.0322
$a$	1	841.0	550.3	1.4042
$b$	6	639.1	347.5	1.6426

La potenza meccanica utile (inalterata rispetto all'Es.8) è data da

$$W'_{mu} = G c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = 144 \text{ kW}$$

mentre la potenza termica ceduta in caldaia si ottiene da

$$W_{tc} = G c_p (T_3 - T_a) = 317.5 \text{ kW}$$

Che è minore di quella del caso ideale! Questo miglior risultato per il ciclo con rigenerazione è imputabile al fatto che i gas escono dalla turbina "reale" a temperatura maggiore, e quindi una maggiore aliquota di energia termica è recuperabile. Inoltre, essi escono anche dal compressore a temperatura superiore. D'altra parte, la potenza meccanica utile diminuisce.

Conseguentemente, il rendimento di primo principio vale

$$\eta = \frac{W'_{m,u}}{W_{tc}} = 0.453$$

Il rendimento di secondo principio è dato da

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\eta_{Cam}} = \frac{\eta}{1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0.57$$

ed infine la PMU (invariata rispetto all' Esempio 7.8) è data da

$$PMU = \frac{G}{W'_{mu}} = 3.49 \text{ kg/MJ}$$

□

### ***Cenni ad ulteriori possibili miglioramenti del ciclo Brayton***

Si accenna qui solo brevemente agli ulteriori metodi per migliorare il rendimento del ciclo Brayton dato che essi sono ancora poco diffusi a livello applicativo. Per una loro trattazione approfondita, si veda ad esempio Mastrullo, Mazzei e Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori, Cap.2.7-2.8.

- *Compressione multistadio interrefrigerata*: abbiamo visto (Cap.4) che con tale tecnica si può ridurre il lavoro di compressione. Combinata alla rigenerazione, essa produce un sensibile aumento di rendimento a spese di una notevole complicazione dell'impianto. Recentemente, gli studi sulla compressione interrefrigerata hanno subito un nuovo impulso dettato dalla necessità di elevare il rapporto di compressione fino a 40:1 ed oltre; è stato proposto anche di effettuare la interrefrigerazione iniettando acqua nel fluido di lavoro invece di utilizzare uno scambiatore di calore.
- *Espansione multistadio con risurriscaldamento*: detta anche *post-combustione*, è un processo analogo al risurriscaldamento del ciclo Rankine. In questo caso si sfrutta il fatto che i gas combusti hanno ancora un residuo tenore di ossigeno, dato che la combustione avviene in *eccesso di aria* (v. Cap.15) per limitare le temperature di ingresso in turbina. I gas vengono pertanto spillati dalla turbina ad una pressione intermedia, vi si effettua una seconda combustione incrementandone la temperatura e successivamente essi vengono rinviati alla turbina di bassa pressione. Nei motori aeronautici a reazione, la post-combustione si effettua a valle della turbina e prima dell'ugello: è diffusa specialmente negli aviogetti militari.

Queste soluzioni comportano generalmente un incremento di peso, complessità e costo della macchina, vanificando la semplicità di impianto e di installazione caratteristica del ciclo Brayton, cosicché esse hanno avuto finora poco successo commerciale, nonostante il vantaggio termodinamico; vengono adesso riproposte, specialmente per quanto riguarda la interrefrigerazione, come temi di ricerca per la realizzazione di impianti ad elevato rendimento.

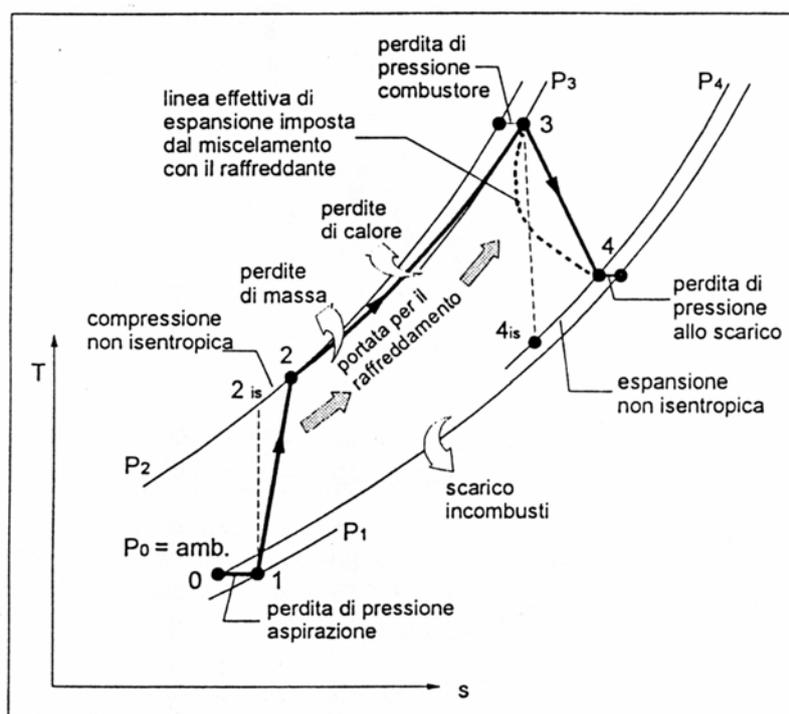
### ***Metodi di studio più accurati per il ciclo Brayton***

Tutte le considerazioni svolte finora sono valide nel caso che il fluido di lavoro sia un gas ideale con calore specifico costante. Si possono considerare modelli via via più accurati del fluido di lavoro:

- gas ideale con  $c_p = f(T)$ ;
- gas reale con  $h = f(T, p)$ ;
- gas reale di composizione chimica variabile tra compressione ed espansione (per effetto della combustione interna).

In tutti questi casi, le espressioni in cui compare l'entalpia (es. Eq.(7.30)) e non la temperatura del fluido (es. Eq.(7.31)) rimangono comunque valide.

In generale, un modello realistico del ciclo Brayton dovrebbe anche tener conto delle perdite di carico nella camera di combustione, nonché di quelle dovute al sistema di scarico ed al filtraggio dell'aria in aspirazione: questo tuttavia non comporta complicazioni eccessive dal punto di vista concettuale, ma solo un appesantimento nei bilanci. Una trattazione esauriente ed applicativa delle turbine a gas è riportata nel testo di Lozza. A titolo di esempio si riporta in Fig.26 (tratta dal testo suddetto) l'andamento di un ciclo reale sul diagramma  $T-s$ .

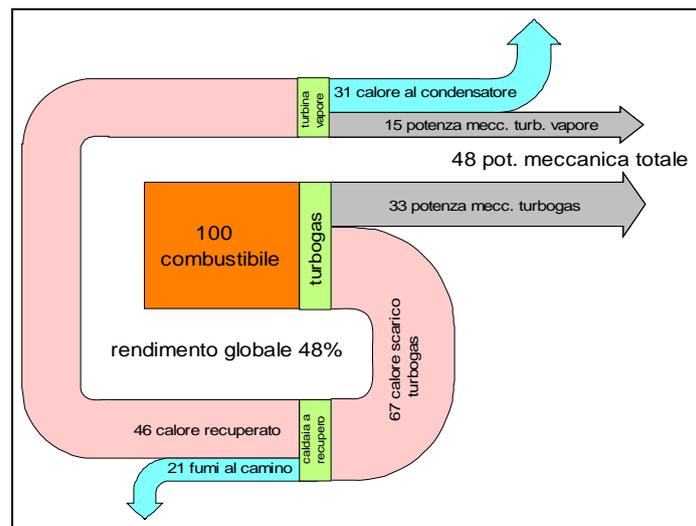


**Figura 26:** Ciclo di Brayton reale con indicazione dei principali scostamenti da quello ideale (dal testo di Lozza).

## 5. Impianti a ciclo combinato

Abbiamo accennato come una delle principali cause di irreversibilità del ciclo Rankine consista nella elevata differenza di temperatura tra il vapore ed i prodotti della combustione in caldaia, e come al contrario il rendimento del ciclo Brayton sia penalizzato dallo scarico dalla turbina di gas ad elevata temperatura rispetto all'ambiente. Da queste considerazioni nasce l'idea *di accoppiare i due cicli*, utilizzando i gas di scarico della turbina del ciclo Brayton per riscaldare (totalmente od in parte) il vapore del ciclo Rankine. Il flusso energetico in questo tipo di impianto è mostrato in Fig.27.

Tale concetto, sorprendentemente, fu già espresso con chiarezza estrema da Sadi Carnot nel 1824 nel saggio "Sulla potenza motrice del fuoco": "... L'aria, allora, sembrerebbe più conveniente del vapore per realizzare la potenza motrice da cadute di calorico da temperature alte; forse a temperature minori il vapore può andare meglio. Potremmo immaginare anche la possibilità di far agire lo stesso calore successivamente sull'aria e sull'acqua. Sarebbe solo necessario che l'aria avesse, dopo l'uso, una temperatura elevata ed invece di buttarla immediatamente nell'atmosfera, avvolgesse una caldaia proprio come se fosse uscita direttamente da una fornace." Tuttavia, esso è rimasto inapplicato per più di un secolo! Naturalmente questo non è dovuto semplicemente a "stupidità": fino a non molti anni fa, le turbine a gas avevano rendimenti troppo bassi per rendere economicamente conveniente il ciclo combinato.



**Figura 27:** Diagramma di Sankey (semplificato senza tener conto delle perdite) che illustra i flussi energetici in un ciclo combinato *unfired*.

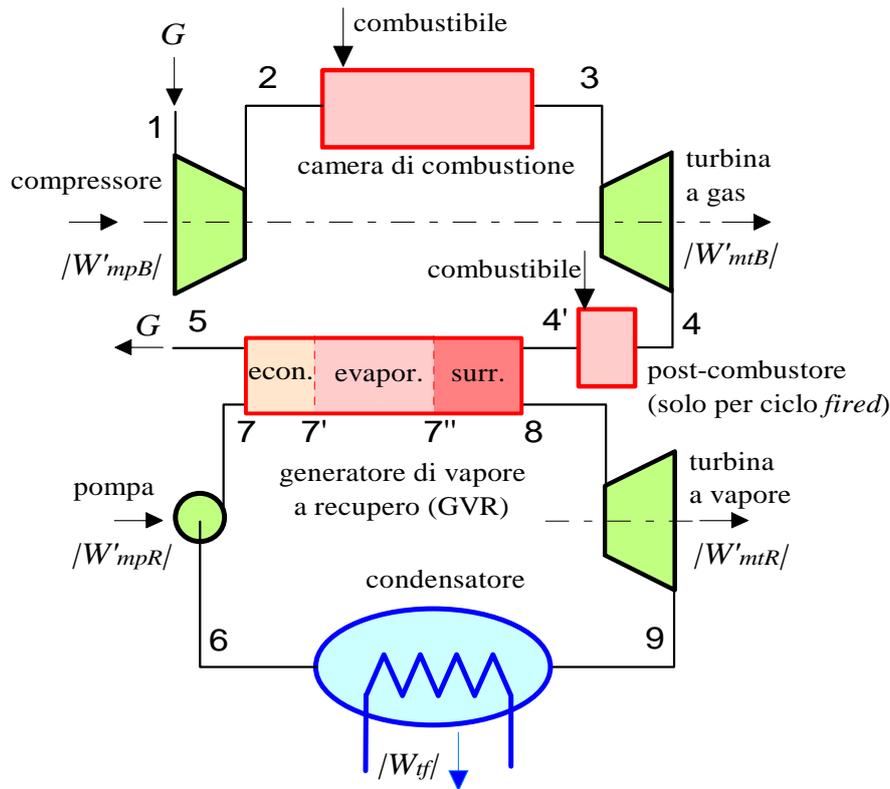
L'impianto che ne risulta è detto *a ciclo combinato*, ed è in grado di raggiungere, con opportuni accorgimenti, rendimenti di primo principio sicuramente oltre il 50%, e fino al 60% in alcuni impianti recenti. Questa tecnica costituisce la prospettiva più promettente per incrementare le prestazioni degli impianti termoelettrici; nel prossimo futuro è prevista, oltre che la costruzione di nuovi impianti, anche la conversione di impianti esistenti in impianti a ciclo combinato (*repowering*) per aumentarne la potenza erogata a parità di consumi di combustibile, e quindi di inquinanti emessi.

Lo schema di massima di un ciclo combinato è riportato in Fig.28. La sezione a ciclo Brayton (detto *topper*, cioè quello che sta sopra) non presenta differenze sostanziali da quello convenzionale. I gas allo scarico, anziché essere convogliati al camino, vengono inviati ad un componente detto *generatore di vapore a recupero (GVR)* dove cedono la loro energia residua all'acqua del ciclo Rankine (detto *bottomer*, cioè quello che sta sotto). Questo schema è il più diffuso ed è detto *unfired*, in contrapposizione al cosiddetto ciclo *fired*, in cui un post-combustore è interposto tra lo scarico della turbogas e il generatore di vapore a recupero. Nel post-combustore, ulteriore combustibile viene bruciato sfruttando il residuo tenore di ossigeno dei gas di scarico, e questi subiscono un ulteriore aumento di temperatura prima di entrare nella GVR.

vapore è quindi "gratuita". Il rendimento di primo principio si ottiene quindi come

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{W'_{mu,R} + W'_{mu,B}}{W_{tc,B} + W_{t,post}} \quad (7.58)$$

dove i pedici *B* e *R* indicano rispettivamente i cicli Brayton e Rankine e, ovviamente, la potenza termica ceduta nel postcombustore,  $W_{t,post}$ , è nulla per il ciclo *unfired*.



**Figura 28:** Impianto a ciclo combinato. Negli impianti *unfired* il post-combustore 4-4' non è installato

Con esclusione dell'eventuale apporto di energia nel post-combustore, la produzione di Nel caso in cui si consideri il ciclo Brayton operante ad aria standard e si possa trascurare (come di consueto) la potenza di pompaggio nel ciclo Rankine, si ha

$$\eta = \frac{W'_{mu}}{W_{tc}} = \frac{W'_{mu,R} + W'_{mu,B}}{W_{tc,B} + W_{t,post}} = \frac{G_B c_p (T_3 - T_4) - G_B c_p (T_2 - T_1) + G_R (h_8 - h_9)}{G_B c_p (T_3 - T_2) + G_B c_p (T_{4'} - T_4)} \quad (7.59)$$

Il cuore dell'impianto a ciclo combinato è costituito dal generatore di vapore a recupero, che non è altro che uno scambiatore gas-vapore. Il suo bilancio termodinamico si esprime come

$$G_B c_p (T_{4'} - T_5) = G_R (h_8 - h_7) \quad (7.60)$$

e lega la portata di vapore nel ciclo Rankine,  $G_R$ , con quella del ciclo Brayton,  $G_B$ . In particolare, fissati i parametri del ciclo Brayton e la temperatura dei fumi allo scarico  $T_5$ , dalla Eq.(7.60) è possibile ottenere la portata (e quindi la potenza) del ciclo Rankine.

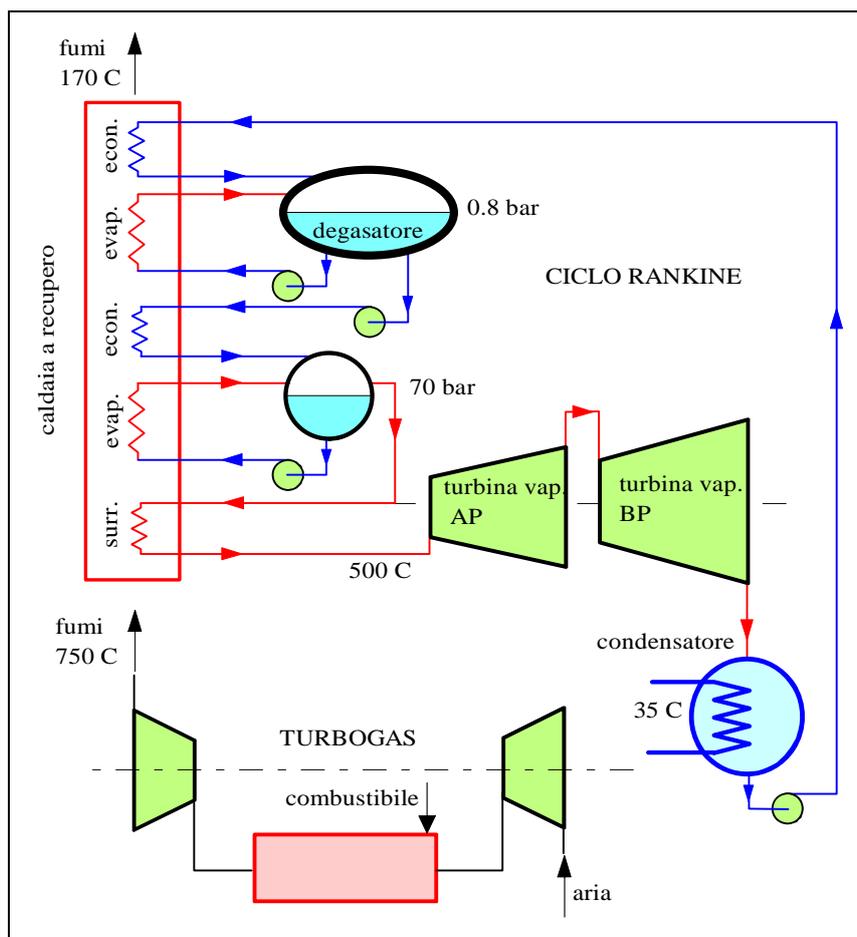
E' logico che (tranne che in caso di costruzioni particolari) la sezione a vapore non può funzionare quando la sezione a ciclo Brayton è inoperativa, mentre quest'ultima può essere azionata anche da sola bypassando il GVR.

In genere, nei cicli *unfired* il rapporto tra la potenza della sezione a gas e quella a vapore è circa 2:1, con pressioni di vapore da 40 a 70 bar e temperature di ammissione nella turbina a vapore da 450 a 500 °C; la temperatura di scarico dei gas al camino varia da 150 a 110 °C.

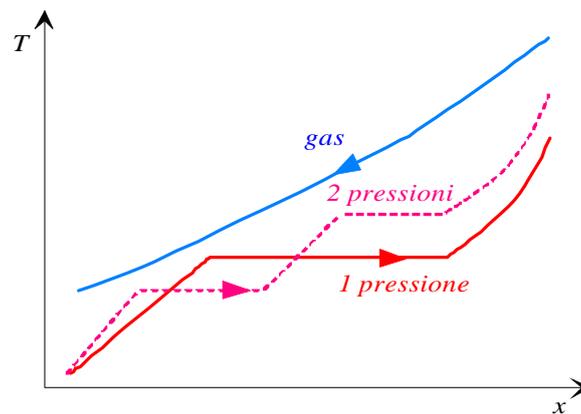
Nei cicli *fired*, invece, il vapore all'ammissione in turbina può superare i 100 bar e i 510 °C e la potenza della sezione a vapore è in genere superiore a quella della sezione a gas.

Lo schema del ciclo con la disposizione dei fasci tubieri è mostrato in Fig.29. Nella caldaia a recupero i fasci tubieri in cui viene prodotto il vapore sono ordinati in ordine decrescente di temperatura in modo da sfruttare il salto termico in maniera ottimale (come esposto in maggior dettaglio nel Cap.13, questo schema è detto *controcorrente* in quanto i due fluidi percorrono lo scambiatore in direzioni opposte). Infatti lo scambio di calore con salto termico troppo elevato ha come risultato un'alta irreversibilità con conseguente ingente distruzione della disponibilità dei gas di scarico. Per ottimizzare ulteriormente il salto termico tra gas e vapore, come è mostrato in Fig.30, risulta conveniente disporre di due fasci evaporatori a pressione (e quindi temperatura) diverse. Si ottiene così il cosiddetto *ciclo combinato a due pressioni*, il cui schema è mostrato in Fig.31. La pressione dello stadio di bassa è pari a circa il 10% di quello di alta pressione. Sono concepibili anche cicli *a tre pressioni*, ma la loro applicazione è per ora poco conveniente.

Nella sezione vapore del ciclo combinato non sono in genere presenti preriscaldatori: ciò è dovuto al fatto che è inutile sottrarre vapore alla turbina per il preriscaldamento, in quanto il GVR funziona "gratis"; inoltre, introducendo in quest'ultima acqua a bassa temperatura, si può spingere il recupero di calore dai gas di scarico fino a temperature più basse.



**Figura 29:** Schema di ciclo combinato *unfired* ad 1 pressione.



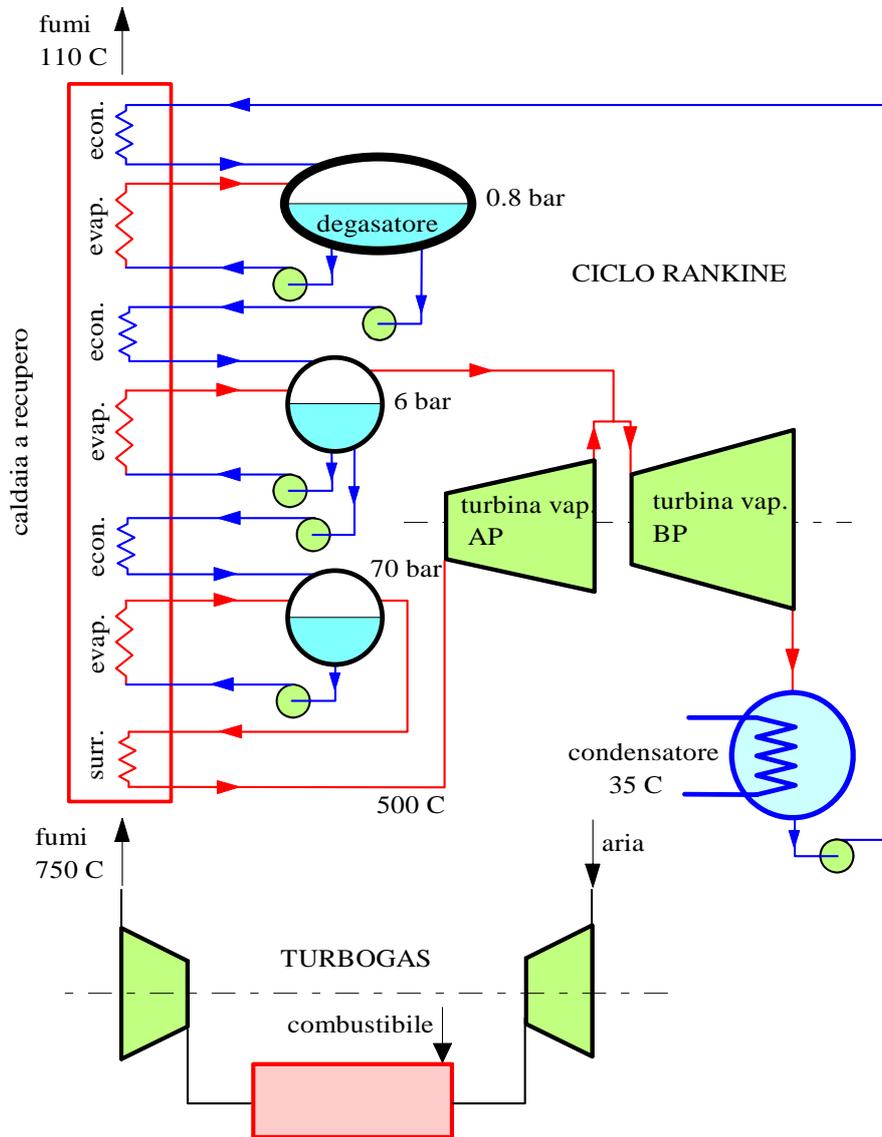
**Figura 30:** Andamento delle temperature dei due fluidi nel generatore di vapore a recupero.

### ***Cenno al repowering degli impianti convenzionali***

Si definisce *repowering* l'operazione di ripotenziamento di una centrale termoelettrica a ciclo Rankine con l'aggiunta di una o più turbine a gas. L'operazione di repowering, con limitati costi di investimento, aumenta la potenza e il rendimento delle centrali esistenti, ma trova ostacolo nei costi di fermo impianto e nei vincoli sugli ingombri, intrinseci nella modifica di un progetto già esistente. Le tecniche utilizzate per il repowering sono essenzialmente quelle che seguono.

- *Feedwater Repowering*: i gas di scarico della turbogas alimentano totalmente o parzialmente dei nuovi preriscaldatori che sostituiscono quelli del ciclo Rankine, diminuendo la portata di vapore spillato dalla turbina. Questo intervento è semplice e poco costoso, generalmente dà luogo a significativi incrementi di potenza (fino al 30%) ma bassi aumenti di rendimento (1-2 punti percentuali), anche se in alcuni casi il rendimento può aumentare anche di 6 punti.
- *Boiler Repowering*: I gas caldi di scarico della turbogas vengono mescolati all'aria comburente ed inviati al generatore di vapore del ciclo Rankine. Si hanno incrementi di potenza fino al 35% e incrementi più significativi di rendimento, specie negli impianti più vecchi. E' detto anche *Hot Windbox Repowering*.
- *Supplemental Boiler Repowering*: Si aggiunge una turbogas collegata ad un generatore di vapore a recupero supplementare che viene affiancato in parallelo a quello tradizionale. Questo secondo generatore generalmente fornisce vapore solo agli stadi di bassa e media pressione della turbina a vapore.
- *Site Repowering*: E' la tecnica più radicale e costosa: l'impianto viene completamente demolito e ricostruito ex-novo; si riutilizzano solo le opere di presa per l'acqua di raffreddamento del condensatore e la stazione elettrica. Si ha anche il vantaggio di possedere già le autorizzazioni di carattere ambientale.

Naturalmente è possibile pensare anche ad una tecnica più radicale di *Heat Recovery Repowering*, consistente nel sostituire il generatore di vapore con una caldaia a recupero, ma questo intervento presenta maggiori difficoltà tecnico-economiche ed è comunque limitato a gruppi di piccola potenza.



**Figura 31:** Schema di ciclo combinato *unfired* a 2 pressioni.

**ESEMPIO 7-10 – Ciclo combinato *unfired* ad una pressione.**

In un ciclo combinato *unfired* la sezione turbogas eroga una potenza di 15 MW. Pressione e temperatura all'aspirazione ed ingresso turbina a gas valgono rispettivamente  $p_1 = 1$  bar,  $T_1 = 300$  K,  $p_3 = 12$  bar,  $T_3 = 1550$  K. La temperatura di scarico dei fumi dalla caldaia a recupero è  $T_5 = 440$  K. Considerare il fluido di lavoro aria standard. La sezione vapore è caratterizzata da pressione e temperatura di ammissione in turbina  $p_1 = 70$  bar,  $T_8 = 500$  °C e temperatura al condensatore  $T_9 = 35$  °C. Le due turbine hanno rendimento isoentropico 0.85 ed il compressore del ciclo Brayton ha rendimento 0.82. Determinare le portate di fluido nelle due sezioni, la potenza erogata dalla sezione vapore e il rendimento dell'impianto. Con riferimento alla Fig. 28, determinare inoltre le temperature dei fumi e dell'acqua nel punto 7', supponendo che l'acqua sia in condizione di liquido saturo in tale punto.

☒ I calcoli possono essere eseguiti tramite il programma *JOULE* (Mastrullo, Mazzei, Vanoli, Termodinamica per Ingegneri, Liguori) o con il foglio di calcolo *EXCEL C7CICLOCOMB.xls* (che richiede la libreria *TPX*).

Le temperature nei punti 2 e 4 del ciclo Brayton possono essere ricavate come nell'Es.8 e valgono

$$T_{2i} = T_1 r_p^{R/c_p} = 610.2 \text{ K}, \quad T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 678.3 \text{ K}$$

$$T_{4i} = \frac{T_3}{r_p^{R/c_p}} = 762.1 \text{ K}, \quad T_4 = T_3 - \eta_t (T_3 - T_{4i}) = 880.3 \text{ K}$$

La portata del ciclo Brayton è ottenibile da

$$G_B = \frac{W'_{mu,B}}{c_p [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)]} = \frac{15 \cdot 10^6}{1004.5 \cdot [(1550 - 880.3) - (678.3 - 300)]} = 51.2 \text{ kg/s}$$

Mentre la potenza termica ceduta nello scambiatore ad alta temperatura (2-3) vale

$$W_{ic,B} = G_B c_p (T_3 - T_2) = 44.9 \text{ MW}$$

Le proprietà del vapore nei punti caratteristici del ciclo Rankine sono ricavabili come illustrato nell'Es.3 e sono riportate nella seguente tabella, dove si è aggiunto il punto 7' (uscita dall'economizzatore, liquido saturo a 7 MPa)

	Temp.	Pressione	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	kJ/kg	kJ/kg/K	
6.	35	0.0056	146.7	0.505	0
7.	35.18	7	153.7	0.505	
7'.	285.9	7	1267.2	3.121	0
8.	500	7	3410.3	6.797	
9i.	35.0	0.0056	2085.6	6.797	0.80
9r.	35.0	0.0056	2284.3	7.442	0.88

E' possibile ora calcolare la portata di vapore dal bilancio del generatore di vapore a recupero, Eq.(7.60)

$$G_B c_p (T_4 - T_5) = G_R (h_8 - h_7) \Rightarrow G_R = \frac{G_B c_p (T_4 - T_5)}{h_8 - h_7} = 6.96 \text{ kg/s}$$

E la potenza erogata dal ciclo Rankine vale allora

$$W'_{mu,R} = G_R (h_8 - h_{9r}) = 7.79 \text{ MW}$$

Il rendimento globale dell'impianto è dato da (Eq.(7.59))

$$\eta = \frac{W'_{mu,R} + W'_{mu,B}}{W_{ic,B}} = 0.508$$

Infine la differenza di temperatura richiesta può essere ricavata ottenendo la temperatura  $T_{B,A}$  dei fumi nel punto A dal bilancio della sola sezione economizzatore della caldaia a recupero

$$G_B c_p (T_{B,A} - T_5) = G_R (h_{7'} - h_7) \Rightarrow$$

$$T_{B,A} = T_5 + \frac{G_R (h_{7'} - h_7)}{G_B c_p} = 440 + \frac{6.96(285.9 - 35.18) \cdot 10^6}{51.2 \cdot 1004.5} = 590.5 \text{ K}$$

ed essendo nota la temperatura del vapore all'uscita di tale sezione si ha

$$\Delta T_{pinch} = T_{B,A} - T_{7'} = 31.5 \text{ K}$$

che deve essere positivo per consentire lo scambio termico dai fumi all'acqua. Questa è la posizione in cui le temperature dei due fluidi si avvicinano di più (v. Fig.30).

□

**ESEMPIO 7-11 – Confronto tra il rendimento exergetico di un generatore di vapore convenzionale ed uno a recupero.**

Confrontare il rendimento exergetico del GVR di cui all'esempio 7.10 con quello di un generatore di vapore convenzionale nel cui lato primario si utilizzino direttamente dei fumi di combustione alla temperatura di ingresso di 1200 °C e di uscita di 167° C. Per semplicità, considerare anche in questo secondo caso i fumi come aria standard.

☞ *I calcoli possono essere eseguiti con il foglio di calcolo EXCEL C7EX-GVAP.xls (che richiede la libreria TPX).*

Come risulta dell'Esempio 7.7, il rendimento exergetico di uno scambiatore è definito come

$$\varepsilon = \frac{\text{aum. di disponib. corrente fredda}}{\text{dimin. di disponib. corrente calda}} = \frac{G_R (a_{f8} - a_{f7})}{G_B (a_{f4} - a_{f5})} = \frac{G_R [h_8 - h_7 - T_0 (s_8 - s_7)]}{G_B \left[ c_p (T_4 - T_5) - T_0 \left( c_p \ln \frac{T_4}{T_5} \right) \right]}$$

dove si è considerato il fluido caldo un gas ideale con  $c_p$  costante ed il processo isobaro.

Nel primo caso (GVR) si ha quindi

$$\varepsilon_{GVR} = \frac{G_R [h_8 - h_7 - T_0 (s_8 - s_7)]}{G_B c_p \left[ (T_4 - T_5) - T_0 \ln \frac{T_4}{T_5} \right]} = 0.80$$

Nel secondo caso è necessario calcolare la portata di fumi necessaria  $G_F$ , che è data facilmente dal bilancio energetico dello scambiatore

$$G_F = \frac{G_R (h_8 - h_7)}{c_p (T_4 - T_5)} = 21.8 \text{ kg/s}$$

Ripetendo il calcolo si ha quindi.

$$\varepsilon_{CONV} = \frac{G_R [h_8 - h_7 - T_0 (s_8 - s_7)]}{G_F c_p \left[ (T_4 - T_5) - T_0 \ln \frac{T_4}{T_5} \right]} = 0.65$$

□

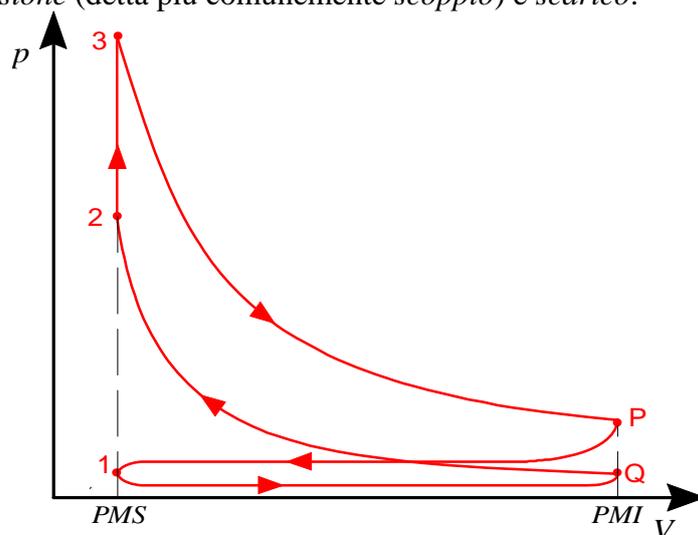
## 6. I cicli dei motori alternativi a combustione interna: Otto, Diesel e Sabathè

I cicli Otto e Diesel sono i cicli caratteristici dei motori alternativi a combustione interna; vedremo che essi possono essere considerati due casi particolari di un unico ciclo, il ciclo Sabathè, del quale esamineremo le prestazioni.

### *Il ciclo Otto (o Beau de Rochas).*

Analizziamo cosa accade nel cilindro di un motore alternativo a benzina a quattro tempi. Per far questo, possiamo costruire sul piano  $p$ - $V$  un diagramma detto *diagramma indicato* (introdotto da J. Watt alla fine del '700) in quanto può essere ricavato sperimentalmente in laboratorio disponendo di due sensori (indicatori) di pressione e di angolo di manovella: da quest'ultimo mediante semplici calcoli si può risalire al volume istantaneo del fluido contenuto tra cilindro e pistone, ovvero di quello che consideriamo il nostro sistema.

In una prima fase di *aspirazione* (v. Fig.32) il pistone si muove dal punto morto superiore (PMS, punto 1) al punto morto inferiore (PMI, punto Q) aspirando la miscela aria-benzina attraverso la valvola di aspirazione: il volume aumenta e la pressione si mantiene approssimativamente costante ad un valore lievemente inferiore a quella esterna a causa delle perdite nei condotti di aspirazione. Al termine di tale fase inizia quella di *compressione*: le due valvole sono chiuse e nella sua corsa dal PMI al PMS il pistone comprime il fluido. Quando il pistone ha raggiunto il PMS (punto 2), la scintilla scoccata nella candela (per tale motivo, tali motori si dicono anche ad *accensione comandata*) provoca la *combustione* della miscela aria-benzina: essendo rapidissima, si può ipotizzare che essa avvenga a volume costante (2-3): la pressione e la temperatura del fluido aumentano notevolmente ed inizia la fase di *espansione*, durante la quale il pistone ritorna al PMI (punto P). Al termine di tale fase, la valvola di scarico si apre ed il fluido viene scaricato all'esterno mentre il pistone ritorna al PMS: il volume diminuisce nuovamente e la pressione (sempre a causa delle perdite di carico) si mantiene grossomodo costante ad un valore superiore a quella atmosferica. L'intero ciclo del motore a quattro tempi si compie pertanto in quattro fasi, ognuna delle quali avviene in una corsa del pistone dal PMI al PMS o viceversa: *aspirazione*, *compressione*, *combustione/espansione* (detta più comunemente *scoppio*) e *scarico*.



**Figura 32:** Diagramma indicato (semplificato) per un motore alternativo ad accensione comandata.

Nella realtà, tali fasi non sono così ben delimitate dal PMI e dal PMS: esistono *anticipi* nell'accensione e nell'apertura delle valvole, oltre a ritardi nella chiusura di queste ultime, che rendono le transizioni tra le fasi meno nette di quanto ipotizzato. Inoltre, la combustione non è esattamente isovolumica.

Il rapporto di compressione volumetrico,  $r_v$ , dei motori alternativi è dato da (v. Fig.33)

$$r_v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (7.61)$$

esso è limitato dal fatto che, a causa dell'incremento di temperatura dovuto alla compressione, la miscela aria benzina può accendersi spontaneamente prima che il pistone abbia raggiunto il PMS: questo fenomeno, detto *detonazione*, provoca un'improvvisa forza resistente sul pistone che si traduce nel cosiddetto *battito in testa* del motore. Per ovviare a questo, si aggiungono alle benzine additivi antidetonanti. Il potere antidetonante della benzina è indicato dal suo *numero di ottano*. Anche in presenza di antidetonanti, il rapporto di compressione volumetrico nei motori a benzina difficilmente supera 15:1 ed è in genere attorno a 10:1.

In passato l'antidetonante più usato era il *piombo tetraetile* (presente nella benzina super), attualmente proibito perché considerato dannoso per la salute. Gli antidetonanti usati attualmente nelle cosiddette *benzine verdi* sono principalmente idrocarburi aromatici, tra cui il benzene, e MTBE, metil-ter-butil-etero. Si sospetta che essi siano ancor più dannosi del loro predecessore, se non eliminati correttamente dalle marmitte catalitiche. In particolare, la potente azione cancerogena del benzene è ben nota fino dagli anni '60.

La cilindrata dei motori commerciali ad accensione comandata per trazione può raggiungere gli 8 litri, con regimi di rotazione attorno ai 5000 rpm. Nei motori da competizione si raggiungono 20000 rpm con potenze dell'ordine di 300 kW/L.

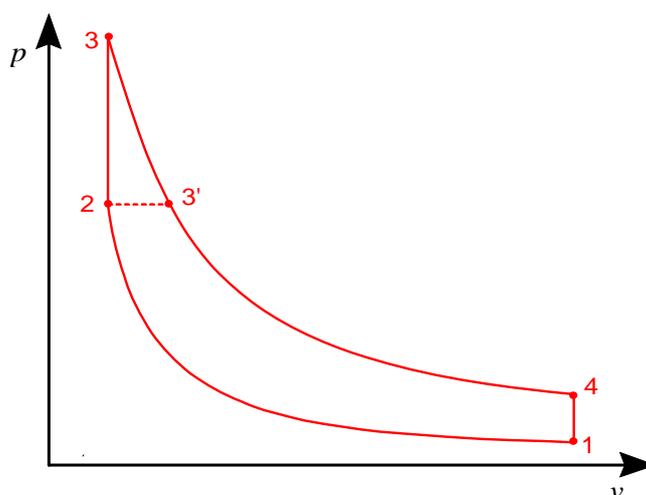
Il ciclo così descritto è caratteristico di un motore a *regime periodico* ed il ciclo è forzatamente *aperto* a causa della *combustione interna* che esaurisce l'ossigeno presente nel fluido. Tuttavia, come nel caso del ciclo Joule-Brayton, è possibile ricondurre questo schema ad un *ciclo chiuso equivalente* dal punto di vista energetico facendo alcune semplici ipotesi:

1. Il fluido di lavoro è un gas ideale a  $c_p$  costante di composizione chimica invariabile (la cosiddetta *aria standard*).
2. La combustione interna viene sostituita da un equivalente *riscaldamento a volume costante* dall'esterno.
3. Le fasi di aspirazione e scarico vengono sostituite da un *raffreddamento isovolumico* (con cessione di calore all'esterno) che riporta il fluido dalle condizioni P alle condizioni Q in Fig.32.
4. Tutte le trasformazioni sono ipotizzate reversibili; compressione ed espansione si considerano adiabatiche.

Il ciclo di riferimento così ottenuto è costituito da due adiabatiche (reversibili, e quindi isoentropiche) raccordate da due isovolumiche ed è detto ciclo *Otto* o *Beau de Rochas*<sup>1</sup>. Esso è rappresentato nei piani  $p-v$  e  $T-s$  rispettivamente in Fig.33 ed in Fig.34.

---

<sup>1</sup> Tale ciclo fu brevettato dal francese Alphonse Beau de Rochas nel 1862. Il primo motore a combustione interna ad accensione comandata fu presentato all'esposizione di Parigi del 1867 dai tedeschi Nikolaus August Otto e Eugen Langen: esso riprendeva con alcuni perfezionamenti un prototipo costruito nel 1854 dagli italiani Eugenio Barsanti e Felice Matteucci, che non trovò applicazione pratica.



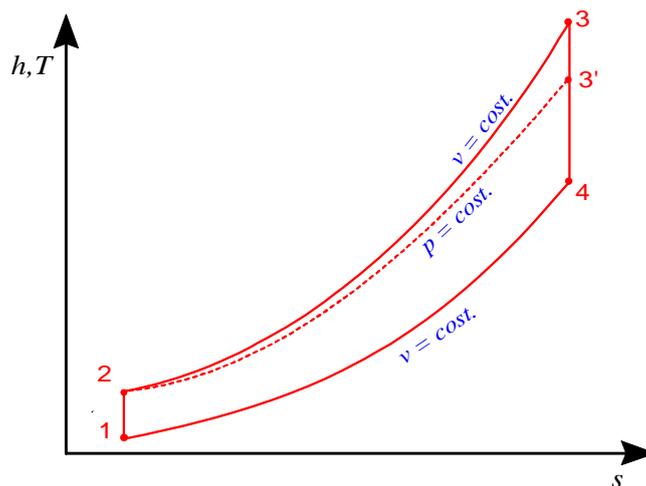
**Figura 33:** Diagramma  $p-v$  per i cicli Otto (1-2-3-4) e Diesel (1-2-3'-4).

### Il ciclo Diesel

Le principali differenze tra il ciclo Otto e quello Diesel<sup>2</sup> sono le seguenti:

- durante la fase di compressione viene compressa solamente aria;
- il combustibile (gasolio) viene iniettato nel cilindro alla fine della compressione e la combustione inizia spontaneamente a causa dell'alta temperatura dell'aria; inoltre, la combustione del gasolio è più graduale di quella della benzina e si può ipotizzare che avvenga a *pressione costante*.

Questi motori sono detti pertanto ad *accensione spontanea* e non hanno bisogno né di candele né di circuito di accensione: per contro richiedono un sofisticato sistema di iniezione ad alta pressione. Il fatto che durante la compressione sia presente solo aria rende possibile realizzare rapporti di compressione volumetrici più elevati che nei motori a ciclo Otto (indicativamente intorno a 20:1).



**Figura 34:** Diagramma  $T-s$  per i cicli Otto (1-2-3-4) e Diesel (1-2-3'-4).

<sup>2</sup> Brevettato dal tedesco Rudolf Diesel nel 1893.

Mediante le stesse ipotesi semplificative introdotte per il ciclo Otto, si può definire *un ciclo Diesel di riferimento ad aria standard*, costituito da due isoentropiche raccordate da una isobara e da una isovolumica, rappresentato nei piani  $p-v$  e  $T-s$  rispettivamente in Fig.33 ed in Fig.34.

Per completezza, ricordiamo che esistono anche *motori alternativi a due tempi* (sia ad accensione spontanea che comandata) in cui l'intero ciclo si compie in due sole corse del pistone. La loro trattazione esula dagli scopi di queste note ed il lettore interessato può trovare dettagli su di essi nel testo di Della Volpe (Cap.8).

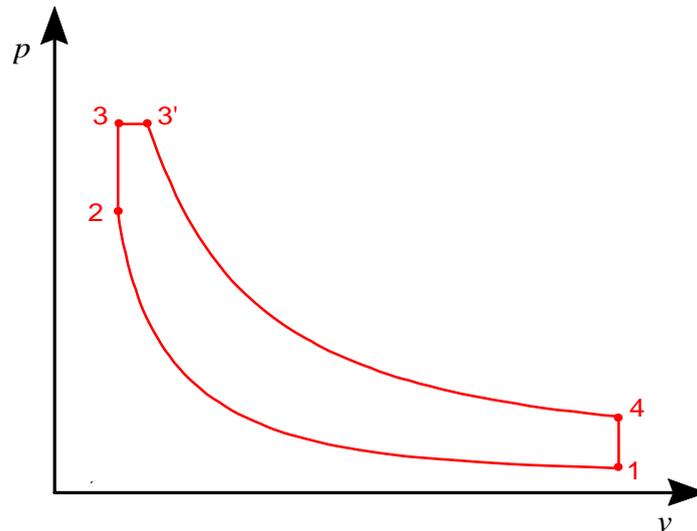
I motori Diesel si distinguono a seconda del regime di rotazione in *veloci* (fino a 5000 rpm, potenze fino a 400 kW), *medio-veloci* (800 rpm, 20 MW) e *lenti* (120 rpm). I motori diesel lenti sono generalmente a due tempi.

### Il ciclo Sabathè

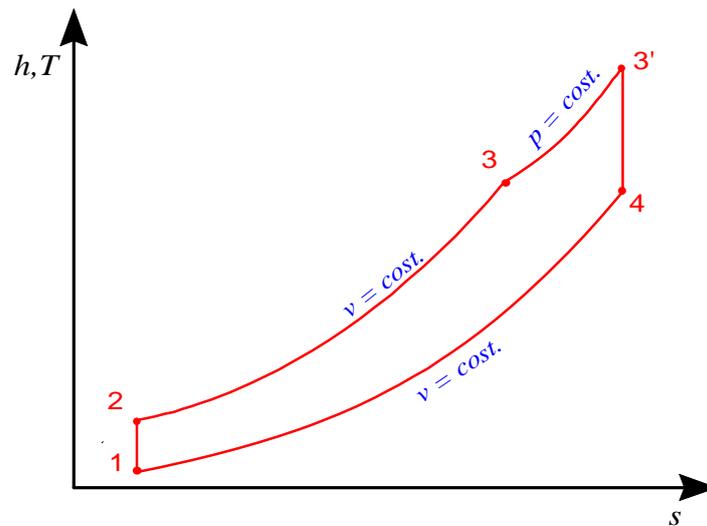
Abbiamo visto che la fase di combustione nei motori alternativi non è, in ogni caso, né esattamente isobara né esattamente isovolumica. Il ciclo Sabathè rappresenta tale fase di combustione con un primo tratto isovolumico seguito da uno isobaro ed è pertanto più aderente alla realtà. Esso è rappresentato nei piani  $p-v$  e  $T-s$  rispettivamente in Fig.35 ed in Fig.36. Dato che i cicli Otto e Diesel non sono che casi particolari del ciclo Sabathè, ci limiteremo a studiare le prestazioni di quest'ultimo. A questo scopo, nel seguito definiamo preventivamente alcune grandezze.

Il *rapporto di adduzione del calore a volume costante*,  $\tau$ , è definito (con riferimento alla Fig.35) come

$$\tau = \frac{T_3}{T_2} \quad (7.62)$$



**Figura 35:** Diagramma  $p-v$  per il ciclo Sabathè.



**Figura 36:** Diagramma  $T$ - $s$  per il ciclo Sabathè.

ed il rapporto di adduzione del calore a pressione costante,  $b$ , è dato da

$$b = \frac{T_{3'}}{T_3} \quad (7.63)$$

Infine, si definisce *pressione media indicata*,  $p_{mi}$ , il valore di quella pressione costante che, se applicata durante tutta la corsa al pistone, darebbe luogo allo stesso lavoro utile prodotto effettivamente dal ciclo. Detti  $D$  l'alesaggio e  $C$  la corsa del cilindro, essa si può pertanto ottenere dall'eguaglianza

$$L = p_{mi} \frac{\pi D^2}{4} C = p_{mi} (V_1 - V_2) \quad (7.64)$$

da cui

$$p_{mi} = \frac{L}{V_1 - V_2} = \frac{l}{v_1 - v_2} \quad (7.65)$$

Ricordiamo che il lavoro utile specifico,  $l$ , è rappresentato graficamente dall'area del ciclo sui piani  $p$ - $v$  e  $T$ - $s$ . Un basso valore della pressione media indicata è indicativo di un motore in cui le forze di attrito meccanico hanno un peso relativo importante: a parità di lavoro erogato, il pistone ha una corsa molto lunga oppure un valore elevato dell'alesaggio. Al contrario, un valore troppo alto di  $p_{mi}$  indica un motore soggetto a forti sollecitazioni meccaniche.

Il rendimento di primo principio del ciclo può essere più opportunamente espresso nella forma

$$\eta = \frac{W_{mu}}{W_{TC}} = 1 - \frac{|W_{TF}|}{W_{TC}} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{|q_F|}{q_C} \quad (7.66)$$

dove

$$\begin{aligned} |q_F| &= u_4 - u_1 \\ q_C &= (u_3 - u_2) + (h_{3'} - h_3) \end{aligned} \quad (7.67)$$

nel caso di un fluido con calori specifici costanti (non necessariamente un gas ideale) tali espressioni divengono

$$\begin{aligned} |q_F| &= c_v (T_4 - T_1) \\ q_C &= c_v (T_3 - T_2) + c_p (T_{3'} - T_3) = c_v [(T_3 - T_2) + k (T_{3'} - T_3)] \end{aligned} \quad (7.68)$$

da cui il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{(T_3 - T_2) + k (T_{3'} - T_3)} \quad (7.69)$$

Le trasformazioni 1-2 e 3'-4 sono isoentropiche, per cui per un gas ideale si può scrivere:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} ; \quad \frac{T_{3'}}{T_4} = \left( \frac{v_4}{v_{3'}} \right)^{k-1} \quad (7.70)$$

da cui, ricordando che la trasformazione 3-3' è isobara e la 2-3 e 4-1 isovolumiche, tenuto conto della Eq.(7.61) si ottiene

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 r_v^{k-1} \\ T_4 &= T_{3'} \left( \frac{v_{3'}}{v_4} \right)^{k-1} = T_{3'} \left( \frac{b v_3}{v_4} \right)^{k-1} = T_{3'} \left( \frac{b v_2}{v_1} \right)^{k-1} = T_{3'} \left( \frac{b}{r_v} \right)^{k-1} \end{aligned} \quad (7.71)$$

siamo ora in grado di ricavarci tutte le temperature del ciclo in funzione della sola  $T_1$ , per poi procedere alla loro sostituzione nell'espressione del rendimento.

Le temperature valgono rispettivamente, tenuto conto delle Eqq.(7.62) e (7.63)

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 r_v^{k-1} \\ T_3 &= T_2 \tau = T_1 r_v^{k-1} \tau \\ T_{3'} &= T_3 b = T_2 b \tau = T_1 r_v^{k-1} b \tau \\ T_4 &= T_{3'} \left( \frac{b}{r_v} \right)^{k-1} = T_1 b^k \tau \end{aligned} \quad (7.72)$$

da cui finalmente si ottiene l'espressione del rendimento del ciclo Sabathè ad aria standard

$$\eta_{Sab} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1} \left[ (\tau - 1) + \tau k (b - 1) \right]} \quad (7.73)$$

Questa espressione nel caso del ciclo Otto ( $b = 1$ ) si semplifica in

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \quad (7.74)$$

il rendimento del ciclo Otto dipende pertanto dalle proprietà del gas ( $k$ ) e dal rapporto di compressione volumetrico: in particolare, aumenta al crescere di quest'ultimo.

Nel caso del ciclo Diesel ( $\tau = 1$ ) si ha invece

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \frac{b^k - 1}{k(b-1)} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} f(b, k) \quad (7.75)$$

si può notare che  $f(b, k)$  è una funzione crescente di  $b$  che tende ad 1 per  $b = 1$  (ovvero per il ciclo Otto). Pertanto, a parità di rapporto di compressione, il rendimento del ciclo Diesel ( $b > 1$ ) è inferiore a quello del ciclo Otto (ma in realtà il ciclo Diesel ammette rapporti di compressione nettamente superiori, per cui nella pratica il confronto si ribalta). Inoltre, si nota che il rendimento del ciclo Diesel diminuisce al crescere di  $b$ , ovvero della quantità di calore somministrata: parimenti, comunque, aumenta l'area del ciclo sui diagrammi  $p-v$  e  $T-s$  e quindi il lavoro utile unitario, come si può vedere in Figg.32-33

### ESEMPIO 7-12 – Ciclo Otto.

Un ciclo Otto ad aria standard ha un rapporto di compressione 8. Le condizioni all'ingresso sono  $p_1 = 1$  bar e  $T_1 = 15$  °C. Il trasferimento di calore dalla sorgente calda è  $q_{23} = 1800$  kJ/kg per ciclo. Determinare il rendimento di primo principio, la pressione e la temperatura nei tre rimanenti punti del ciclo, la pressione media indicata e la portata di fluido necessaria per avere una potenza di 110 kW. Si consideri l'aria un gas ideale a calore specifico costante con  $k = 1.4$ ,  $c_v = 716.5$  J/kg K.

Il rendimento può essere calcolato facilmente dalla Eq.(7.74)

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} = 1 - \frac{1}{8^{0.4}} = 0.565$$

Per le temperature e pressioni si ha

$$T_2 = T_1 r_v^{k-1} = 288 \cdot 8^{0.4} = 662 \text{ K} \quad , \quad p_2 = p_1 r_v^k = 1 \cdot 8^{1.4} = 18.4 \text{ bar}$$

$$T_3 = T_2 + \frac{q_{23}}{c_v} = 662 + \frac{1800}{0.717} = 3172 \text{ K} \quad , \quad p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 18.4 \cdot \frac{3172}{662} = 88.1 \text{ bar}$$

$$T_4 = T_3 r_v^{1-k} = 3172 \frac{1}{8^{0.4}} = 1380 \text{ K} \quad , \quad p_4 = p_3 r_v^{-k} = \frac{88.1}{8^{1.4}} = 4.8 \text{ bar}$$

Il lavoro unitario vale

$$l' = q_{23} - |q_{41}| = q_{23} - c_v (T_4 - T_1) = 1800 - 0.717 \cdot (1380 - 288) = 1017 \text{ kJ/kg}$$

essendo

$$v_1 = \frac{RT}{p_1} = 0.827 \text{ m}^3/\text{kg} \quad , \quad v_2 = \frac{v_1}{r_v} = 0.103 \text{ m}^3/\text{kg}$$

si ha

$$p_{mi} = \frac{l'}{v_1 - v_2} = \frac{1017 \cdot 10^3}{0.827 - 0.103} = 1405 \text{ kPa} = 14.1 \text{ bar}$$

$$G = \frac{W}{l'} = \frac{110}{1017} = 0.108 \text{ kg/s}$$

Si noti che tali prestazioni (specie il rendimento) differiscono notevolmente da quelle reali di un motore a benzina, a causa delle ipotesi semplificative assunte.



**ESEMPIO 7-13 – Ciclo Diesel.**

Un ciclo Diesel ad aria standard ha un rapporto di compressione 20. Le condizioni all'ingresso sono  $p_1 = 1 \text{ bar}$  e  $T_1 = 15 \text{ °C}$ . Il trasferimento di calore dalla sorgente calda è  $q_{23} = 1400 \text{ kJ/kg}$  per ciclo. Determinare il rendimento di primo principio, la pressione e la temperatura nei tre rimanenti punti del ciclo, la pressione media indicata e la portata di fluido necessaria per avere una potenza di 110 kW. Si consideri l'aria un gas ideale a calore specifico costante con  $k = 1.4$ ,  $c_v = 716.5 \text{ J/kg K}$ .

Si ha

$$v_1 = \frac{RT}{p_1} = 0.827 \text{ m}^3/\text{kg} \quad , \quad v_2 = \frac{v_1}{r_v} = 0.041 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Per le temperature e pressioni si ha

$$T_2 = T_1 r_v^{k-1} = 288 \cdot 20^{0.4} = 955 \text{ K} \quad , \quad p_2 = p_1 r_v^k = 1 \cdot 20^{1.4} = 66.3 \text{ bar}$$

$$T_{3'} = T_2 + \frac{q_{23}}{c_p} = 955 + \frac{1400}{1.004} = 2350 \text{ K} \quad , \quad p_3 = p_2 \quad , \quad v_{3'} = v_2 \frac{T_{3'}}{T_2} = 0.101 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$T_4 = T_{3'} \left( \frac{v_{3'}}{v_4} \right)^{k-1} = 2350 \left( \frac{0.101}{0.827} \right)^{0.4} = 1013 \text{ K} \quad , \quad p_4 = p_{3'} \left( \frac{T_4}{T_{3'}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 66.3 \left( \frac{1013}{2350} \right)^{3.5} = 3.5 \text{ bar}$$

Il calore ceduto alla sorgente fredda è dato da

$$|q_{41}| = c_v (T_4 - T_1) = 0.717 \cdot (1013 - 288) = 519 \text{ kJ/kg}$$

Il lavoro unitario vale quindi

$$l' = q_{23} - q_{41} = 1400 - 519 = 881 \text{ kJ/kg}$$

Il rendimento è dato da

$$\eta = 1 - \frac{|q_{41}|}{q_{23}} = 1 - \frac{519}{1400} = 0.63$$

e si ha infine

$$p_{mi} = \frac{l'}{v_1 - v_2} = \frac{881 \cdot 10^3}{0.827 - 0.103} = 1216 \text{ kPa} = 12.2 \text{ bar}$$

$$G = \frac{W}{l'} = \frac{110}{881} = 0.124 \text{ kg/s}$$

Si noti che tali prestazioni (specie il rendimento) differiscono notevolmente da quelle reali di un motore Diesel, a causa delle ipotesi semplificative assunte.



Le ipotesi semplificative assunte nel passaggio dal ciclo reale a quello di riferimento sono piuttosto pesanti; in particolare vengono trascurati:

- la variazione di composizione chimica e di calore specifico del fluido;
- il lavoro compiuto durante le fasi di aspirazione e scarico;
- lo scambio termico con le pareti durante la compressione e l'espansione (nella pratica si possono anche assumere espansione e compressione politropiche con esponenti rispettivamente 1.33 e 1.25);
- le irreversibilità meccaniche (particolarmente importanti nei motori alternativi) e termodinamiche (associate ai gradienti di pressione e temperatura nel sistema);

- le imperfezioni nel processo di combustione;
- la *dissociazione* molecolare del fluido durante la combustione, che implica assorbimento di energia termica che viene “restituita” quando le molecole si ricombinano durante la successiva espansione.

Questo fa sì che le prestazioni ottenute dallo studio dei cicli di riferimento siano abbastanza lontane da quelle reali. In particolare, come vedremo nel seguito, il rendimento effettivo di tali motori difficilmente supera il 35% (con l’eccezione di alcuni tipi di motori Diesel, come riportato più avanti). E’ necessario pertanto procedere in questo caso ad uno studio di natura più empirica, come accennato nel seguito. I valori caratteristici dei cicli Otto e Diesel reali sono riportati nella Tab.2.

	<b>Otto</b>	<b>Diesel (°)</b>
Rapporto di compressione volumetrico, $r_v$	6-11	13-23
Temperatura fine compressione, $T_2$ , °C	350-550	700-900
Pressione fine compressione $p_2$ , bar	9-18	30-50
Pressione massima del ciclo $p_3$ , bar	35-50	60-90
Temperatura massima del ciclo $T_3$ , K	~ 2500	~ 2000
Pressione media effettiva, $p_{me}$ , bar	8-14	7-12
Temperatura gas di scarico $T_4$ , °C	800-1000	600-700

**Tabella 2:** Parametri caratteristici dei motori a ciclo Otto e Diesel

(°) esclusi i motori navali a basso numero di giri, v. nota nel testo

Una rimarchevole eccezione ai dati della Tab.2 è costituita dai *motori Diesel lenti per propulsione navale*: si tratta di perfezionatissimi motori *a due tempi*, sovralimentati, a bassissimo numero di giri (60-120 rpm) con potenze dell’ordine di 3 MW per cilindro, che raggiungono rendimenti superiori al 50% (comparabili, attualmente, solo con quelli del ciclo combinato). La cilindrata di questi motori può superare i 20 m<sup>3</sup>, con potenze dell’ordine dei 50 MW e  $p_{me}$  fino a 17 bar. Questi motori hanno soppiantato il ciclo a vapore e le turbogas sulle grandi navi (v. Della Volpe, Cap.14).

Un’altra importante differenza tra i motori ad accensione comandata e quelli ad accensione spontanea consiste nel *metodo di regolazione*: nei motori Otto, essa è effettuata variando la quantità di aria aspirata mediante una valvola (la valvola a farfalla collegata all’acceleratore); nei motori Diesel, si varia la quantità di combustibile iniettata nelle camere di combustione (la portata di aria varia solo per effetto della variazione dei giri del motore). Per questo, ed anche per le peggiori condizioni di miscelazione col combustibile, nei motori Diesel si ha *combustione in eccesso di aria*, con minori temperature massime e ridottissima produzione di CO. Per contro, questi ultimi emettono in genere maggiori quantità di particolato.

### **Potenza erogata da un motore alternativo**

La potenza erogata da un motore alternativo composto si può ottenere moltiplicando il lavoro utile per cilindro (Eq.(7.64)) per il numero,  $z$ , di cilindri per il numero di cicli compiuti nell’unità di tempo. Quest’ultimo, per un motore a quattro tempi il cui albero compie  $n$  giri al secondo, è dato da  $n/2$ , dato che il ciclo si compie in due giri dell’albero. Si ha pertanto

$$W_{pist} = L z \frac{n}{2} = z p_{mi} (V_1 - V_2) \frac{n}{2} = \frac{n V_T}{2} p_{mi} \quad (7.76)$$

dove  $V_T$  è la cilindrata del motore. Questa espressione rappresenta la potenza ceduta al pistone, che è il primo organo mobile. Per ottenere la potenza all'albero del motore bisogna considerare le perdite dovute all'attrito meccanico e all'azionamento degli ausiliari, espresse da un rendimento  $\eta_m$ .

$$W_{alb} = \eta_m \frac{n V_T}{2} p_{mi} \quad (7.77)$$

definendo la *pressione media effettiva*,  $p_{me}$  come

$$p_{me} = \eta_m p_{mi} \quad (7.78)$$

si ottiene infine

$$W_{alb} = \frac{n V_T}{2} p_{me} \quad (7.79)$$

questa equazione indica che, a parità di pressione media effettiva, la potenza erogata è proporzionale alla cilindrata ed al numero di giri. Le grandezze devono essere espresse in unità SI. Una formula più comoda per l'uso pratico è data da

$$W_{alb}[\text{kW}] = \frac{n[\text{rpm}] V_T[\text{L}]}{300t} p_{me}[\text{bar}] \quad (7.80)$$

dove  $t$  rappresenta il numero dei tempi del motore (4 o 2).

La potenza all'asse *delle ruote* di un veicolo è ulteriormente inferiore a quella data dall'Eq.(7.80) a causa del rendimento meccanico della trasmissione. Alcuni costruttori (specie di piccoli motocicli) giocano su questo equivoco per "gonfiare" le prestazioni dei propri prodotti.

***ESEMPIO 7-14 – Pressione media effettiva di un motore automobilistico.***

Un motore automobilistico di 1600 cc a quattro tempi ha una potenza all'albero di 100 Cv, ad un regime di 5000 rpm. Determinare la pressione media effettiva.

Si ha intanto  $W_{alb} = 100 \text{ Cv} = 100 (0.735 \text{ kW}) = 73.5 \text{ kW}$ .

Dalla Eq.(7.80) si ottiene facilmente

$$p_{me} = W_{alb} \frac{300t}{n V_T} = 73.5 \frac{1200}{5000 \cdot 1.6} = 11 \text{ bar}$$



***ESEMPIO 7-15 – Determinazione approssimativa della cilindrata di un motore.***

Si vuole realizzare un elettrogeneratore della potenza di 700 kW, tramite un motore ad accensione comandata, ad un regime di rotazione di 1500 rpm. Supponendo che la pressione media effettiva valga 11 bar, determinare la cilindrata approssimativa del motore richiesto, trascurando il rendimento di conversione elettrica.

Dalla Eq.(7.80) si ottiene facilmente

$$V_T = W_{alb} \frac{300t}{n p_{me}} = 700 \frac{1200}{1500 \cdot 11} = 51 \text{ L}$$



**Bilancio termico del motore ad accensione comandata**

Conviene rivedere il bilancio energetico del motore alternativo da un punto di vista più empirico. La potenza termica ottenibile dalla completa combustione del carburante,  $W_{comb}$ , si suddivide in quattro aliquote principali

$$W_{comb} = W'_{m,u} + W_{T,raff} + W_{T,scar} + W_{perd} \quad (7.81)$$

dove  $W_{m,u}$  rappresenta la potenza meccanica utile,  $W_{T,raff}$  la potenza termica ceduta all'esterno attraverso il sistema di raffreddamento (dell'acqua e dell'olio),  $W_{T,sc}$  la potenza termica ceduta all'esterno tramite i gas di scarico e infine  $W_{perd}$  la potenza perduta per varie cause, tra cui l'azionamento degli ausiliari, le perdite per irraggiamento e per la incompleta combustione del combustibile. I valori caratteristici di tali aliquote, espresse in percentuale, sono riportate nella Tab.3.

	Otto		Diesel	
	range	tipico	range	tipico
Potenza meccanica utile	20-30	24	28-40	32
Sist di raffreddamento acqua e olio	16-33	33	15-37	32
Scarico	30-50	36	24-40	29
Perdite	4-20	7	4-12	7

**Tabella 3:** Suddivisione percentuale della potenza ottenibile dal combustibile,  $W_{comb}$ , nei motori a ciclo Otto e Diesel

In pratica, in questi motori il calore refluo si suddivide in parti grossomodo uguali tra i gas di scarico ed il sistema di raffreddamento. Questo è da prendere in considerazione nella progettazione di sistemi cogenerativi, dato che (a meno di non disporre di un doppio sistema di recupero) si recupera solo la metà della potenza che invece si otterrebbe da un ciclo Brayton di pari potenza, nel quale praticamente tutto il calore refluo è convogliato nei gas di scarico.

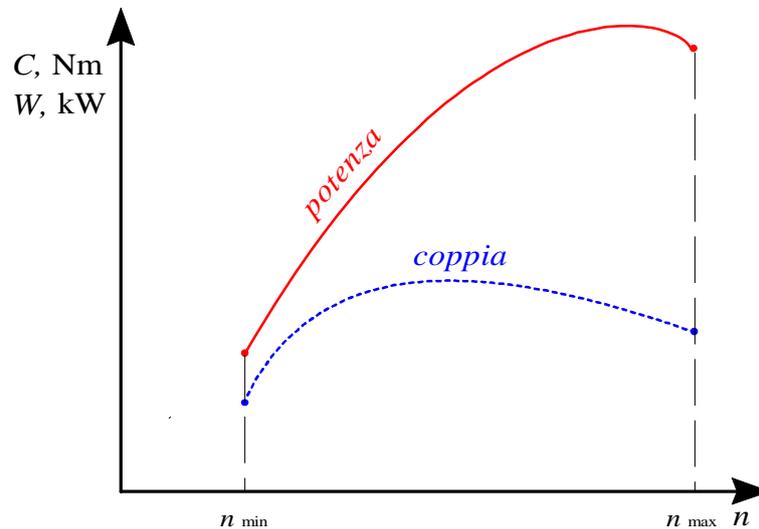
**Curve caratteristiche dei motori a combustione interna**

La potenza di un motore a c.i. varia al variare del regime di rotazione. Tuttavia, contrariamente a quanto potrebbe apparire dalla Eq.(7.80), la potenza non è direttamente proporzionale al numero di giri, dato che al variare di questo varia anche la  $p_{me}$ . L'andamento della potenza e della coppia all'albero in funzione del numero di giri è riportato nelle cosiddette *curve caratteristiche*, illustrate qualitativamente in Fig.37.

Da tali curve si nota che la potenza ha un massimo ad un numero di giri di poco inferiore a quello massimo per cui il motore è utilizzabile. La coppia all'albero invece ha un massimo per un numero di giri notevolmente inferiore: questo rappresenta il numero di giri a cui il motore deve essere utilizzato per ottenere la massima accelerazione (nel caso di trazione) o il massimo sforzo, p. es. per il sollevamento di un carico.

Si nota anche che le curve sono tracciate a partire da un *numero di giri minimo* al di sotto del quale il motore non funziona regolarmente. Nella trazione, l'intervallo di giri in cui il motore ha un funzionamento regolare non è sufficiente a coprire l'intero campo di velocità del veicolo mediante una trasmissione semplice: è necessario introdurre un *cambio di velocità* per adattare i giri del motore alle varie condizioni operative.

E' anche importante notare che questi motori (differentemente dai motori elettrici ed a vapore) hanno coppia allo spunto nulla, per cui necessitano di essere messi in moto a vuoto e connessi successivamente al carico (generalmente, questo avviene tramite un innesto meccanico a *frizione*). Inoltre come tutti i motori a combustione interna, essi non si avviano spontaneamente ma hanno bisogno di un sistema di lancio.



**Figura 37:** Curve caratteristiche di coppia e potenza per il motore alternativo.

#### *Cenno alla sovralimentazione*

Nel caso di motore alternativo a 4 tempi, la portata  $G$  di fluido in ingresso è esprimibile come

$$G = \frac{n}{2} \rho_i \lambda_v \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) V_T \quad (7.82)$$

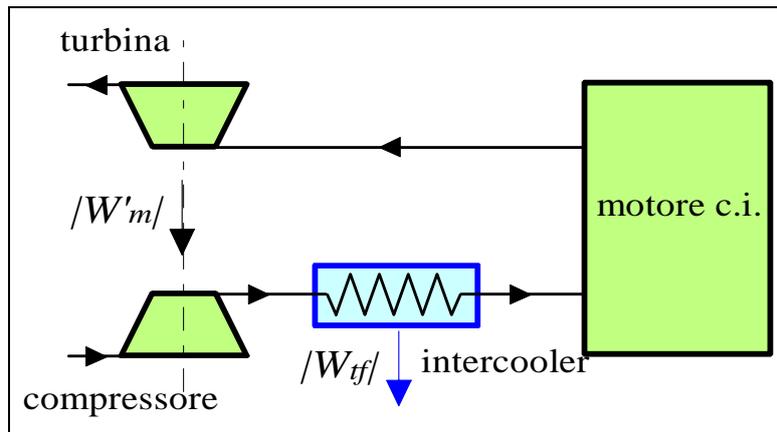
nella quale  $\alpha$  rappresenta il rapporto portata di aria/portata di combustibile,  $\rho_i$  è la densità dell'aria in ingresso e  $\lambda_v$  è il cosiddetto *coefficiente di riempimento* del motore. Si può vedere che esso rappresenta il rapporto tra l'aria effettivamente aspirata dal motore per unità di tempo e quella teoricamente aspirabile. Tale differenza è dovuta alle perdite di carico e ad altre caratteristiche del sistema di aspirazione. Nella pratica, il valore di  $\lambda_v$  non supera 0.8-0.9 per motori cosiddetti "aspirati", ovvero che aspirano aria a pressione atmosferica. La quantità  $(1+1/\alpha)$  è sempre molto prossima ad 1 ( $\alpha$  può variare indicativamente da 12 per motori a benzina fino a oltre 70 per i motori a gasolio).

E' logico pensare che, aumentando la massa di aria introdotta per ogni ciclo, si può aumentare la quantità di combustibile bruciato e quindi incrementare l'afflusso di energia termica. Si può quindi vedere che la potenza del motore, oltre ad aumentare con la cilindrata  $V_T$  e col numero di giri  $n$ , come già evidenziato, può essere incrementata anche aumentando il fattore  $\rho_i \lambda_v$ : questo è il principio della *sovralimentazione*.

Naturalmente ogni aumento di potenza a parità di cilindrata e numero di giri, incluso quello dovuto alla sovralimentazione, implica anche un aumento della  $p_{mi}$ , come si può dedurre immediatamente dalla Eq.(7.77).

Nei motori sovralimentati l'aria viene compressa prima di essere inviata all'aspirazione del motore. La compressione può avvenire in un *compressore volumetrico*, azionato meccanicamente dal motore stesso, o in un *turbocompressore* la cui turbina è azionata dai gas di scarico. Dato che durante la compressione l'aria si riscalda e la sua densità diminuisce (vanificando così parte dell'effetto voluto) talvolta essa viene refrigerata in un refrigeratore intermedio (*intercooler*) prima di essere avviata ai condotti di aspirazione del motore alternativo. Questo ultimo schema è riportato in Fig.38.

La sovralimentazione non è totalmente "gratuita" in quanto la potenza necessaria per azionare il compressore deve essere a sua volta prelevata dal motore alternativo.



**Figura 38:** Schema di motore sovralimentato mediante turbocompressore con intercooler.

## 7. Rendimento globale di un impianto motore. Consumo specifico di combustibile.

Nei precedenti paragrafi abbiamo esposto i metodi per il calcolo del rendimento termodinamico di primo principio  $\eta_{td}$  (detto in genere più semplicemente rendimento termodinamico ed indicato con  $\eta$  nei paragrafi precedenti) che è esprimibile nella forma

$$W'_{m,u} = \eta_{td} W_{TC} \quad (7.83)$$

dove, come è noto,  $W_{TC}$  è la potenza termica *ceduta al fluido* dalla sorgente calda, è  $W'_{mu}$  è la potenza meccanica utile *che il fluido cede* agli organi meccanici della macchina motrice. Il rendimento termodinamico considera quindi solo i fenomeni fisici che avvengono nel fluido motore ed è ormai ampiamente ribadito che anche in assenza di imperfezioni (irreversibilità) non può raggiungere il valore unitario.

La potenza termica  $W_{TC}$  nella maggior parte dei casi è ottenuta tramite combustione e (come è più ampiamente illustrato nel Cap.15) in tal caso è esprimibile come

$$W_{TC} = \eta_b G_c H_i \quad (7.84)$$

dove  $G_c$  è la portata di combustibile,  $H_i$  il *potere calorifico inferiore* del combustibile (ovvero l'energia ottenibile dalla combustione completa di 1 kg di combustibile, con l'acqua presente nei fumi allo stato gassoso, v. Cap.15) ed infine  $\eta_b$  rappresenta il *rendimento di combustione*, che tiene conto di diversi fattori tra cui la combustione non completa, il calore asportato dai fumi, le perdite termiche nell'organo in cui avviene la combustione. Il rendimento di combustione è minore di uno (in genere oscilla tra 0.8 e 0.95) e riduce la massima potenza teoricamente ottenibile dalla combustione, pari a  $G_c H_i$ .

Infine la potenza meccanica utile ceduta dal fluido agli organi della macchina differisce da quella raccolta all'asse motore della macchina stessa a causa degli attriti negli organi di trasmissione e di questo si tiene conto attraverso un rendimento meccanico,

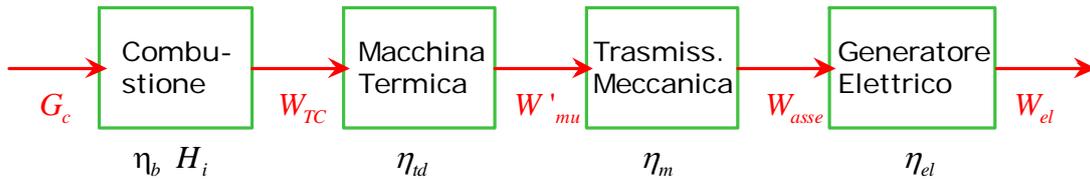
$$W_{asse} = \eta_m W'_{mu} \quad (7.85)$$

Combinando le tre espressioni precedenti, si ottiene che la potenza all'asse è data da

$$W_{asse} = \eta_b \eta_{td} \eta_m G_c H_i = \eta_g G_c H_i \quad (7.86)$$

dove  $\eta_g$  è detto *rendimento globale* dell'impianto motore.

In sostanza, il rendimento termodinamico non è l'unico fattore che riduce la potenza meccanica ottenibile dalla combustione di 1 kg di combustibile (ovvero *la potenza motrice del fuoco*, per usare l'espressione di Sadi Carnot). Sebbene esso costituisca l'aliquota più significativa, dato che raramente supera il 50%, bisogna tener conto anche delle imperfezioni della combustione e delle trasmissioni meccaniche, che pur essendo più ridotte sono anch'esse importanti.



**Figura 39:** Processo di conversione dell'energia dal combustibile ai morsetti.

Se l'energia meccanica viene convertita in energia elettrica bisogna tener conto anche di un *rendimento elettrico* che va a diminuire ulteriormente il rendimento globale.

$$W_{el} = \eta_{el} W_{asse} = \eta_m \eta_b \eta_{td} \eta_{el} G_c H_i = \eta_g \eta_{el} G_c H_i \quad (7.87)$$

l'intero processo di conversione è schematizzato in Fig.39.

Alcuni testi definiscono il rendimento globale come quello derivante dalla (7.87), ovvero

$$\eta_{ge} = \frac{W_{el}}{G_c H_i} = \eta_m \eta_b \eta_{td} \eta_{el} = \eta_g \eta_{el} \quad (7.88)$$

Per evitare confusione, chiameremo  $\eta_{ge}$  *rendimento globale elettrico*.

A questo punto è immediato calcolare il consumo di combustibile dell'impianto

$$G_c = \frac{W_{asse}}{\eta_g H_i} = \frac{W_{el}}{\eta_{ge} H_i} \quad (7.89)$$

Il rendimento globale viene detto anche "*tank-to-wheel*" (lett. dal serbatoio alla ruota) e nel caso elettrico si ferma ai morsetti del generatore, non includendo quindi i costi energetici di distribuzione dell'energia elettrica, dovuti al rendimento delle linee. Nel 2005, secondo l'Autorità per l'Energia, il fabbisogno medio pesato del parco termoelettrico italiano è stato di 2107 kcal/kWh, corrispondente a un rendimento globale medio di circa il 40,8%.

Generalmente si fa riferimento al *consumo specifico di combustibile*,  $cs$ , ovvero la portata di combustibile necessaria per produrre 1 W di potenza meccanica od elettrica

$$cs_{mecc} = \frac{G_c}{W_{asse}} = \frac{1}{\eta_g H_i} \quad \left[ \frac{\text{kg/s}}{\text{W}} = \frac{\text{kg}}{\text{J}} \right] \quad (7.90)$$

$$cs_{el} = \frac{G_c}{W_{el}} = \frac{1}{\eta_g \eta_{el} H_i} \quad \left[ \frac{\text{kg/s}}{\text{W}} = \frac{\text{kg}}{\text{J}} \right] \quad (7.91)$$

Il consumo specifico è anche interpretabile come la massa di combustibile che è necessario bruciare per produrre l'unità di energia, ed è ancora invalso l'uso di esprimerlo in unità tecniche quali g/Cvh o kg/kWh.

Negli ultimi anni, in una prospettiva globale di risparmio energetico, è invalso l'uso di considerare anche il ciclo integrato del combustibile, inclusa l'energia spesa nella sua estrazione, nel trasporto, e nella eventuale raffinazione e distribuzione dello stesso: si parla così di rendimento "*well-to-wheel*" (dal pozzo alla ruota); visti i numerosi fattori coinvolti, la sua valutazione esatta non è semplice.

**ESEMPIO 7-16 – Consumo specifico di combustibile.**

Una centrale termoelettrica eroga 1250 MW elettrici ai morsetti dell'alternatore. Il rendimento termodinamico vale 0.42, il rendimento di combustione 0.9, quello meccanico 0.95 e quello elettrico 0.97. Nelle caldaie si brucia carbone con un potere calorifico inferiore di 35 MJ/kg. Determinare il consumo specifico di combustibile ed il fabbisogno giornaliero di carbone.

Si ha

$$\eta_g = \eta_b \eta_{td} \eta_m = 0.359$$

$$c_{s_{el}} = \frac{1}{\eta_g \eta_{el} H_i} = 0.0821 \text{ kg/MJ} = 0.295 \text{ kg/kWh}$$

la portata di combustibile vale

$$G_c = c_{s_{el}} W_{el} = 0.0821 \cdot 1250 = 102.5 \text{ kg/s}$$

ed il fabbisogno giornaliero (un giorno consiste di 86400 s)

$$M = G_c t = 102.5 \cdot 86400 = 8862 \text{ t}$$

pari al contenuto di circa 120 carri ferroviari a quattro assi.



**8. Cenno alla cogenerazione ed alla multigenerazione**

Abbiamo visto come la produzione di energia elettrica o meccanica da una fonte di calore (in genere, la combustione) abbia come effetto indesiderato e inevitabile che una parte del calore prodotto non può essere convertito in energia meccanica, ma viene restituito come “rifiuto” alla sorgente fredda. D'altra parte, in altre applicazioni (in genere per il riscaldamento di edifici) “sprechiamo” calore disponibile ad alta temperatura (sempre originato da una combustione) per utilizzarlo a temperatura molto più bassa. Viene quindi spontaneo domandarsi perché non si utilizzi per questi ultimi scopi il calore refluo, a bassa temperatura, proveniente dagli impianti di generazione di energia elettrica o meccanica. Ad esempio, si potrebbe costruire un impianto a ciclo Brayton che provveda a generare l'energia elettrica necessaria agli edifici della nostra facoltà ed utilizzi il calore ceduto alla sorgente fredda per il suo riscaldamento invernale, invece di scaricarlo semplicemente nell'ambiente. In questo modo l'energia chimica inizialmente disponibile nel combustibile verrebbe sfruttata quasi integralmente e nel modo ottimale. Questa procedura prende il nome di *cogenerazione*. Su di essa torneremo più approfonditamente in un capitolo dedicato (Cap.8).

In realtà tutti noi utilizziamo da tempo una piccola forma di cogenerazione per riscaldare l'abitacolo delle nostre automobili, prelevando a questo scopo il calore refluo dall'impianto di raffreddamento del motore.

Gli impianti cogenerativi possono essere classificati sommariamente nelle categorie seguenti:

- *Impianti a ciclo non modificato*: in questi impianti, si aggiunge semplicemente uno scambiatore che recupera il calore dai prodotti della combustione, allo scarico di una turbina o di un motore alternativo, senza modificare il ciclo termodinamico dell'impianto originario. Nel caso del motore alternativo, il calore può essere recuperato anche dal sistema di raffreddamento dei cilindri. In questo caso il calore recuperato è

completamente “gratuito” dal punto di vista energetico, ma si devono sostenere dei costi per installare lo scambiatore di recupero e la rete di distribuzione dell’energia termica recuperata.

- *Impianti a ciclo modificato*: alcuni cicli, tra cui principalmente quello Rankine, hanno il pregio di restituire il calore reflu a temperature molto basse: se si vuole recuperare questo calore, è necessario modificare il ciclo innalzandone la temperatura inferiore, cioè innalzando la pressione nel condensatore o eliminandolo (si ottengono così i cosiddetti impianti a *contropressione*). Un’altra possibilità è quella di spillare una parte del vapore destinata alla turbina a pressione relativamente elevata, destinandolo semplicemente alla produzione di energia termica. Entrambe queste soluzioni penalizzano il rendimento di primo principio dell’impianto originario, per cui il calore recuperato non è completamente “gratuito”. I relativi costi vanno a sommarsi a quelli di impianto, analoghi al caso precedente.

I maggiori ostacoli che si frappongono alla diffusione su larga scala della cogenerazione sono: contemporaneità e continuità dei fabbisogni di calore e di energia elettrica/meccanica, maggiori costi d’impianto e costo della rete di distribuzione del calore.

Viene spontaneo chiedersi cosa fare del calore utilizzato per il riscaldamento civile durante l’estate o nei paesi caldi. Nel capitolo sugli impianti frigoriferi (Cap.10), vedremo brevemente come il calore può essere utilizzato nei cosiddetti *cicli ad assorbimento* anche per raffrescare gli ambienti: si parla in questo caso di *trigenerazione* (energia, calore, freddo). Un piccolo esempio di ciclo ad assorbimento sono i frigoriferi a gas montati sui camper. Ultimamente, si è giunti ad ipotizzare la costruzione di impianti di *pentagenerazione* (energia, calore, freddo, dissalazione dell’acqua marina ed idrogeno).

L’uso estensivo e razionale delle tecniche cogenerative richiede una politica di pianificazione delle scelte energetiche e degli insediamenti produttivi che, purtroppo, sembrano essere al di là delle capacità attuali del nostro paese.

## BIBLIOGRAFIA

- R. Mastrullo, P. Mazzei, R. Vanoli, *Termodinamica per Ingegneri*, Liguori, Cap.2.  
R. Della Volpe, *Macchine*, Liguori, capp.6-9 e 14.  
G. Cornetti, *Macchine a Fluido*, Edizioni il Capitello.  
G. Lozza, *Turbine a Gas e Cicli Combinati*, Esculapio, Bologna, ISBN88-86524-08-0

## ESERCIZI

### ESERCIZIO 7.1

Determinare il rendimento di un ciclo reversibile di Rankine a vapore saturo evolvente fra le temperature  $T_1 = 100\text{ }^\circ\text{C}$  e  $T_3 = 300\text{ }^\circ\text{C}$ .  
[0.29]

### ESERCIZIO 7.2

Un impianto a ciclo Brayton eroga 15 MW di potenza utile. La temperatura minima del ciclo è  $T_1 = 300\text{ K}$  e la massima  $T_3 = 1400\text{ K}$ . La pressione di ammissione al compressore è  $p_1 = 1\text{ bar}$ , e il rapporto di compressione è  $p_2/p_1=10$ . Si assuma che il fluido di lavoro sia aria (gas ideale) con  $c_p$  costante,  $R= 287\text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.400$ . Tracciare il ciclo sui diagrammi  $p,v$  e  $T,s$  e calcolare le condizioni a fine compressione ( $T_2$ ) e a fine espansione ( $T_4$ ), il rendimento del ciclo e il valore della portata massica di aria nell'impianto nelle seguenti condizioni:

- ciclo Brayton ideale senza rigenerazione;
- ciclo Brayton senza rigenerazione con rendimento isoentropico del compressore  $\varepsilon_c = 0.85$  e della turbina  $\varepsilon_t = 0.88$ ;

caso	$p_2$	$T_2$	$T_4$	$\eta$	$G$
	bar	K	K	=	kg/s
a)	10	579	725	.48	37.7
b)	10	629	806	.34	56.3

### ESERCIZIO 7.3 (adatto alla risoluzione tramite calcolatore)

Con riferimento all'esercizio precedente, mantenendo costanti tutti gli altri dati, si traccino i diagrammi del rendimento in funzione del rapporto di compressione nei due casi.

### ESERCIZIO 7.4

Si consideri un ciclo a vapore d'acqua avente le seguenti caratteristiche: temperatura all'uscita del condensatore  $T_1=35^\circ\text{C}$ , pressione all'ammissione in turbina  $p_3 = 12\text{ MPa}$ , portata di fluido  $G = 360\text{ t/h}$ . Calcolare il valore del rendimento, del titolo in uscita alla turbina ( $x_4$ ) e della potenza netta erogata dall'impianto nelle seguenti condizioni:

- ciclo a vapor saturo (il vapore entra in turbina in condizioni di saturazione,  $x_3=1$ );
- ciclo a vapore surriscaldato, con temperatura di ammissione in turbina  $T_3= 600\text{ }^\circ\text{C}$ ;
- ciclo a vapore surriscaldato con temperatura di ammissione in turbina  $T_3= 600\text{ }^\circ\text{C}$ , espansione in turbina fino al  $p_{3'} = 0.6\text{ MPa}$  e risurriscaldamento fino a  $T_{3''} = 600\text{ }^\circ\text{C}$ .

In tutti i casi, si consideri l'espansione in turbina ideale (adiabatica e reversibile).

caso	$\eta$	$x_4$	$W$
	=	=	MW
a)	.39	.64	100
b)	.44	.8	152
c)	.45	.989	169

**ESERCIZIO 7.5**

Si ripetano i calcoli dell'esercizio precedente considerando una espansione in turbina reale con rendimento isoentropico 0.88.

caso	$\eta$	$x_4$	$W$
	=	=	MW
a)	.34	.69	87
b)	.385	.88	133
c)	.40	.92	149

**ESERCIZIO 7.6**

In un impianto a vapore della potenza  $W = 2000$  kW il fluido motore evolve reversibilmente secondo un ciclo di Rankine a vapore surriscaldato tra le temperature di ammissione in turbina di  $300$  °C (a 70 bar) e quella nel condensatore di  $40$  °C. Determinare il rendimento del ciclo semplice e di quello con uno spillamento rispettivamente a 50, 30, 5, 2 bar.

Si assuma che le condizioni dell'acqua in uscita dal rigeneratore siano pari a quelle di liquido saturo.

*Suggerimento: per la soluzione, si può fare uso del programma RACY*

[0.37; 0.379; 0.388; 0.398; 0.396]

**ESERCIZIO 7.7**

In un impianto a vapore, supposto reversibile, della potenza di 5000 kW circola vapore prodotto alla pressione  $p_3 = 20$  bar ed alla temperatura  $T_3 = 300$  °C da un generatore di vapore che brucia 2000 kg/h di combustibile (potere calorifico inferiore 30000 kJ/kg).

L'acqua entra nel generatore a 40 °C. L'aumento di temperatura nella pompa è trascurabile.

Determinare il rendimento del generatore di vapore, il rendimento del ciclo, la portata di vapore e la portata massica unitaria in kg/kJ.

[0.93; 0.32; 5.47 kg/s;  $1.09 \times 10^{-3}$  kg/kJ (0.39 kg/kWh)]

**ESERCIZIO 7.8**

In un ciclo il vapore entra in turbina alla pressione di 20 bar ed alla temperatura di 400°C. La pressione nel condensatore è di 0,2 bar e il liquido esce dal condensatore in condizioni di saturazione. Assumendo che le trasformazioni che subisce il fluido all'interno della turbina e della pompa siano adiabatiche e reversibili:

- a) Determinare le condizioni in tutti i punti del ciclo
- b) Calcolare il calore ed il lavoro scambiato in ogni trasformazione e nel ciclo
- c) Calcolare il rendimento del ciclo
- d) Confrontare il rendimento del ciclo in esame con quello del Ciclo di Carnot equivalente.

[vedi soluzione completa in app.6]

**ESERCIZIO 7.9**

Si consideri un ciclo Rankine internamente reversibile a vapore surriscaldato per il quale siano state fissate la temperatura del vapore all'ingresso della turbina e la pressione di condensazione. Quale è l'effetto dell'aumento di pressione nel generatore di vapore su:

- lavoro della pompa            (a) aumenta            (b) diminuisce            (c) resta lo stesso
- lavoro turbina                (a) aumenta            (b) diminuisce            (c) resta lo stesso

- |                            |             |                |                     |
|----------------------------|-------------|----------------|---------------------|
| calore in caldaia          | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| calore condensatore        | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| rendimento del ciclo       | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
| titolo vapore uscita turb. | (a) aumenta | (b) diminuisce | (c) resta lo stesso |
- [vedi soluzione completa in app.6]

**ESERCIZIO 7.10**

Aria alla temperatura di 300 K ed alla pressione di 100 kPa entra nel compressore di un impianto a turbina a gas che opera seguendo un ciclo di Brayton. Il flusso di massa è di 5 kg/s e la temperatura massima che raggiunge l'aria è di 1200 K.

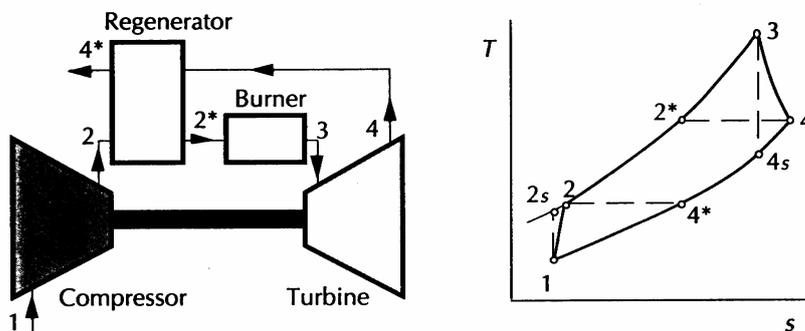
Supposto che il rapporto di compressione sia 4, determinare:

- Il rendimento dell'impianto assumendo ideali la compressione e l'espansione;
- La potenza in uscita, sempre in condizioni ideali;
- Se il compressore e la turbina non operano in condizioni ideali, quale dovrebbe essere il rendimento isoentropico di ciascun componente per non avere lavoro utile?
- Quali dovrebbero essere, per questo caso le temperature in uscita dalla turbina e dal compressore?

[vedi soluzione completa in app.6]

**ESERCIZIO 7.11**

Aria entra in un compressore di un impianto a turbina a gas con rigenerazione, mostrato nella successiva figura



alla temperatura di 300 K ed alla pressione di 100 kPa. Il rapporto di compressione è 4 e la temperatura massima nel ciclo è 1200 K. Il flusso di massa è di 8 kg/s.

I rendimenti isoentropici del compressore e della turbina sono rispettivamente 0.85 e 0.9, mentre il rigeneratore è ideale.

Determinare

- La potenza netta in uscita
- Il rendimento del ciclo

[vedi soluzione completa in app.6]

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap.8. La cogenerazione e gli impianti cogenerativi

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.02 – 02.04.07.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## 8.1. Introduzione

Nei capp. 6 e 7 abbiamo visto che, in forza del secondo principio della termodinamica, la produzione di energia elettrica o meccanica da una fonte di calore (in genere, la combustione) ha come effetto indesiderato e inevitabile che una parte del calore prodotto non può essere convertito in energia meccanica, ma viene restituito come “rifiuto” alla sorgente fredda. In alcuni casi il calore refluo viene scambiato a temperature vicine a quella ambiente (è il caso del condensatore degli impianti a vapore), mentre in altri (es. scarico dei motori a combustione interna) ci si può trovare a temperature superiori a 500 °C. In quest’ultimo caso, non utilizzando il calore, si ha un rilevante spreco di disponibilità.

D’altra parte, in altre applicazioni (in genere per il riscaldamento di edifici) “sprechiamo” calore disponibile ad alta temperatura (sempre originato da una combustione, tipicamente a temperature superiori ai 1000 °C) per utilizzarlo a temperatura molto più bassa: questa procedura, come mostrato nell’esempio 6 del Cap.6, comporta una rilevante distruzione di disponibilità.

Una rilevante quota di industrie (es. industria cartaria, chimica, alimentare, petrolifera, siderurgica ...) ha necessità di energia termica e/o vapore a temperature medio-basse (ovvero inferiori a 250°C) per i suoi processi. Il calore a bassa temperatura è inoltre necessario per il riscaldamento di edifici, e, accoppiato ad una macchina ad assorbimento (v. Cap.10) può essere utilizzato anche per il raffrescamento estivo degli stessi. Sembra quindi praticabile utilizzare per le applicazioni che necessitano di calore a temperatura medio-bassa il calore refluo proveniente dagli impianti di conversione dell’energia. Questa procedura prende il nome di *cogenerazione*. La cogenerazione, se applicata correttamente, consente di realizzare notevoli risparmi energetici: pertanto la sua applicazione è incoraggiata ed incentivata economicamente da normative italiane ed europee.

## 8.2. Bilancio termico e indici caratteristici

### *Bilancio termico di un impianto cogenerativo*

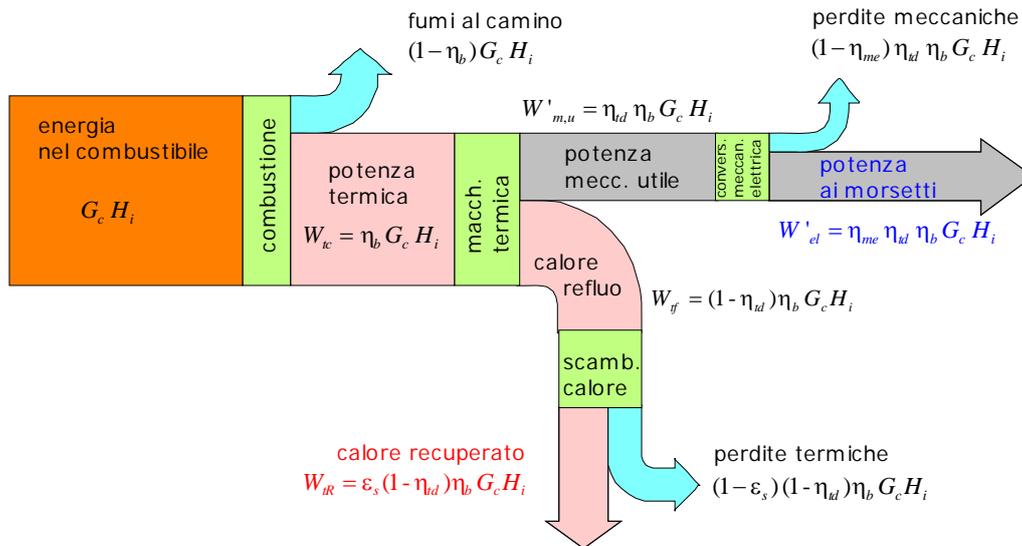
Il flusso energetico in un motore termico può essere rappresentato in un diagramma di Sankey, Fig.8.1. La potenza termica  $G_c H_i$ , teoricamente ottenibile dalla combustione con un processo di combustione esterna (impianti a vapore) o interna (turbogas, motori alternativi) subisce la perdita dovuta al rendimento di combustione, con rendimento  $\eta_b$ : a combustione avvenuta ritroviamo una quantità pari a  $(1-\eta_b)G_c H_i$ , che rappresenta le perdite per incombusti o fumi al camino, e una potenza  $W_{tc} = \eta_b G_c H_i$  in ingresso alla macchina termica. Avremo quindi un ciclo termodinamico caratterizzato da un certo rendimento reale  $\eta_{td}$ : la quantità

$$W'_{m,u} = \eta_{td} \eta_b G_c H_i \quad (8.1)$$

si trasforma in potenza meccanica ceduta dal fluido agli organi meccanici, mentre

$$W_{tf} = (1 - \eta_{td}) \eta_b G_c H_i \quad (8.2)$$

che non si è convertita, rappresenta la potenza termica allo scarico (detto anche calore refluo): quest’ultima si ritrova nei gas di scarico di una turbogas o di un motore alternativo, oppure nell’acqua di raffreddamento del condensatore di un impianto a vapore.



**Figura 8-1:** Diagramma di Sankey che illustra i flussi energetici in un impianto cogenerativo.

Come già illustrato nel Cap. 7, la potenza all’asse o ai morsetti della macchina , a causa delle perdite meccaniche ed elettriche, subirà un’ulteriore decurtazione caratterizzata da un rendimento meccanico ed elettrico  $\eta_{me} = \eta_m \eta_{el}$ , e solo la quantità

$$W'_{el} = \eta_{me} \eta_{td} \eta_b G_c H_i = \eta_{ge} G_c H_i \quad (8.3)$$

sarà disponibile all’asse. Il rapporto  $W'_{el} / G_c H_i$ , rappresenta il rendimento elettrico globale dell’impianto,  $\eta_{ge} = \eta_{me} \eta_{td} \eta_b$ , in cui è stato incluso anche il rendimento di conversione elettrica.

Torniamo adesso alla potenza termica  $W_{fr}$  che viene scaricata dall’impianto motore. Si può pensare di non convertire questa aliquota, ma di utilizzarla così com’è in un impianto termico: dunque  $W_{fr}$  rappresenta l’energia in ingresso per l’impianto termico, che altro non è che uno scambiatore di calore, caratterizzato da una propria efficienza  $\epsilon_s$  (v. Cap.13) che quindi fornirà una potenza termica recuperata pari a

$$W_{tR} = \epsilon_s (1 - \eta_{td}) \eta_b G_c H_i \quad (8.4)$$

Tale aliquota è disponibile per la cogenerazione. La rimanente aliquota, ovvero  $(1 - \epsilon_s)(1 - \eta_{td}) \eta_b G_c H_i$ , costituirà la perdita allo scarico dello scambiatore.

Tuttavia non vi è attualmente una possibilità realistica di immagazzinare la potenza termica recuperata, per cui se il fabbisogno effettivo (che può variare nel tempo)  $W_{tR,u}$  è minore della potenza recuperata la parte in eccesso andrà perduta. Si definisce allora un *fattore di utilizzo del calore*,  $f_u$ , dato dal rapporto tra il calore utile ed il calore recuperato

$$f_u = \frac{W_{tR,u}}{W_{tR}} \quad (8.5)$$

**Parametri caratteristici**

L'impianto cogenerativo produce quindi un duplice effetto utile: una potenza meccanica ed una potenza termica recuperata. Risulta pertanto spontaneo definire come principale figura di merito di tale impianto un *indice di utilizzazione*,  $I_u$ , dato come al solito dal rapporto tra l'effetto utile e la spesa sostenuta

$$I_u = \frac{W'_{el} + W_{tR,u}}{G_c H_i} \kappa \quad (8.6)$$

Per tale indice si usa talvolta anche la dizione di *rendimento cogenerativo*, non del tutto corretta in quanto al numeratore compare la somma di due diverse forme di energia.

Bisogna notare che l'indice di utilizzazione è limitato solo da aspetti tecnologici e non esiste nessun principio fisico che gli vieti di essere pari ad 1, valore non raggiungibile dal rendimento globale  $\eta_{ge}$ , v. Eq.(8.3), a causa della limitazione imposta dal secondo principio della termodinamica.

Sulla base delle Eqq. (8.3), (8.4),  $I_u$  può essere riformulato come segue

$$I_u = \eta_b \eta_{td} \eta_{me} + f_u \varepsilon_s \eta_b (1 - \eta_{td}) \quad (8.7)$$

Da questa espressione risulta evidente che una diminuzione del rendimento termodinamico  $\eta_{td}$ , pur riducendo la potenza meccanica utile, non necessariamente penalizza l'indice di utilizzazione.

Si definisce inoltre il rapporto tra la potenza meccanica (od elettrica) ottenuta e la potenza termica recuperata,  $r$ , come

$$r = \frac{W'_{el}}{W_{tR}} = \frac{\eta_{td} \eta_{me}}{\varepsilon_s (1 - \eta_{td})} \quad (8.8)$$

Tale rapporto varia a seconda della tipologia dell'impianto (in alcuni casi può variare anche da un istante all'altro del ciclo produttivo) ed è compreso di norma tra 0.1 e 10. Alcuni valori tipici sono riportati in Tab.1.

Per valutare la convenienza di installare un impianto cogenerativo si valuta il fabbisogno di potenza  $W_{conv}$  in caso di produzione per via convenzionale, dato da

$$W_{conv} = \frac{W'_{el}}{\eta_{g0}} + \frac{W_{tR,u}}{\eta_{c0}} \quad (8.9)$$

dove con  $\eta_{g0}$  si indica il rendimento globale medio con il quale produce la potenza meccanica  $W'_{mu}$  (per l'ENEL tale valore ammonta convenzionalmente a 0,38, per quanto ultimamente sia cresciuto fino a 0.4, vedi Cap.7) e  $\eta_{c0}$  il rendimento di una tipica caldaia industriale (il cui valore è all'incirca di 0,85). Si fa quindi riferimento ad un *indice di risparmio energetico* dato da

$$R\% = \frac{W_{conv} - W_{cog}}{W_{conv}} \cdot 100 \quad (8.10)$$

dove  $W_{cog} = G_c H_i$  è il fabbisogno in caso di produzione per via cogenerativa, valutato mediante le (8.6) e (8.7).

Bisogna notare che la *convenienza energetica* della cogenerazione non implica automaticamente la sua *convenienza economica*: infatti l'energia meccanica o elettrica prodotta all'esterno potrebbe avere un costo diverso da quella prodotta *in loco*. Per approfondire tali considerazioni si veda il testo di Anglesio, Cap.5. Inoltre, il ricorso alla cogenerazione preclude ovviamente la possibilità di utilizzare combustibili diversi per la produzione di energia termica e meccanica.

La normativa italiana (Legge 9/91) infine introduce un ulteriore parametro, detto *indice energetico*,  $I_{en}$ , per stabilire se un impianto cogenerativo è sufficientemente efficiente per essere soggetto ad agevolazioni fiscali.

$$I_{en} = \frac{E_{m,u}}{0.51 E_{cog}} + \frac{E_{tR,u}}{0.9 E_{cog}} - 0.49 \quad (8.11)$$

Dove  $E_{m,u}$  ed  $E_{tR,u}$  sono le energie meccanica (od elettrica) e termica utili prodotte su base annua ed  $E_{cog}$  l'energia immessa nell'impianto su base annua tramite combustibili fossili commerciali. In realtà la definizione dell'indice  $I_{en}$  non è esattamente quella della Eq.(8.11), ma vi corrisponde nella sostanza. Ad esempio, il valore soglia fissato dalle normative di legge (provvedimento CIP 6/92, non più in vigore) è  $I_{en} = 0.51$ . Questo corrisponde ad imporre che la somma dei primi due termini della (8.11) sia maggiore di uno,

$$\frac{E_{m,u}}{0.51 E_{cog}} + \frac{E_{tR,u}}{0.9 E_{cog}} \geq 1 \quad (8.12)$$

ovvero in sostanza che per essere efficienti bisogna consumare in totale meno energia di

$$E_{cog} = \frac{E_{m,u}}{0.51} + \frac{E_{tR,u}}{0.9} \quad (8.13)$$

Attualmente, all'interno della Comunità Europea, i vari stati adottano diversi criteri quantitativi per valutare l'efficienza degli impianti cogenerativi, sostanzialmente basati su formulazioni simili a quelle dell'indice energetico. Non è comunque semplice trovare un singolo indice rappresentativo di tutte le possibili situazioni.

Se la produzione ed il consumo di energia sono costanti durante l'anno, è possibile sostituire alle energie  $E$  nella Eq.(8.11) le corrispondenti potenze  $W$ ; altrimenti, le energie  $E$  devono essere valutate mediante un integrale.

### ***ESEMPIO 8-1 – Valutazione della convenienza di un impianto cogenerativo***

Un impianto industriale ha un fabbisogno costante di  $W'_{el} = 3$  MW di energia elettrica e contemporaneamente di  $W'_{tR,u} = 4$  MW di energia termica. Valutare la convenienza energetica della cogenerazione con un impianto motore di rendimento elettrico globale  $\eta_{ge} = 0.3$ , un rendimento meccanico-elettrico  $\eta_{me} = 0.9$ , ed un rendimento di combustione  $\eta_b = 0.85$ . Assumere che la produzione separata sia soggetta ai rendimenti  $\eta_{g0} = 0.38$  e  $\eta_{c0} = 0.85$ .

Essendo il fabbisogno costante, si possono utilizzare indifferentemente le potenze o le energie. Nel caso di produzione separata si ha, v. Eq.(8.9)

$$W_{conv} = \frac{W'_{el}}{\eta_{g0}} + \frac{W'_{tR,u}}{\eta_{c0}} = \frac{3}{0.38} + \frac{4}{0.85} = 7.89 + 4.71 = 12.6 \text{ MW}$$

Il fabbisogno energetico per produrre 3 MW di potenza elettrica utile con  $\eta_{ge} = 0.3$  è:

$$W_{cog} = G_c H_i = \frac{W'_{el}}{\eta_{ge}} = \frac{3}{0.3} = 10 \text{ MW}$$

Facendo cogenerazione, l'energia termica che si rende disponibile vale, Eq. (8.2)

$$W_{tf} = (1 - \eta_{td})\eta_b W_{cog} = W_{cog} \left( \eta_b - \frac{\eta_{ge}}{\eta_{me}} \right) = 10 \left( 0.85 - \frac{0.3}{0.9} \right) = 5.17 \text{ MW}$$

dove si è tenuto conto che  $\eta_{td} \eta_b = \eta_{ge} / \eta_{me}$ .

La potenza termica effettivamente recuperata, supponendo una efficienza dello scambiatore  $\varepsilon_s = 0.80$ , vale, v. Eq. (8.4)

$$W_{tR} = \varepsilon_s W_{tf} = 4.13 \text{ MW}$$

Ed è quindi superiore alla richiesta, per cui si può accettare anche un valore di  $f_u$ , Eq.(8.5) minore di 1, oppure ridurre l'efficienza dello scambiatore.

Il risparmio energetico conseguibile con la cogenerazione è dato da, Eq.(8.10)

$$R\% = \frac{W_{conv} - W_{cog}}{W_{conv}} \cdot 100 = \frac{12.6 - 10}{12.6} \cdot 100 = 20.6\%$$

Infine l'indice energetico, utilizzando le potenze al posto delle energie dato che che il fabbisogno di energia è supposto costante nel tempo, vale, Eq.(8.11)

$$I_{en} = \frac{W'_{el}}{0.51 W_{cog}} + \frac{W_{tR,u}}{0.9 W_{cog}} - 0.49 = \frac{3}{10 \cdot 0.51} + \frac{4}{10 \cdot 0.9} - 0.49 = 0.54$$

Bisogna notare che questa analisi non tiene conto della temperatura cui è necessaria l'energia termica, che influenzerà la scelta del tipo di impianto.

□

### ***Altri fattori che incidono sulla fattibilità della cogenerazione.***

La convenienza della cogenerazione non dipende solo da fattori energetici od economici quali quelli illustrati in precedenza; altri aspetti da tenere in conto sono i seguenti.

- Il *fattore di contemporaneità* nell'utilizzo dell'energia termica e meccanica: non potendo tali forme di energia essere immagazzinate, è necessario che vengano sfruttate contemporaneamente.
- La *variabilità temporale* dei fabbisogni di energia termica ed meccanica.
- La *temperatura* cui deve essere disponibile l'energia termica: alcuni impianti, es. le turbogas, rilasciano energia ad alta temperatura, mentre altri, tipicamente gli impianti a vapore, la erogano a temperature che possono non essere sufficientemente alte per alcune applicazioni.
- Il *combustibile utilizzabile*: in generale i motori a combustione interna devono fare uso di combustibili "pregiati" mentre i generatori di vapore tradizionali sono più "tolleranti" sulla qualità dello stesso.
- Il *costo di impianto*, che deve essere considerato insieme a quelli di esercizio nell'analisi economica. L'impianto si ripaga in genere in due-tre anni.

### 8.3. Principali tipologie degli impianti cogenerativi

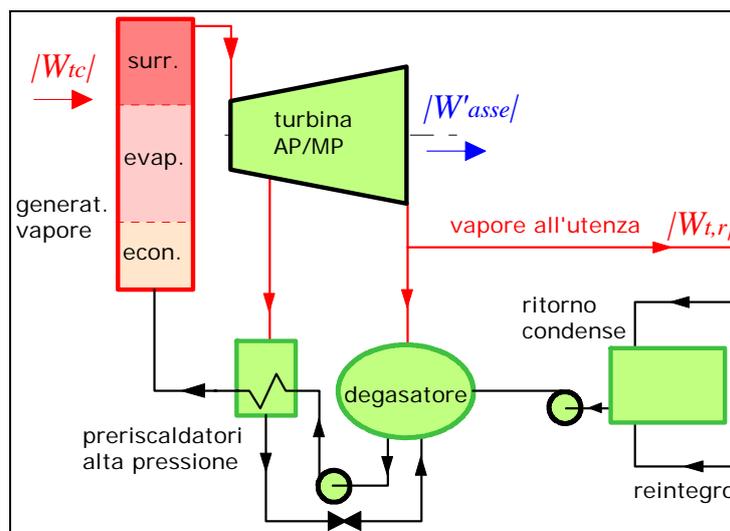
Gli impianti cogenerativi possono essere classificati sommariamente nelle categorie seguenti:

- *Impianti a ciclo non modificato*: in questi impianti, si aggiunge semplicemente uno scambiatore che recupera il calore dai prodotti della combustione, allo scarico di una turbina a gas o di un motore alternativo, senza modificare il ciclo termodinamico dell'impianto originario. Si devono sostenere dei costi per installare lo scambiatore di recupero e la rete di distribuzione dell'energia termica recuperata, ma in questo caso il calore recuperato è *quasi* completamente “gratuito” dal punto di vista energetico: il “quasi” deriva dal fatto che è necessario incrementare leggermente la pressione allo scarico per consentire ai gas di attraversare i componenti successivi.
- *Impianti a ciclo modificato*: alcuni cicli, tra cui principalmente quello Rankine, hanno il pregio di restituire il calore refluo al condensatore a temperature molto basse: se si vuole recuperare questo calore, è necessario modificare il ciclo innalzandone la temperatura inferiore, cioè innalzando la pressione nel condensatore o eliminandolo. Un'altra possibilità è quella di spillare una parte del vapore destinata alla turbina a pressione relativamente elevata, destinandolo semplicemente alla produzione di energia termica. Entrambe queste soluzioni penalizzano il rendimento di primo principio dell'impianto originario, e i relativi costi vanno a sommarsi a quelli di impianto, analoghi al caso precedente.

#### Impianti cogenerativi con turbina a vapore

##### A controcompressione

In questi impianti a vapore (v. Fig.8-2) si elimina il condensatore e gli stadi di bassa pressione della turbina: il vapore viene estratto dalla turbina ed una pressione che generalmente varia tra 2 e 10 bar (Tale turbina viene detta *a controcompressione*, in contrapposizione alla turbina *a condensazione* che è quella seguita da un condensatore) ed inviato al processo. L'impianto può essere a ciclo aperto: in questo caso, è necessario trattare chimicamente una grande quantità di acqua. Questo tipo di impianti viene detto *ad un grado di libertà*, in quanto la potenza meccanica e quella termica generata stanno tra loro in proporzioni fisse: riducendo la portata di vapore, si riducono entrambe.

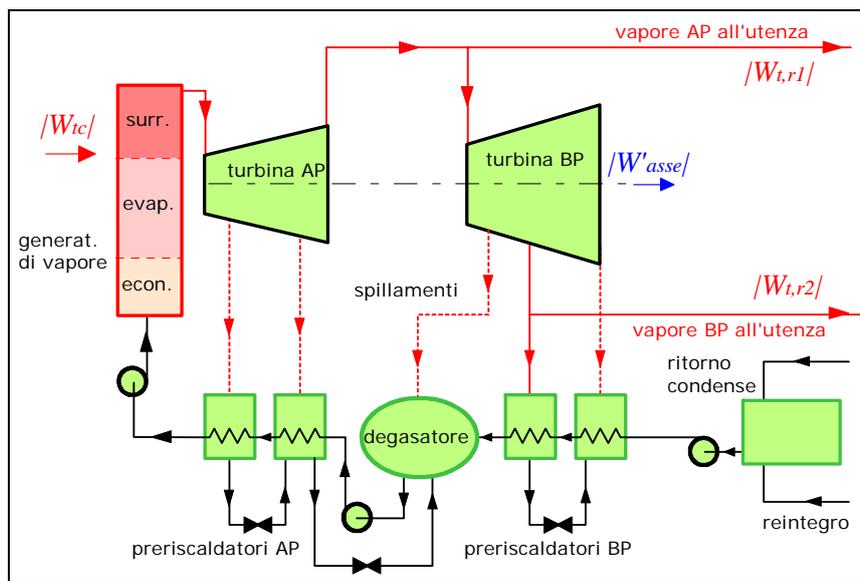


**Figura 8-2:** Impianto cogenerativo con turbina a vapore a controcompressione.

Inoltre, in caso di mancanza del carico termico, l'impianto non può funzionare a causa della mancanza del condensatore, oppure bisogna scaricare il vapore surriscaldato in atmosfera se il ciclo è aperto. Questi impianti sono adatti per valori medio-bassi del rapporto  $r$ , definito nell'eq. (8.8), il cui valore tipico è intorno a 0.2, e per utenze poco variabili nel tempo.

*A controcompressione e derivazione*

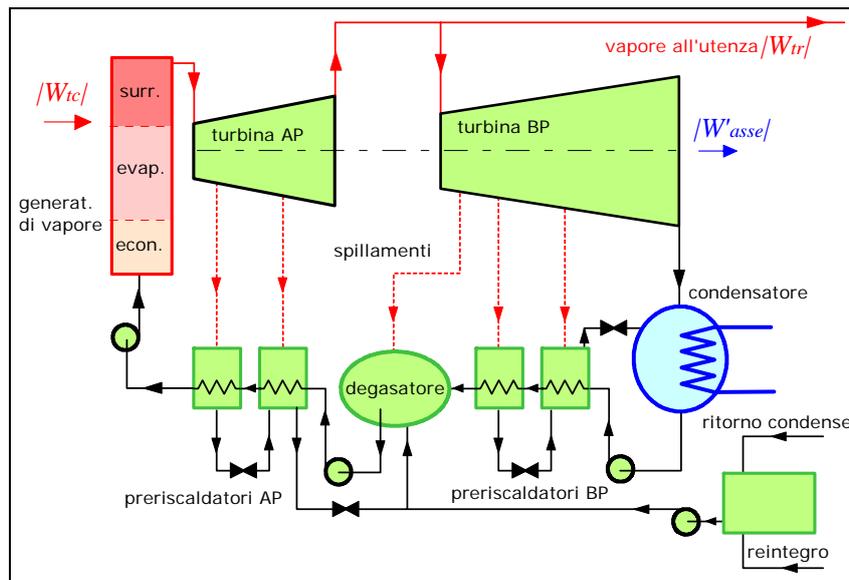
Nei casi in cui si richiede la variazione del rapporto tra quantità di energia elettrica prodotta e quantità di calore utilizzato (grandezze che, come visto in precedenza, sono rigidamente collegate in un impianto a controcompressione) può rivelarsi vantaggioso l'impiego dei cosiddetti impianti a derivazione (una o più) e controcompressione, nei quali esiste la possibilità di variare tale rapporto utilizzando una o più derivazioni regolate di vapore, v. Fig8-3.



**Figura 8-3:** Impianto cogenerativo con turbina a vapore a controcompressione e derivazione.

*A condensazione e derivazione*

Tali tipi di impianti, v. Fig8-4, caratterizzati dalla presenza di un condensatore allo scarico della turbina, si dimostrano convenienti allorché la quantità di energia meccanica da produrre è elevata rispetto a quella termica (alti valori di  $r$ , maggiori di 0.6). Inoltre è possibile far funzionare l'impianto anche in assenza di domanda di energia termica. Per contro, i valori di  $I_u$  sono modesti a causa della grande quantità di calore che si scarica nel condensatore. Vi è anche la possibilità di aumentare la temperatura al condensatore fino a 80-100 °C (riducendo così pesantemente il rendimento termodinamico) per utilizzarne il calore refluo ad es. per teleriscaldamento di ambienti civili o serre per agricoltura.

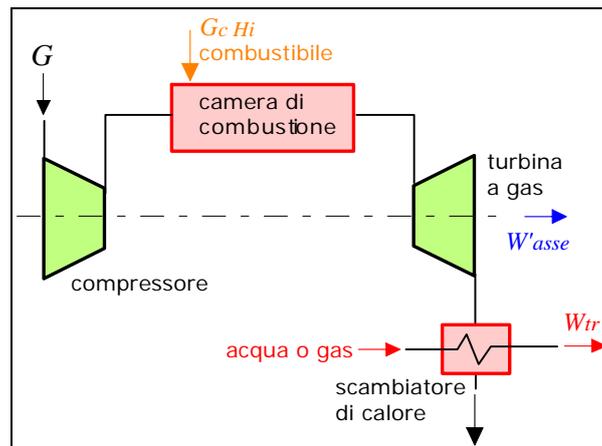


**Figura 8-4:** Impianto cogenerativo con turbina a vapore a condensazione e derivazione. E' possibile prelevare vapore per l'utenza anche da altri spillamenti.

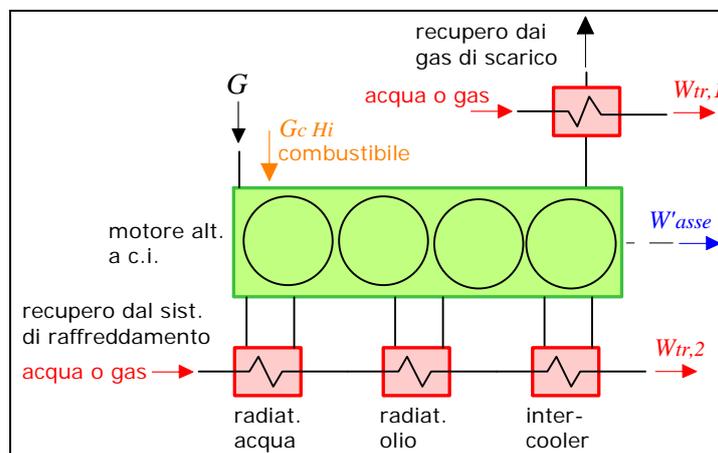
#### **Impianti cogenerativi con turbina a gas (TG)**

La *TG* è una delle macchine più versatili per effettuare la cogenerazione: essa rende disponibile allo scarico elevate portate di gas a temperatura  $\cong 500-700\text{ }^{\circ}\text{C}$  e fornisce potenze fino a 200 MW. Il recupero di calore può essere effettuato o utilizzando direttamente i gas di scarico come fluido caldo (quando possibile, ad es. nei cementifici), oppure inviando questi in uno scambiatore o in generatore di vapore a recupero (*GVR*) per produrre aria calda o vapore, secondo uno schema del tipo illustrato in Fig.8-5. La presenza di un componente a valle diminuisce leggermente la potenza erogata dalla *TG*, visto che la pressione in uscita dalla turbina non è più pari alla pressione atmosferica ma un po' più elevata (una controcompressione allo scarico di 0.01 bar implica riduzione di potenza di circa l'1%).

Valore tipico di  $r$  (eq.(8.8)) per una *TG* è di circa 0.5, tuttavia è possibile di avere un  $r$  variabile. In caso di elevata richiesta di potenza termica ( $r > 0.5$ ) si può effettuare una post-combustione sfruttando l'elevato tenore di ossigeno residuo nei gas di scarico, che permette di aumentare  $r$  fino a 4. Gli impianti con *TG* sono in genere economici da installare, in quanto non richiedono costose opere civili, e molto standardizzati.



**Figura 8-5:** Impianto cogenerativo con turbina a gas. E' possibile effettuare anche una post-combustione per incrementare  $W_{tr}$ .



**Figura 8-6:** Impianto cogenerativo con motore alternativo a c.i. E' possibile effettuare il recupero anche dai soli gas di scarico o (meno frequentemente) dal solo sistema di raffreddamento.

### **Impianti cogenerativi con motori alternativi**

I motori alternativi utilizzati per la cogenerazione sono in genere diesel sovralimentati, visto l'ordine delle potenze in gioco (fino a 10 MW) che lavorano con rapporti aria combustibile molto elevati; l'eccesso d'aria provoca una diminuzione della temperatura dei gas allo scarico. Il recupero di calore avviene sia a spese dei gas di scarico, che consente di produrre vapore saturo (fino a 15 bar), sia a spese dell'acqua di raffreddamento ( $T \cong 80^{\circ}\text{C}$ ), utilizzata per il riscaldamento di edifici o simili. Alternativamente, un modo più economico, si può recuperare calore da una sola di queste fonti. Spesso si utilizza la cogenerazione negli impianti di propulsione navale, in cui c'è necessità di energia meccanica ed elettrica (per la propulsione e per i sistemi di bordo), vapore per i servizi di bordo (ottenuto dai gas di scarico), e calore (recuperato dall'acqua di raffreddamento) utilizzato negli impianti di dissalazione dell'acqua di mare. Uno schema di impianto può essere del tipo di Fig.8-6.

**Impianti cogenerativi con cicli combinati**

Per questi impianti, la cogenerazione si effettua nell'impianto a vapore utilizzando le tre tecniche descritte in precedenza, con preferenza per la derivazione e condensazione. Sono impianti ad elevata potenza meccanica e rapporto  $r$  decisamente elevato (fino a 10).

**Confronto tra le varie tipologie**

In Tab.1 sono riassunte le caratteristiche delle principali tipologie d'impianto. Come regola generale, gli impianti a turbina sono adatti per potenze meccaniche medio-alte, hanno un costo elevato ed una buona affidabilità. I motori alternativi sono adatti per potenze basse, hanno un costo d'impianto minore ed una flessibilità di esercizio maggiore. Per le turbogas e i motori a combustione interna il ciclo termodinamico non è modificato, mentre invece lo è per gli impianti a vapore.

Impianto	$r = W'_{el} / W'_{IR}$	$W'_{m,u}$ [MW]	Osservazioni
TG con recupero allo scarico	0.2-1	2-200	Ciclo non modificato Due gradi di libertà Calore a temperatura elevata Possibilità di postcombustione Necessario combustibile di buona qualità
TV a contro-pressione	0.1-0.5	1-80	Ciclo modificato Elevati valori di $I_u$ Può utilizzare combustibili non pregiati Avviamento lento Valore di $r$ fisso nell'esercizio (un grado di libertà) NON utilizzabile solo per prod. energia meccanica.
TV a derivazione e contropressione	1	1-80	Come sopra ma Valore di $r$ flessibile nell'esercizio (due gradi di lib.)
TV a derivazione e condensazione	0.3-2	3-200	Come sopra ma Utilizzabile solo per prod. energia meccanica.
Motore alternativo c.i., recupero totale	0.5-1	0.1-10	Ciclo non modificato Due gradi di libertà Basse potenze Parte del calore a bassa temperatura Necessari due impianti di recupero.
Motore alternativo c.i., recupero gas di scarico	1-2	0-10	Come sopra Basso costo
Ciclo combinato	1-10	10-200	Ciclo modificato Due gradi di libertà Impianto complesso e costoso Ideale per alte potenze

**Tabella 1:** Principali caratteristiche degli impianti cogenerativi (valori indicativi).

**Bibliografia**

- R. Della Volpe, Macchine, Liguori, Cap.9
- P. Anglesio, Elementi di Impianti Termotecnici, Pitagora, Cap.5.

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica*

## Cap.10. I cicli termici delle macchine operatrici

***Paolo Di Marco***

*Versione 2006.01– 22.03.07.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## Introduzione

Nel presente capitolo viene affrontato lo studio delle macchine termiche operatrici, ovvero quelle che trasferiscono calore da una sorgente più fredda ad una più calda assorbendo lavoro meccanico dall'esterno. Come visto nel Cap.6, tali macchine vengono convenzionalmente distinte in pompe di calore (quando l'ambiente è la sorgente fredda) e macchine frigorifere (quando l'ambiente è la sorgente calda). I cicli termici su cui funzionano questi due tipi di macchine sono comunque gli stessi, tanto è vero che alcune di tali macchine sono invertibili, ovvero possono funzionare sia da frigoriferi che, con piccole modifiche dei circuiti, da pompe di calore. E' questo il caso dei condizionatori d'aria che d'inverno funzionano da impianti di riscaldamento. Nel presente capitolo verranno studiate le caratteristiche del più semplice tra i cicli frigoriferi utilizzati nella pratica, che viene applicato correntemente ai frigoriferi ed ai condizionatori domestici e di potenza limitata. Gli impianti industriali di refrigerazione, di grande potenza, utilizzano versioni modificate di tale ciclo che qui vengono solo accennate. Con queste macchine, si possono raggiungere anche  $-150\text{ }^{\circ}\text{C}$  con potenze frigorifere ( $W_{TF}$ ) dell'ordine di 10 MW

Faremo quindi un cenno al ciclo ad assorbimento, caratterizzato dal fatto di non utilizzare quantità significative di potenza meccanica: tale ciclo è applicato ad es. nei piccoli frigoriferi da campeggio, ma anche nei grandi impianti che utilizzano calore a bassa temperatura recuperato da impianti cogenerativi.

## Il ciclo frigorifero

Nel seguito, faremo riferimento al caso in cui si deve mantenere stabilmente uno spazio confinato (una cella frigorifera) a temperatura  $T^*$  inferiore a quella dell'ambiente circostante,  $T_a$ . Per effetto di tale differenza di temperatura, una certa potenza termica (determinata dalla differenza di temperatura stessa, dalla superficie della parete e dai materiali di cui è costituita, secondo le leggi della trasmissione del calore esposte nel Cap.12) fluisce *spontaneamente* dall'esterno nella cella. La stessa potenza termica deve essere quindi asportata dalla cella e "pompatà" verso l'esterno, ad una temperatura più alta, in un processo che per il secondo principio della termodinamica (enunciato di Clausius) non può essere spontaneo e deve essere realizzato tramite una macchina termica operatrice.

### *Ciclo semplice inverso.*

Il ciclo semplice inverso (ciclo di Carnot), come illustrato nel Cap.6, è costituito nel piano  $T-s$  da un rettangolo che viene percorso in senso antiorario. Esso potrebbe essere realizzato in pratica nella forma illustrata nella Fig.1, dove si sfrutta il fatto che all'interno della campana di saturazione le isoterme sono anche isobare e quindi facili da realizzare in pratica.

Dato che il fluido deve asportare calore dalla sorgente fredda, la sua temperatura inferiore  $T_F$  deve essere leggermente inferiore a quella della sorgente fredda stessa,  $T^*$ . Per lo stesso motivo, dovendo il fluido cedere calore alla sorgente calda, la sua temperatura superiore  $T_C$  deve essere leggermente superiore a quella della sorgente calda stessa, ovvero quella ambiente,  $T_a$ .

L'entità delle differenze di temperatura suddette dipende dalle modalità (superficie di scambio e conduttanza globale di parete) con cui sono realizzati i relativi scambiatori di calore.

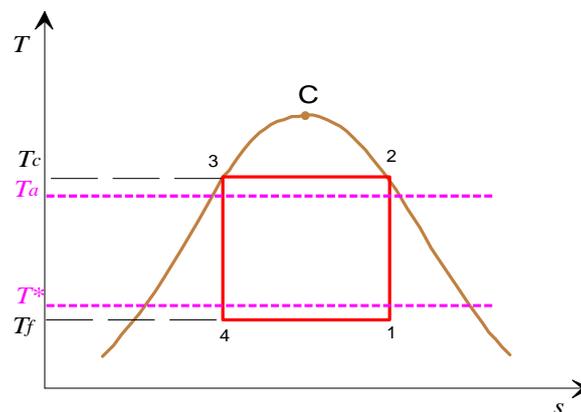
Per tale ciclo ideale, il  $COP$  (v. Cap.6) è dato da:

$$COP_{f,rev} = \frac{|W_{ff}|}{|W'_{mu}|} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad (10.1)$$

dove, nel caso ideale (scambiatore di calore di superficie infinita), si può assumere  $T_F = T^*$  e  $T_C = T_A$ .

Tale ciclo presenta tuttavia gli inconvenienti esposti in seguito, che ne rendono impossibile la effettiva realizzazione.

- La trasformazione di compressione 1-2 deve essere realizzata su un vapore saturo, in presenza di goccioline di liquido, il che provocherebbe notevoli problemi fluidodinamici all'interno del compressore, con conseguenti problemi di usura e danneggiamento meccanico del compressore stesso ed elevate irreversibilità. Il rendimento isoentropico di tale macchina sarebbe comunque molto basso.
- Durante l'espansione 3-4, il lavoro recuperato dalla turbina sarebbe comunque trascurabile rispetto a quello assorbito dal compressore; questo perché il lavoro in tali trasformazioni è proporzionale a  $vdp$ , ed il fluido che si espande ha un volume specifico decisamente inferiore a quello del fluido che viene compresso. A questo si aggiungono i problemi tecnologici connessi all'espansione di una miscela bifasica, analoghi a quelli illustrati al punto precedente.

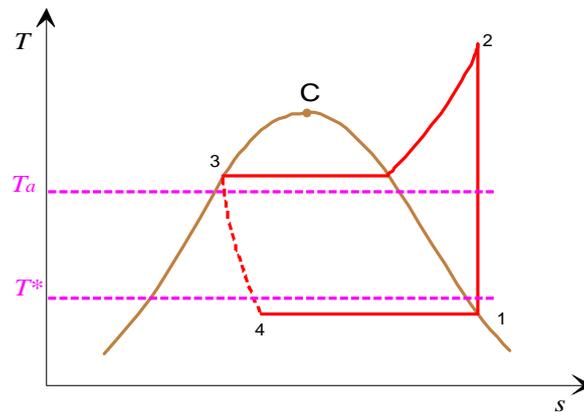


**Figura 1:** Ciclo semplice inverso nel piano  $T$ - $s$ .

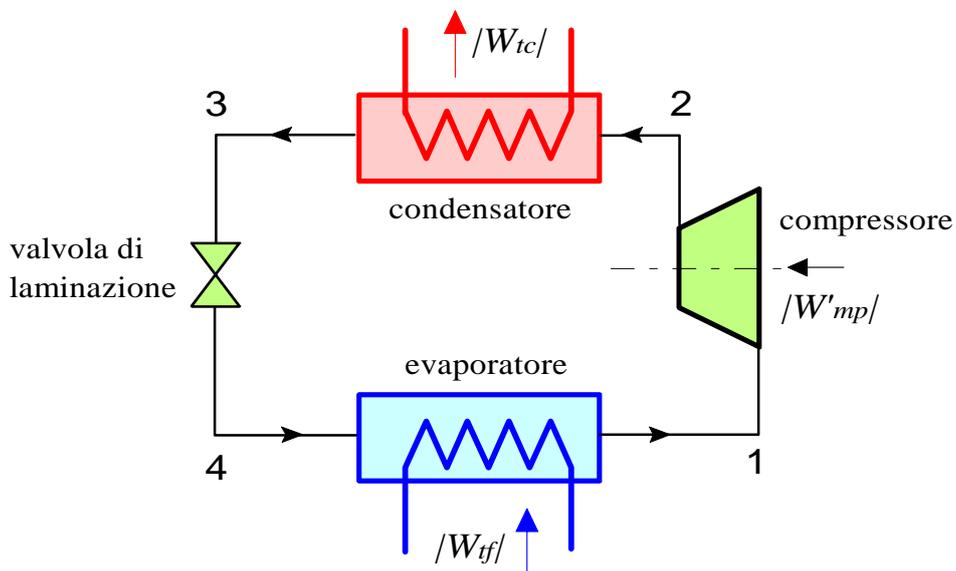
### **Ciclo frigorifero**

Per ovviare ai problemi tecnologici illustrati nei punti a) e b) alla fine della precedente sezione, il ciclo viene modificato come segue (vedi Fig.2).

- Si opera la compressione su fluido monofasico, ovvero vapore surriscaldato. A tal fine, il cambiamento di fase nell'evaporatore viene spinto fino ad avere all'uscita vapore saturo secco, che viene successivamente compresso nel compressore. Questo, come illustrato in Fig.2, comporta che il fluido esca dal compressore stesso ad una temperatura ( $T_2$ ) più elevata di quella di condensazione,  $T_3$ . Questo comporta anche un aumento delle dimensioni del condensatore, dato che il vapore surriscaldato ha un coefficiente di scambio che è indicativamente un ordine di grandezza inferiore a quello del vapore saturo.



**Figura 2:**Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore nel piano  $T$ - $s$ .



**Figura 3:**Componenti del ciclo frigorifero standard.

b) Si rinuncia a recuperare lavoro dall'espansione e si sostituisce la turbina con un organo di laminazione: tale organo è compatto ed economico e realizza la caduta di pressione necessaria per riportare il fluido alla pressione inferiore del ciclo.

Tale ciclo prende il nome di *ciclo Joule secco* o *ciclo frigorifero standard*, ed è caratterizzato dalla presenza di una irreversibilità interna intrinseca, dovuta alla valvola di laminazione.

I componenti principali dell'impianto frigorifero sono illustrati in Fig.3. Come di consueto, l'impianto è costituito da quattro organi, schematizzabili individualmente come sistemi aperti a regime, che nel loro complesso costituiscono un sistema chiuso. Il ciclo lavora fra due pressioni, quella superiore (dei punti 2 e 3) e quella inferiore, dei punti 4 e 1. Le trasformazioni sono rappresentate nel diagramma  $T$ - $s$  in Fig.2.

Il ciclo può anche essere rappresentato sul diagramma  $p$ - $h$ , con il vantaggio che tre trasformazioni diventano segmenti di retta, Fig.4. Il fluido in 1, allo stato di vapore saturo secco ( $x_1 = 1$ ), viene compresso isoentropicamente fino alla pressione superiore del ciclo (punto 2); entra quindi nel condensatore, dove condensando cede calore all'ambiente esterno,

e ne esce allo stato di liquido saturo (punto 3,  $x_3 = 0$ ). Si espande quindi (3-4) nell'organo di laminazione: dato che tale organo è considerato adiabatico e non si raccoglie lavoro utile, tale espansione è *isoentropica* (v. Cap.4). Il fluido quindi evapora nell'evaporatore (4-1) sottraendo calore alla sorgente fredda e ritornando alle condizioni iniziali 1.

Il bilancio energetico applicato a ciascuno dei quattro organi dell'impianto (sistemi aperti a regime), risulta in

$$\text{compressore (1-2)} \quad W'_{mp} = -G(h_2 - h_1) \quad (10.2)$$

$$\text{condensatore (2-3)} \quad W_{ic} = G(h_3 - h_2) \quad (10.3)$$

$$\text{valvola di laminazione (3-4)} \quad h_3 = h_4 \quad (10.4)$$

$$\text{evaporatore (4-1)} \quad W_{if} = G(h_1 - h_4) \quad (10.5)$$

Mentre applicando il bilancio energetico applicato all'intero impianto (sistema chiuso a regime) si ha come risultato

$$|W_{ic}| = |W_{if}| + |W'_{mp}| \quad (10.6)$$

ovvero, dividendo per la portata  $G$  e riportandolo all'unità di massa

$$|q_{23}| = |q_{41}| + |l'_{12}| \quad (10.7)$$

Il coefficiente di prestazione è dato da

$$COP_f = \frac{W_{if}}{|W'_{mp}|} = \frac{q_{41}}{|l'_{12}|} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_2 - h_1)} \quad (10.8)$$

esso si presta ad una semplice interpretazione geometrica sul diagramma  $p-h$  di Fig.4, essendo dato dal rapporto della lunghezza dei segmenti AB e BC. Il  $COP_f$  è inversamente proporzionale al costo di esercizio della macchina.

Per confrontare le prestazioni con quelle della macchina ideale, si confrontano i relativi  $COP$

$$\Psi = \frac{COP_f}{COP_{f,rev}} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_2 - h_1)} \frac{T_3 - T_1}{T_1} \quad (10.9)$$

La  $PMU$  è data da

$$PMU = \frac{G}{W_{if}} = \frac{1}{h_1 - h_4} \quad (10.10)$$

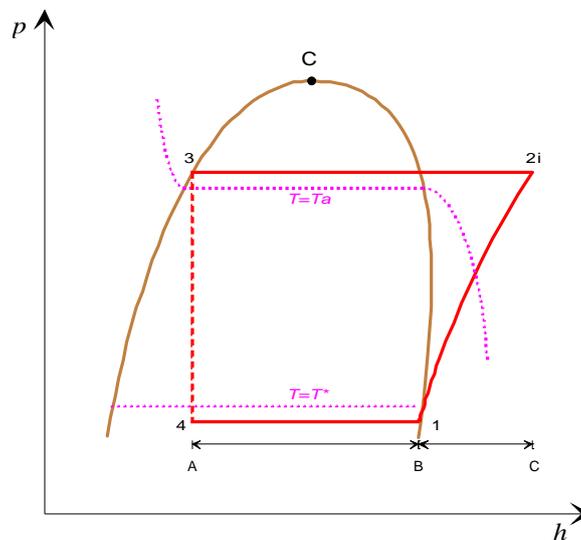
ed è direttamente proporzionale al costo di impianto. Dato che spesso il compressore è una macchina volumetrica, ha interesse considerare anche la portata volumica unitaria,  $PVU$

$$PVU = \frac{G_{V1}}{W_{if}} = \frac{G}{\rho_1 W_{if}} = \frac{v_1}{h_1 - h_4} \quad (10.11)$$

che rappresenta la portata in volume *all'ingresso del compressore* necessaria per asportare 1 W dalla sorgente fredda e si misura in m<sup>3</sup>/J. Sulla base di questo valore viene determinata la cilindrata del compressore.

Si ricordi che, al contrario della portata in massa, la portata in volume varia da punto a punto dell'impianto.

Per ridurre la PVU è dunque necessario disporre di un fluido caratterizzato da elevata entalpia di vaporizzazione e da piccolo volume specifico (ovvero elevata densità) nelle condizioni di aspirazione.



**Figura 4:** Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore nel piano  $p-h$ .

### ***Effetto delle irreversibilità***

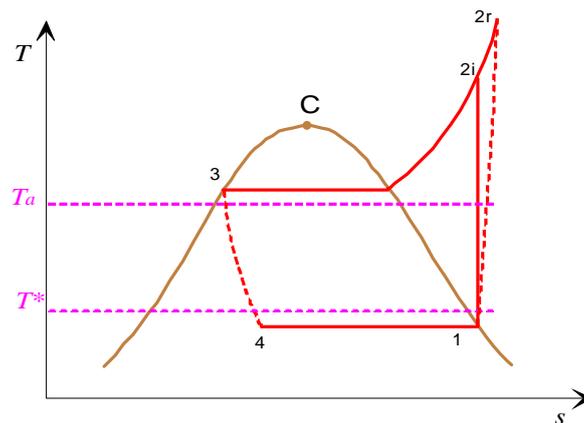
Nel ciclo reale, oltre alle irreversibilità presenti nell'organo di laminazione, saranno presenti effetti dissipativi anche negli altri componenti del ciclo. Le irreversibilità negli scambiatori di calore si traducono in cadute di pressione tra ingresso ed uscita ed hanno un impatto generalmente trascurabile sulle prestazioni. Le irreversibilità nel compressore, come è noto (v. Cap.4), fanno aumentare la potenza assorbita dallo stesso in ragione inversa al valore del rendimento isoentropico:

$$W'_{mp} = -G(h_{2r} - h_1) = -G \frac{(h_{2i} - h_1)}{\eta_c} \quad (10.12)$$

e conseguentemente il coefficiente di prestazione si modifica in

$$COP_f = \frac{W_{tf}}{|W'_{mp, reale}|} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2r} - h_1)} = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2i} - h_1)} \eta_c \quad (10.13)$$

vale a dire, si riduce in ragione proporzionale al rendimento isoentropico del compressore stesso. Inoltre il fluido esce dal compressore a temperatura maggiore, vedi Fig.5. I valori della PMU e della PVU non vengono invece alterati.



**Figura 5:** Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore nel piano  $T$ - $s$  con compressione reale (rendimento isoentropico del compressore minore di 1).

**ESEMPIO 9-1 – Ciclo frigorifero standard a compressione di vapore.**

Un ciclo frigorifero standard che opera con fluido R134a deve asportare la potenza di 5 kW da un serbatoio a  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; l'ambiente si trova a  $20^{\circ}$  e si assume un  $\Delta T = 15\text{ K}$  per entrambi gli scambiatori. Valutare il  $COP$ , la potenza meccanica assorbita, la  $PMU$ , la  $PVU$  e la portata massica di fluido necessaria nei due casi seguenti: a) compressione isoentropica; b) rendimento isoentropico di compressione pari a 0.75.

Per effetto dei salti di temperatura negli scambiatori si ha  $T_1 = T_4 = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $T_3 = 35\text{ }^{\circ}\text{C}$

Le proprietà del fluido nei punti chiave del ciclo sono riportate nella seguente tabella

	Temp.	Pressione	Volume spec.	Entalpia	Entropia	Titolo
	C	MPa	$\text{m}^3/\text{kg}$	$\text{kJ}/\text{kg}$	$\text{kJ}/\text{kg}/\text{K}$	
1.	-20	0.1327	0.1474	386.6	1.741	1
2i.	43.2	0.887	0.02428	426	1.741	
2r.	55.8	0.887	0.02603	439.1	1.782	
3.	35	0.887	0.0008565	249	1.167	0
4.	-20	0.1327	0.05266	249	1.198	0.354

Notare che i punti 1 e 3 sono completamente determinati dal punto di vista termodinamico, dato che per essi si conoscono due proprietà di stato indipendenti; il punto 2i è determinato dalla pressione, che è uguale a quella del punto 3, e dal valore dell'entropia, che è uguale a quella del punto 1, determinate in precedenza. Il punto 2r è determinato dalla pressione e dall'entalpia, quest'ultima ottenibile dal valore del rendimento isoentropico.

$$h_{2r} = h_1 + \frac{(h_{2i} - h_1)}{\eta_c}$$

Infine il punto 4 è determinato dalla pressione (uguale a quella del punto 1) e dall'entalpia, che è uguale a quella del punto 3.

Nel caso a), la portata è data da

$$G = \frac{|W_f|}{h_1 - h_4} = \frac{5}{386.6 - 249} = 0.036\text{ kg/s}$$

la portata in volume all'ingresso del compressore è data da

$$G_{v1} = G v_1 = 0.036 \cdot 0.1474 = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$$

la  $PMU$  e la  $PVU$  sono date da

$$PMU = \frac{1}{h_1 - h_4} = \frac{1}{386.6 - 249} = 0.0073 \text{ kg/kJ}$$

$$PVU = \frac{v_1}{h_1 - h_4} = 0.0073 \cdot 0.1474 = 0.0011 \text{ m}^3/\text{kJ}$$

ed il  $COP$  vale

$$COP_f = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2i} - h_1)} = \frac{137.6}{39.4} = 3.49$$

la potenza meccanica assorbita è data da

$$|W'_{mp}| = \frac{W_{tf}}{COP_f} = \frac{5}{3.49} = 1.43 \text{ kW}$$

nel caso b) la portata, la  $PMU$  e la  $PVU$  rimangono inalterate mentre il  $COP$  diviene

$$COP_f = \frac{(h_1 - h_4)}{(h_{2i} - h_1)} \eta_c = 3.49 \cdot 0.75 = 2.62$$

e la potenza meccanica assorbita

$$|W'_{mp}| = \frac{W_{tf}}{COP_f} = 1.91 \text{ kW}$$

□

### **Pompe di calore**

Le pompe di calore funzionano sullo stesso ciclo esposto in precedenza. Le uniche differenze consistono nel fatto che in questo caso la temperatura ambiente è la temperatura inferiore del ciclo e l'effetto utile è dato dalla cessione di calore alla sorgente calda. Pertanto, con riferimento alla Fig.4, il coefficiente di prestazione è dato da

$$COP_p = \frac{|W_{tc}|}{|W'_{mp}|} = \frac{q_{23}}{l'_{12}} = \frac{(h_2 - h_3)}{(h_2 - h_1)} \quad (10.14)$$

e va confrontato con il valore ideale dato da (v. Cap.6)

$$COP_{p,rev} = \frac{|W_{tc}|}{|W'_{mu}|} = \frac{T_C}{T_C - T_F} \quad (10.15)$$

I valori di  $PMU$  e  $PVU$  sono dati rispettivamente da

$$PMU = \frac{G}{W_{tc}} = \frac{1}{h_2 - h_3} \quad (10.16)$$

$$PVU = \frac{G_{v1}}{W_{tc}} = \frac{v_1}{h_2 - h_3} \quad (10.17)$$

## Fluidi frigorigeni

Come in parte già accennato, un fluido frigorigeno deve possedere le seguenti caratteristiche:

- temperatura tripla inferiore alla temperatura della sorgente fredda;
- temperatura critica superiore alla temperatura della sorgente calda;
- basso valore di PVU nelle condizioni di impiego;
- elevato valore del COP nelle condizioni di impiego;
- bassa tossicità e infiammabilità;
- compatibilità chimica con i materiali ed i lubrificanti della macchina;
- bassa pericolosità per l'ambiente;
- pressioni di esercizio non troppo elevate né troppo basse;
- buone proprietà di scambio termico.

L'acqua viene generalmente esclusa perché ha una temperatura tripla troppo elevata e una pressione troppo bassa alle temperature di esercizio, che potrebbe provocare infiltrazioni dall'esterno. In passato, si è fatto ampio ricorso all'ammoniaca ( $\text{NH}_3$ ), ancora usata in qualche grande impianto industriale. Nei piccoli impianti, essa è stata abbandonata per la sua aggressività chimica, l'infiammabilità ed il potere irritante anche nel caso di piccole perdite. Anche i clorofluorocarburi e gli idroclorofluorocarburi (detti anche rispettivamente CFC e HCFC o Freon, marchio registrato della DuPont) hanno avuto largo impiego in passato e vengono oggi abbandonati per il loro elevato ODP (*ozone depletion potential*, potere distruttivo dello strato di ozono) dovuto alla presenza di cloro. Tra essi, sono stati particolarmente utilizzati l'R-12 e l'R-22. Questi fluidi vengono rimpiazzati dagli idrofluorocarburi (HFC), quali l'R-134a, attualmente utilizzato largamente nei frigoriferi domestici. Un altro fluido utilizzato correntemente nei frigoriferi domestici è l'isobutano (R-600a). In futuro, si prevede di passare anche ad altri idrocarburi, quali il propano (R-290) ed il pentano ( $\text{C}_5\text{H}_{12}$ ). Inoltre prendono piede le miscele di due o più fluidi puri, quali R-407c (miscela ternaria di R-32, R-125 e R-134a).

La Tab.1 riporta per alcuni fluidi frigorigeni le pressioni di esercizio e la PVU valutate alle temperature di  $-20\text{ }^\circ\text{C}$  e  $35\text{ }^\circ\text{C}$ . Da essa si nota che la PVU di R-12 e R-134a e propano è circa doppia di quella di R-22 e ammoniaca. Per contro, questi ultimi (ed anche il propano) lavorano a pressioni maggiori.

Fluido	Formula	Pressione a $-20\text{ }^\circ\text{C}$ , bar	Pressione a $35\text{ }^\circ\text{C}$ , bar	ODP	GWP	PVU, $\text{m}^3/\text{MJ}$
R-12	$\text{CCl}_2\text{F}_2$	1.51	8.48	0.9	8500	0.997
R-22	$\text{CHClF}_2$	2.45	13.6	0.05	1700	0.601
R-134a	$\text{CF}_3\text{CH}_2\text{F}$	1.33	8.87	0	1300	1.076
R-717 (ammoniaca)	$\text{NH}_3$	1.9	13.5	0	<1	0.578
R-290 (propano)	$\text{C}_3\text{H}_8$	2.4	12.2	0	3	0.945
R-600a (isobutano)	$\text{C}_4\text{H}_{11}$	0.72	4.6	0		1.55

**Tabella 1:** Caratteristiche di alcuni fluidi frigorigeni, valutate alle temperature di  $-20$  e  $35\text{ }^\circ\text{C}$ .

Tutti questi fluidi di nuova generazione hanno potere distruttivo dell'ozono (ODP) nullo, ma costituiscono lo stesso un pericolo ambientale per il loro contributo all'effetto serra (GWP, *global warming potential*), che per esempio vale 1300 per l'R-134a (per confronto, il GWP

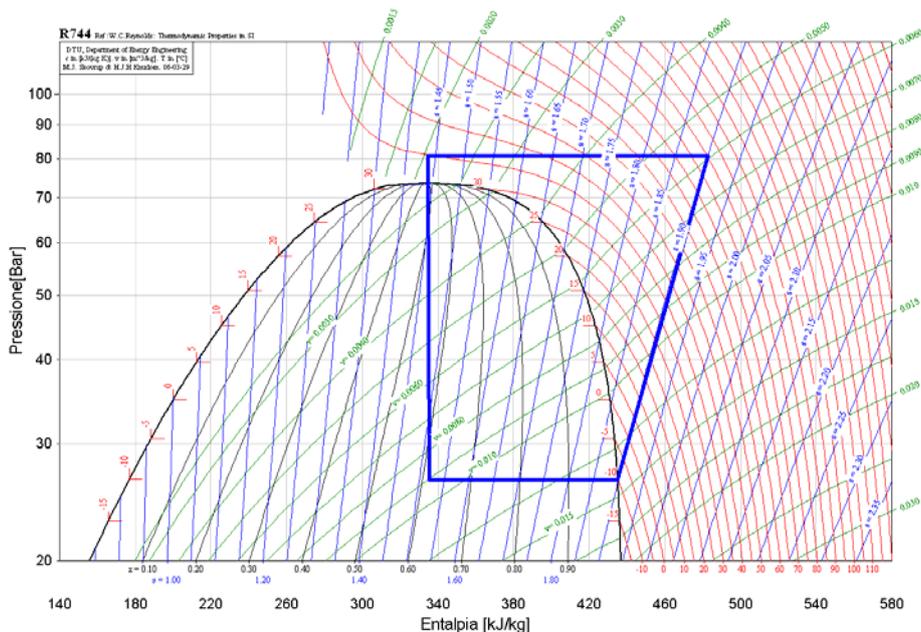
della CO<sub>2</sub> vale 1). Questo vuol dire, approssimativamente, che la rottamazione dell'impianto di condizionamento di un'autovettura (contenente 600 g di R134a), con conseguente dispersione in atmosfera del fluido, è equivalente a 650 kg di CO<sub>2</sub>, ovvero alla quantità emessa dal motore della stessa auto in circa 4000 km.

### Cenno a cicli frigoriferi più avanzati

I principali inconvenienti del ciclo frigorifero a semplice compressione, illustrato in precedenza, sono la elevata potenza meccanica richiesta e la elevata temperatura del fluido in uscita dal compressore che, nei casi estremi, può superare il limite di compatibilità con il lubrificante del compressore. Per ovviare a questi inconvenienti, si può ricorrere ad una *compressione interrefrigerata*, secondo le modalità illustrate nel Cap.4. Per migliorare ulteriormente le prestazioni, anche la laminazione può essere sdoppiata, a spese di una notevole complicazione del ciclo: dettagli su questo tipo di cicli (*a doppia compressione e doppia laminazione*) possono essere trovati sul testo di Anglesio. Si possono infine usare, per elevati salti di temperatura, due *cicli frigoriferi in cascata*, operanti con differenti fluidi.

Per applicazioni semplici e compatte, tipicamente aeronautiche, si può utilizzare un *ciclo frigorifero ad aria*, che non è altro che un ciclo di Joule Brayton (v. Cap.7) operante in maniera inversa: per la refrigerazione, si sfrutta l'aria fredda uscente dalla turbina, e quindi si acquista energia termica nello scambiatore a bassa temperatura.

Infine, le tendenze di ricerca attuali portano a considerare l'uso di fluidi naturali e di basso impatto ambientale; il dibattito in merito è ancora aperto, ma uno dei possibili candidati è l'*anidride carbonica* (sigla R744) che, tutto sommato, ha un GWT molto inferiore a quello dei fluidi attualmente utilizzati. Dato che la temperatura critica della CO<sub>2</sub> è di 31 °C, in questo caso è spesso necessario che la trasformazione superiore del ciclo avvenga a *pressione ipercritica*; questi cicli possono arrivare ad operare a pressioni di 80 bar ed oltre, vedi Fig.6.

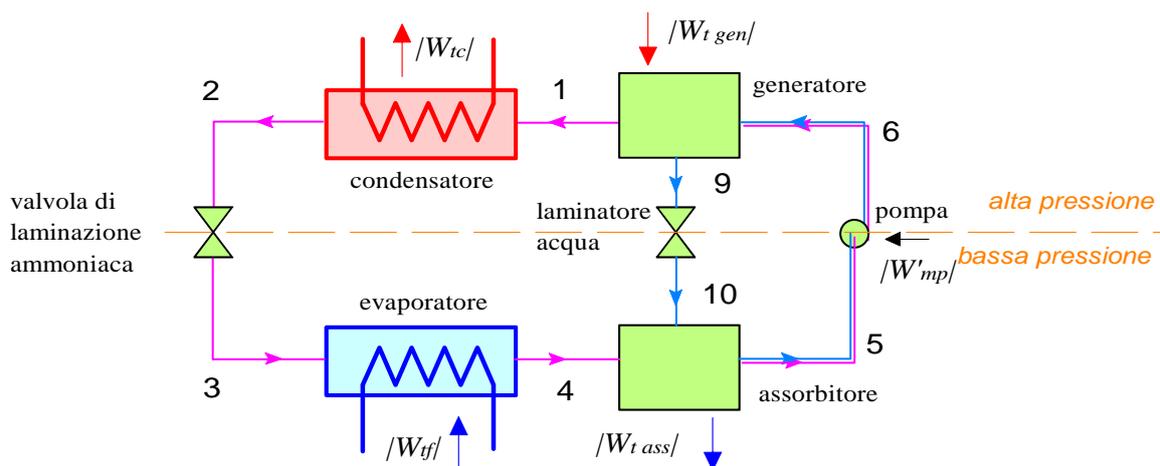


**Figura 6:**Ciclo ipercritico a CO<sub>2</sub> operante tra -10 e 35 °C.

### Cenno al ciclo frigorifero ad assorbimento

Nel ciclo frigorifero precedentemente esposto, è necessaria una elevata potenza meccanica per la compressione del vapore. Illustriamo adesso il principio di funzionamento di un ciclo (detto ad *assorbimento*) in cui il consumo di energia meccanica è molto limitato e la macchina viene fatta funzionare prevalentemente con energia termica prelevata a temperatura superiore a quella ambiente.

Questo ciclo sfrutta una soluzione di due fluidi (allo stato attuale, ammoniaca in acqua, o acqua in bromuro di litio) in cui la solubilità varia con la temperatura.



**Figura 7:**Ciclo frigorifero ad assorbimento.

Riferendosi allo schema di Fig.7, nel generatore la soluzione acqua-ammoniaca, riscaldata, libera ammoniaca gassosa ad alta pressione, assorbendo calore ad alta temperatura (intorno ai 100-130 °C). L'ammoniaca liberata viene condensata nel condensatore, dove cede calore, e successivamente laminata e fatta evaporare a bassa temperatura e pressione, sottraendo calore alla sorgente fredda (questa parte del ciclo, 1234, non differisce dal ciclo frigorifero standard). A questo punto l'ammoniaca gassosa viene miscelata nuovamente con l'acqua nell'assorbitore: in esso fluisce anche, previa laminazione, l'acqua impoverita di ammoniaca proveniente dal generatore. Nel processo di soluzione viene liberato calore, che deve essere ceduto all'esterno. Infine la soluzione acqua-ammoniaca, ricostituita, viene pompata, allo stato liquido, nel generatore, chiudendo il ciclo. In questo processo di pompaggio, dato che il fluido è allo stato liquido, si assorbe una potenza meccanica molto piccola rispetto a quella che sarebbe necessaria per comprimere l'ammoniaca allo stato gassoso.

Il bilancio di energia applicato all'intero ciclo risulta in

$$|W_{tc}| + |W_{tass}| = |W_{tf}| + |W_{tgen}| + |W'_{mp}| \quad (10.18)$$

Il coefficiente di prestazione risulta in questo caso dato da

$$COP_{ass} = \frac{|W_{tf}|}{|W'_{mp}| + |W_{tgen}|} \quad (10.19)$$

ed ha valori tipici intorno a 0.5: vale a dire, visto che  $W'_{mp}$  è in genere trascurabile, la potenza termica necessaria è circa doppia di quella ottenuta per la refrigerazione. L'analisi dettagliata del ciclo, che in realtà include anche altri organi di rettificazione e recupero, richiede l'uso di diagrammi di stato per miscele bicomponenti ed esula dagli scopi di questa trattazione.

E' da notare che questo impianto può utilizzare il calore refluo di un impianto cogenerativo: in questo modo, tramite la cosiddetta *trigenerazione*, il calore refluo può essere utilizzato sia per il riscaldamento nei mesi invernali che il per condizionamento in quelli estivi.

### Ciclo frigorifero e disponibilità (cenni)

Per concludere queste brevi note, appare utile riconsiderare, almeno in via qualitativa, il ciclo frigorifero sotto l'aspetto dell'analisi di disponibilità: il ciclo frigorifero trasferisce calore da una sorgente a bassa temperatura ad una ad alta temperatura, aumentando quindi la disponibilità di tale energia termica. Poichè la disponibilità non può essere creata, ma solo distrutta, è necessario apportare disponibilità da un'altra fonte: tale disponibilità viene infatti introdotta nel sistema sotto forma di lavoro meccanico nei cicli a compressione, e sotto forma di calore ad alta temperatura nel ciclo ad assorbimento.

### BIBLIOGRAFIA

- R. Mastrullo, P. Mazzei, R. Vanoli, *Termodinamica per Ingegneri*, Liguori, cap.3.  
A. Cavallini, R. Mattarolo, *Termodinamica Applicata*, CLEUP, Padova, 1988, cap.12.  
P. Anglesio, *Elementi di Impianti Termotecnici*, Pitagora, Bologna, 1998, cap.4.

### ESERCIZI

#### ESERCIZIO 9.1

Un ciclo di refrigerazione utilizza il fluido R-12 per rimuovere 6 kW da un recipiente a bassa temperatura a  $-7^{\circ}\text{C}$ ; la temperatura dell'ambiente è di  $38^{\circ}\text{C}$ .

Occorre notare che quando il calore è "rimosso" da un recipiente a bassa temperatura il fluido operativo deve essere ad una temperatura più bassa, mentre nel condensatore, quando il calore è trasferito dal fluido operativo all'ambiente, la temperatura del fluido deve essere superiore a quella dell'ambiente. Una differenza di temperatura di 3 K è quindi richiesta a questo scopo sia nell'evaporatore che nel condensatore. Il rendimento isoentropico del compressore vale  $\eta_c = 0.75$  e il suo rendimento elettro-meccanico è pari a  $\eta_m = 94\%$ .

- Descrivere il ciclo in un diagramma pressione-entalpia;
  - Trovare il coefficiente di prestazione (COP);
  - Determinare la portata di fluido necessaria;
  - Determinare la potenza richiesta dalla rete per azionare il compressore.
- [b) 3.03; c) 0.056 kg/s; d) 2.11 kW]

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 10. Elementi di psicrometria, condizionamento dell'aria e benessere ambientale

*Nicola Forgione*

*Paolo Di Marco*

Versione 2005.00 – 5.05.06.

*NB: i paragrafi contrassegnati con (°) sono stati inclusi per completezza ma non fanno parte del programma di esame per il corso in Ingegneria Elettrica.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. Gli autori se ne riservano tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione.*

*Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*Gli autori saranno grati a chiunque segnali loro errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## 1. Definizione

La psicrometria è la scienza che studia le proprietà termodinamiche delle miscele aria-vapore e gli effetti di queste miscele sui materiali e sul comfort umano.

## 2. Miscela aria-vapore

L'aria è una miscela di azoto (78 % in volume), ossigeno (21 % in volume) e di piccoli quantitativi di altri gas. **L'aria atmosferica** contiene anche vapore d'acqua (o umidità). Nel caso che l'aria non contenga vapore viene detta **aria secca** mentre nel caso opposto viene detta **aria umida**.

Lo studio dell'aria atmosferica come miscela gas-vapore è alla base delle applicazioni di condizionamento dell'aria. Infatti, sebbene la quantità di acqua contenuta nell'aria ambiente sia piccola essa riveste un'importanza fondamentale per il benessere dell'uomo.

La temperatura dell'aria nelle applicazioni di condizionamento varia tra circa -10 °C e 50 °C. Essa risulta quindi sempre più alta della temperatura critica dell'aria secca (-141 °C) per cui l'aria è in fase gassosa. Inoltre sia l'aria che il vapore si trovano ad una pressione molto minore di quella critica ( $p_{a,cr} = 37.7 \cdot 10^5$  Pa,  $p_{v,cr} = 221 \cdot 10^5$  Pa). L'aria atmosferica può quindi essere trattata come una miscela di gas perfetti la cui pressione è, per la legge di Dalton, la somma delle pressioni parziali dell'aria secca e di quella del vapore.

$$p = p_a + p_v \quad \dots \quad \begin{cases} p_a V = m_a R_a T, & R_a = 287.06 \text{ J/(kg K)} \\ p_v V = m_v R_v T, & R_v = 461.52 \text{ J/(kg K)} \end{cases}$$

Dal momento che sia l'aria che il vapore si considerano dei gas perfetti, la loro entalpia sarà funzione solo della temperatura. Se si prende 0 °C come temperatura di riferimento si ha (le entalpie sono in kJ/(kg aria secca), mentre le temperature sono in °C):

$$h_a = c_{pa} t = 1.005 t, \quad h_v = h_v + c_{pv} t = 2501.3 + 1.820 t \quad -10 \leq t \leq 50 \text{ °C}$$

Nel seguito verranno definiti per punti le principali proprietà utilizzate per caratterizzare lo stato termodinamico dell'aria umida.

- Il **titolo** dell'aria umida o **umidità specifica**,  $\omega$ , è la massa di vapore d'acqua contenuta nell'unità di massa d'aria secca:

$$\omega \equiv \frac{m_v}{m_a} = \frac{R_a p_v}{R_v p_a} = 0.622 \frac{p_v}{p - p_v} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_a = \frac{0.622}{0.622 + \omega} p \\ p_v = \frac{\omega}{0.622 + \omega} p \end{cases}$$

In una trasformazione a pressione (totale) costante (trasformazioni più comuni)  $p_a$  e  $p_v$  rimangono separatamente costanti finché rimane costante il titolo  $\omega$ .

L'umidità specifica è una quantità adimensionale (kg vapore/kg aria secca) ma in taluni casi viene espressa in (g vapore/kg aria secca); in tal caso il suo valore deve essere diviso per 1000 prima di utilizzarlo nei calcoli.

- Il **volume specifico** dell'aria umida,  $v$ , viene valutato con riferimento all'unità di massa dell'aria secca:

$$v \equiv \frac{V}{m_a} = \frac{R_a T}{p_a} = \frac{R_a T}{p - p_v} = \frac{R_a T}{0.622 p} (0.622 + \omega) \quad [\text{m}^3/(\text{kg aria secca})]$$

Nella formula precedente  $T$  è in gradi Kelvin.

- La **densità** dell'aria umida,  $\rho$ , è definita come la massa d'aria umida contenuta nell'unità di volume:

$$\rho \equiv \frac{m_a + m_v}{V} = \frac{m_a}{V} (1 + \omega) = \frac{(1 + \omega)}{v} = \frac{0.622 p}{R_a T} \left( \frac{1 + \omega}{0.622 + \omega} \right) \quad [\text{kg/m}^3]$$

Dalla formula precedente si vede che, a parità di temperatura e di pressione totale della miscela aria-vapore, la densità è una funzione decrescente di  $\omega$  e, quindi, che l'aria più umida è anche più leggera. Questo comportamento è importante per mantenere le condizioni di flusso nelle torri di raffreddamento a circolazione naturale, come si vedrà nel seguito.

E', inoltre, importante notare come, in base alle precedenti definizioni, deriva che la densità dell'aria umida *non* risulta uguale al reciproco del volume specifico dell'aria umida.

- L'**entalpia** dell'aria umida,  $h$ , per unità di massa dell'aria secca è data dalla somma dell'entalpia dell'aria secca e dell'entalpia del vapor d'acqua:

$$h \equiv \frac{H_a + H_v}{m_a} = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.82t\omega \quad [\text{kJ}/(\text{kg aria secca})]$$

- Se ad 1 kg d'aria secca si aggiunge del vapore la pressione parziale del vapore tende ad aumentare fino ad arrivare alla pressione di saturazione corrispondente alla temperatura della miscela. In queste condizioni qualunque altra quantità di vapore aggiunta all'aria condenserà (nebbia). Quando l'aria non sarà più in grado di contenere altro vapore si dirà **satura**. L'**umidità relativa** dell'aria umida,  $\phi$ , è la quantità di vapore che l'aria effettivamente contiene diviso la quantità massima che essa potrebbe contenere alla stessa temperatura:

$$\phi \equiv \frac{m_v}{m_{v,sat}} = \frac{p_v}{p_{v,sat}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}} \quad [\text{adim.}]$$

La pressione di saturazione dell'acqua può essere determinata mediante la seguente formula approssimata:  $p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp[16.6536 - 4030.183/(t + 235)]$ .

- La **temperatura di rugiada**,  $t_r$ , è definita come quella temperatura alla quale inizia la condensazione quando si impone all'aria un raffreddamento isobaro (temperatura di saturazione alla pressione parziale del vapore):

$$t_r \equiv t_{sat}(p_v)$$

- La **temperatura di bulbo umido**,  $t_{bu}$ , è la temperatura misurata con un termometro il cui bulbo sia stato ricoperto con una garza bagnata con acqua pura ed esposto ad una corrente d'aria. Si ha:  $t_r \leq t_{bu} \leq t$ . Per l'aria satura risulta:  $t_{bu} = t_r = t$ .

### 3. I diagrammi psicrometrici

L'aria umida è un fluido termodinamico *trivariante*, ovvero sono necessarie tre variabili per determinarne lo stato (la terza variabile può essere ad esempio la quantità di vapore presente nell'unità di massa di aria). Tuttavia, *se si fissa la pressione totale della miscela* rimangono da precisare due sole variabili di stato e si può rappresentare lo stato del sistema su diagrammi piani.

Nello studio dei problemi relativi al condizionamento dell'aria si ricorre ai cosiddetti diagrammi psicrometrici (riferiti normalmente alla pressione di 1 atm = 101325 Pa) che consentono una risoluzione grafica dei problemi stessi. Questi diagrammi permettono, note due grandezze tra  $t$ ,  $t_{bu}$ ,  $t_r$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $v$ ,  $h$  del miscuglio aria-vapore, di identificare tutte le altre grandezze.

I diagrammi psicrometrici più comunemente usati sono tre. Il diagramma psicrometrico **di Mollier** è un diagramma ad assi obliqui le cui coordinate sono umidità specifica ed entalpia (v. figura 1), generalmente noto nel formato dovuto all'**ASHRAE** (v. figura 2). Il **diagramma psicrometrico Carrier** (v. figura 3) è l'unico che usa le coordinate rettangolari (temperatura di bulbo secco ed umidità specifica).

La differenza tra i diagrammi suddetti è quasi impercettibile: nel diagramma di Mollier, le linee isoentalpiche sono parallele e quelle a temperatura di bulbo asciutto lievemente divergenti; nel diagramma Carrier avviene l'opposto.

Nel diagramma Carrier sull'asse delle ascisse è riportata la temperatura di bulbo secco e sull'asse delle ordinate l'umidità specifica; all'interno sono disegnate diverse famiglie di linee, facilmente distinguibili, il cui significato è riportato nello schema semplificato di figura 4.

Su questo diagramma, oltre alle linee a temperatura e ad umidità specifica costante vengono riportate le linee ad umidità relativa costante, quelle a temperatura di bulbo umido costante e le linee a volume specifico costante. In diagrammi dettagliati vengono pure riportate le linee di deviazione dell'entalpia rispetto ai valori di saturazione (su scale disegnate perpendicolarmente alle linee a temperatura di bulbo umido costante): si tiene così conto del fatto che le isoentalpiche non sono parallele, come precedentemente esposto.

Sul diagramma Carrier è disegnato un **punto di riferimento** o **polo** (in corrispondenza di una temperatura di bulbo secco  $t = 24$  °C e di un'umidità relativa  $\phi = 50$  %) che, una volta noto il fattore termico (che sarà definito in seguito), consente di rappresentare l'evoluzione dell'aria nei vari processi di condizionamento.

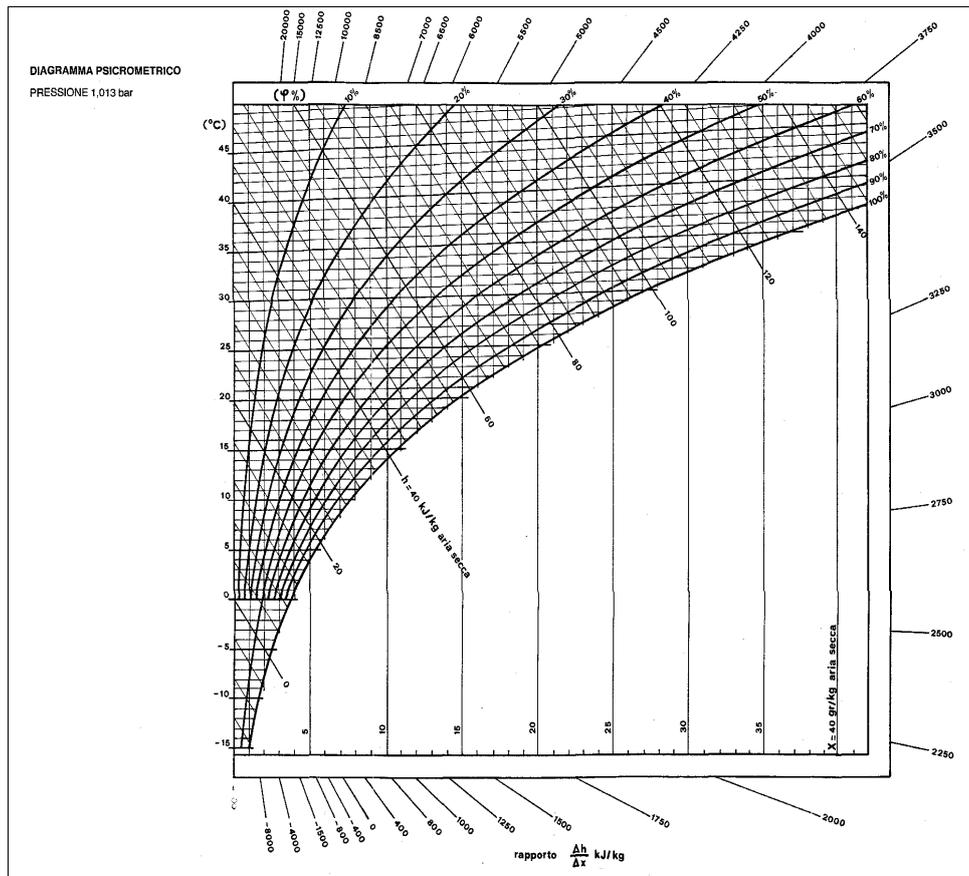


Figura 1: Diagramma psicrometrico di Mollier.

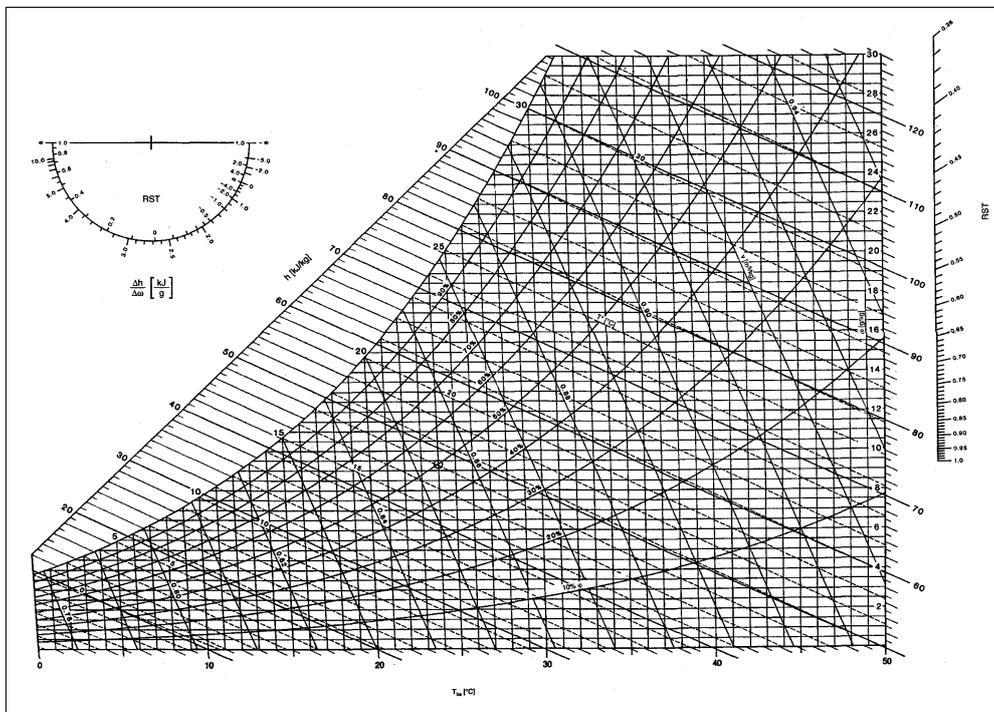


Figura 2: Diagramma psicrometrico di Mollier, versione ASHRAE.

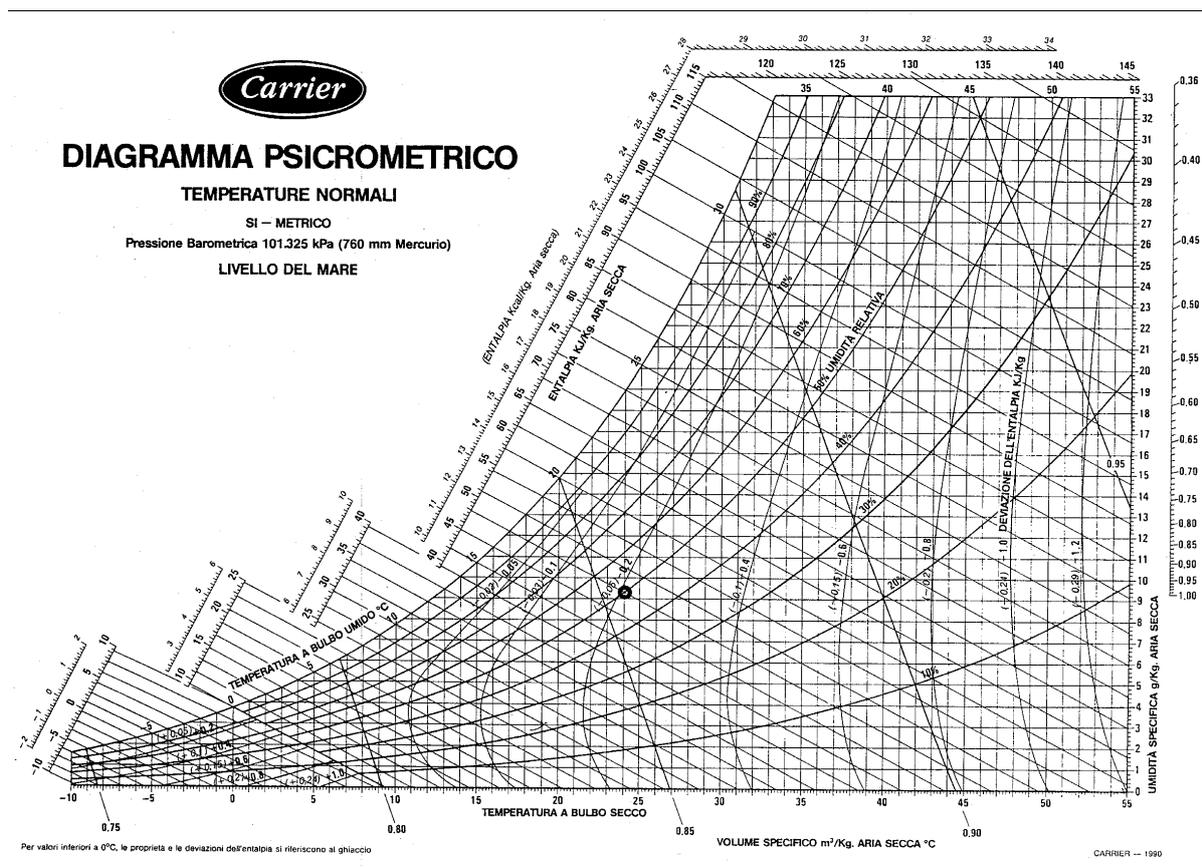


Figura 3: Diagramma psicrometrico Carrier.

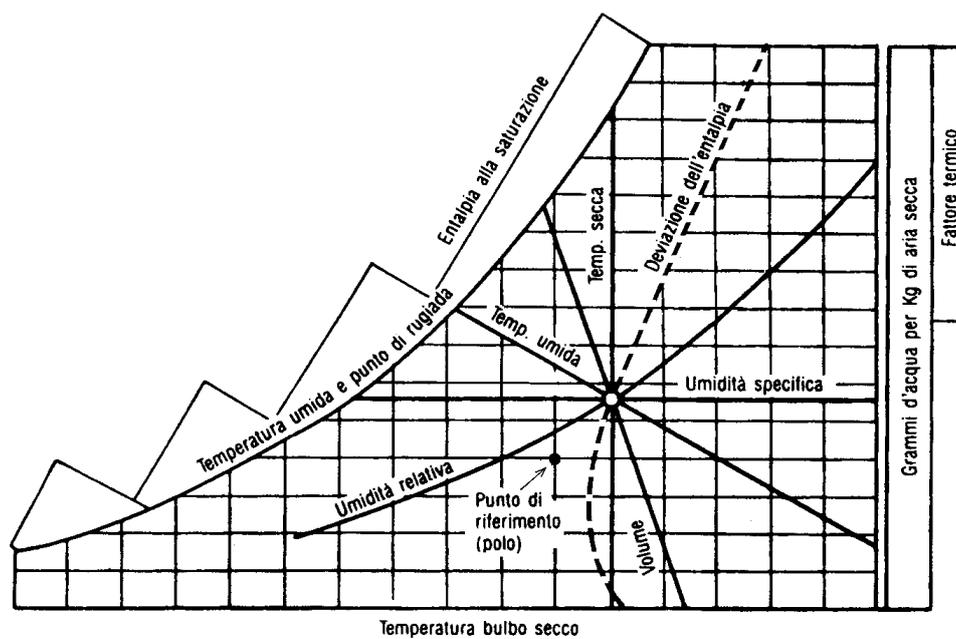


Figura 4: Significato delle linee sul diagramma psicrometrico Carrier.

#### 4. Equazioni di bilancio delle trasformazioni per il condizionamento dell'aria

Si consideri un sistema aperto a regime in cui entrano delle portate  $G_i$  ed escono delle portate  $G_u$  d'aria. Inoltre nel sistema entrano (o escono) delle portate  $G_l$  di acqua (allo stato liquido o vapore). Il sistema scambia con l'ambiente una potenza termica  $W_t$  ed una potenza meccanica  $W'_m$ . In queste condizioni, possiamo scrivere i bilanci di massa (aria secca ed acqua) ed energia come segue.

##### *Bilancio di massa dell'aria secca*

$$\sum_i G_i - \sum_u G_u = 0$$

##### *Bilancio di massa dell'acqua*

$$\sum_i G_i \omega_i - \sum_u G_u \omega_u \pm \sum G_l = 0$$

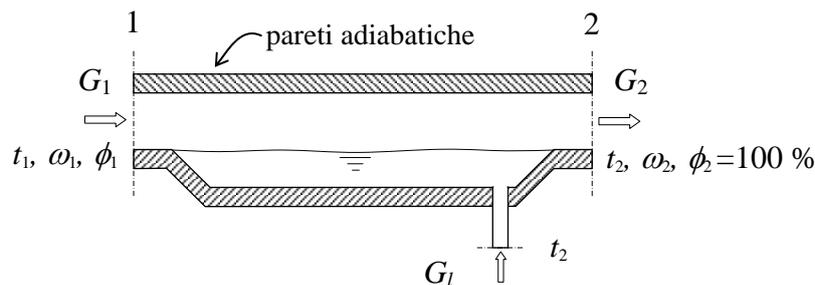
##### *Bilancio di energia dell'aria umida*

$$\sum_i G_i h_i - \sum_u G_u h_u \pm \sum G_l h_l + W_t - W'_m = 0$$

Le portate massiche di aria,  $G$ , sono espresse in (kg di aria secca / s) e quindi per una corrente di aria umida non rappresenta la portata massica totale. Questa scelta risiede nel fatto che la portata massica espressa in termini della sola aria secca rimane costante in presenza di umidificazione o deumidificazione della corrente di aria umida.

##### La temperatura di saturazione adiabatica

Un metodo pratico per determinare l'umidità specifica e l'umidità relativa dell'aria umida che si trovi in certe condizioni termoigrometriche (stato 1) è quello di far subire all'aria una trasformazione di saturazione adiabatica (vedi figura 5).



**Figura 5:** Saturatore adiabatico.

Risolvendo infatti le equazioni di bilancio per un saturatore adiabatico:

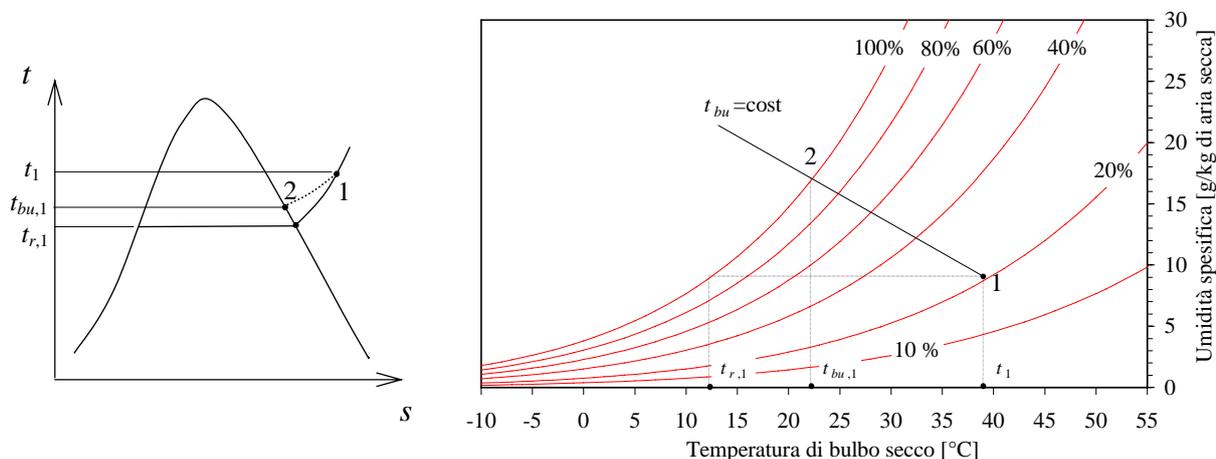
$$\begin{cases} G_1 - G_2 = 0 & \text{(bilancio in massa dell'aria secca)} \\ G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 + G_l = 0 & \text{(bilancio in massa dell'acqua)} \\ G_1 h_1 - G_2 h_2 - G_l h_{l,2} = 0 & \text{(bilancio di energia dell'aria umida)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_2 = G_1 = G \\ G_l = G(\omega_2 - \omega_1) \\ h_2 - h_1 = h_{l,2}(\omega_2 - \omega_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 - \frac{(h_2 - h_1)}{h_{l,2}}$$

Se si ipotizza che l'aria in uscita sia satura ( $\phi_2=100\%$ ) e che l'acqua di reintegro si trovi alla temperatura  $t_2$ , l'unica incognita nelle precedenti equazioni è  $\omega_1$  (si noti che  $h_1$  può essere scritta in funzione di  $\omega_1$ ). L'umidità specifica e quella relativa per lo stato 1 possono quindi essere determinate, in modo indiretto, misurando la pressione e la temperatura dell'aria all'ingresso ed all'uscita di un sistema che realizza una trasformazione di saturazione adiabatica.

La temperatura di uscita del saturatore adiabatico, detta **temperatura di saturazione adiabatica**, è una proprietà termodinamica dell'aria umida nello stato di ingresso. La temperatura di saturazione adiabatica è compresa tra la temperatura di bulbo secco e la temperatura di rugiada (vedi figura 6). Per miscele aria-vapore alla pressione atmosferica la temperatura di saturazione adiabatica è molto vicina alla temperatura di bulbo umido (misurabile ad esempio con uno psicrometro a fionda).

Notare che dal punto di vista teorico la temperatura di saturazione adiabatica e quella di bulbo umido sono due concetti differenti, anche se nella pratica i due valori coincidono. Dato il piccolo valore della  $h_{l,2}$ , in pratica una trasformazione di saturazione adiabatica è anche pressoché isoentalpica.



**Figura 6:** Temperature di bulbo secco, di bulbo umido e di rugiada.

## 5. Principali processi di trasformazione dell'aria umida

### Processo di riscaldamento sensibile (o raffreddamento sensibile) dell'aria umida

Questi processi avvengono senza sottrazione o addizione di acqua ( $G_l = 0$ ). Il processo è analogo a quello che avviene in uno scambiatore di calore a superficie. L'elemento scaldante può essere costituito da una serpentina in cui scorre acqua calda o da una resistenza elettrica, mentre quello refrigerante può essere costituito da una serpentina in cui scorre acqua fredda, o dall'evaporatore di un impianto frigorifero.

*Bilancio di massa dell'aria secca*

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

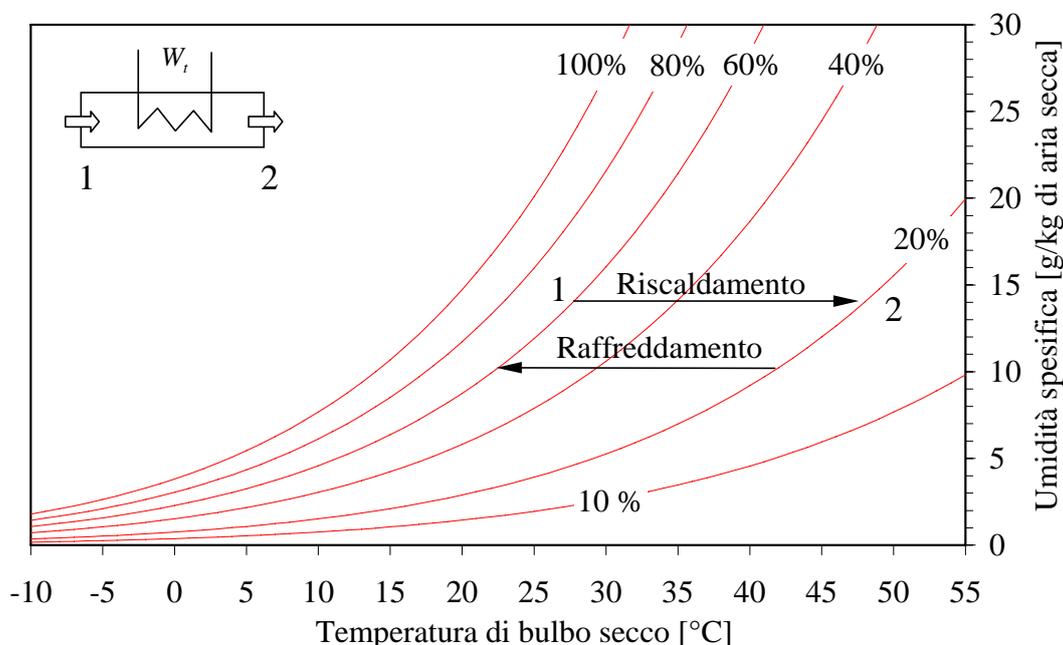
*Bilancio di massa dell'acqua*

$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \omega_2}$$

*Bilancio di energia dell'aria umida*

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 + W_t = 0 \Rightarrow \boxed{W_t = G(h_2 - h_1)}$$

Durante il riscaldamento l'umidità relativa dell'aria diminuisce anche se l'umidità specifica rimane costante (il contrario si verifica nel caso di raffreddamento). E' questo il motivo per il quale, generalmente, un processo di riscaldamento è sempre accompagnato da un processo di umidificazione, mentre un processo di raffreddamento è sempre associato ad un processo di deumidificazione.



**Figura 7:** Processi di riscaldamento e raffreddamento sensibile.

**ESEMPIO 10.1 – Riscaldamento sensibile**

Si abbia una portata di d'aria di 0.5 kg/s a 24 °C e 50 % di umidità relativa. Determinare la potenza termica sensibile che bisogna fornire alla corrente d'aria per aumentare la sua temperatura di bulbo secco di 10 °C. Disegnare, inoltre, la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida in ingresso ed in uscita dall'unità di riscaldamento possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

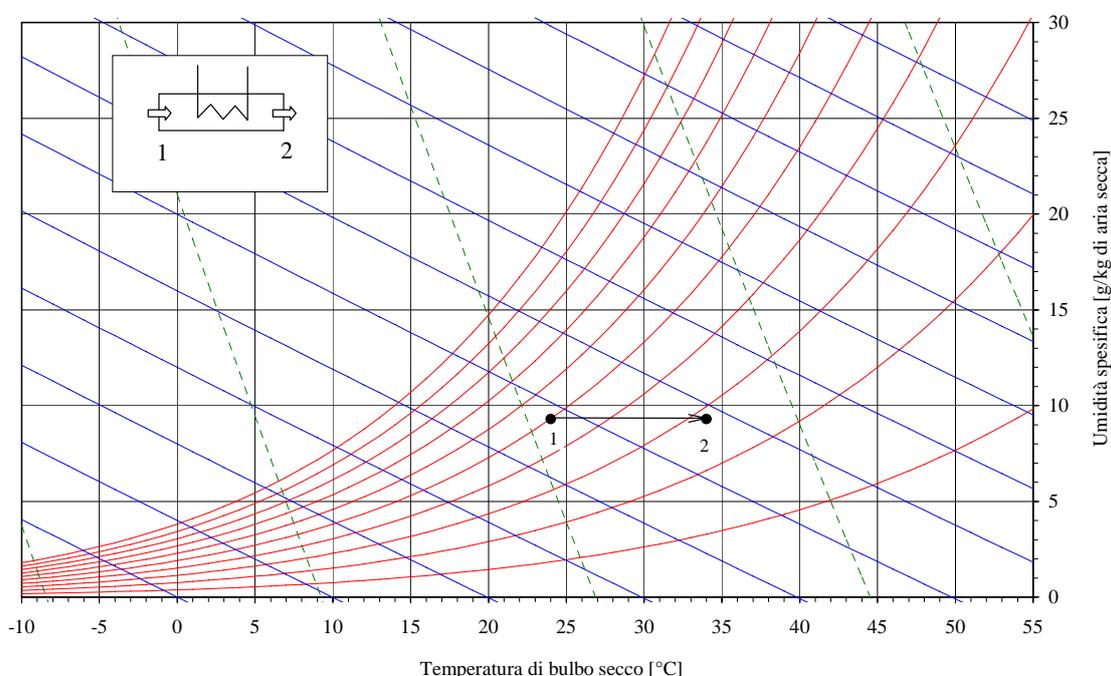
$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	<b>24</b>	<b>50</b>	2983	0.00929	47.77
stato 2	<b>34</b>	28	5320	<b>0.00929</b>	57.99

La potenza termica sensibile che bisogna fornire alla corrente d'aria umida si ricava dalle equazioni di bilancio e vale:

$$W_t = G(h_2 - h_1) = 5.1 \text{ kW}$$



**Processo di mescolamento adiabatico di due correnti d'aria umida**

In questo processo si mescolano due correnti d'aria umida senza apporto di energia dall'esterno. Il processo è analogo a quello che avviene in uno scambiatore di calore a miscelamento.

*Bilancio di massa dell'aria secca*

$$G_1 + G_2 - G_3 = 0 \Rightarrow G_3 = G_1 + G_2$$

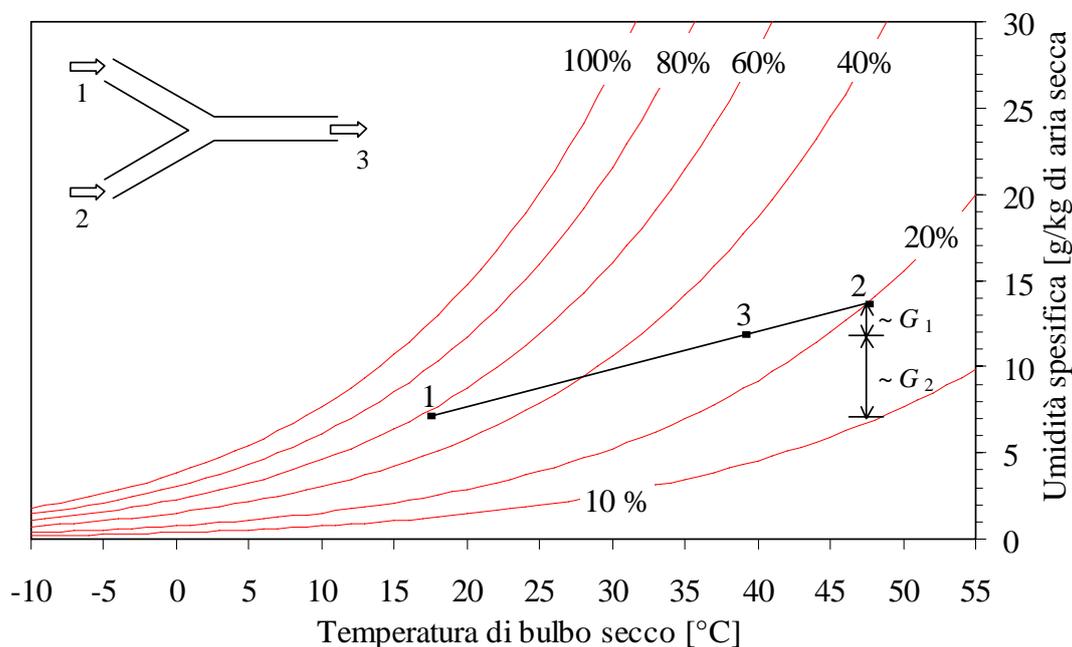
*Bilancio di massa dell'acqua*

$$G_1 \omega_1 + G_2 \omega_2 - G_3 \omega_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{G_1}{G_2}}$$

*Bilancio di energia dell'aria umida*

$$G_1 h_1 + G_2 h_2 - G_3 h_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{h_2 - h_3}{h_3 - h_1} = \frac{G_1}{G_2}}$$

Quando due differenti flussi d'aria vengono miscelati adiabaticamente, il punto rappresentativo della miscela (punto 3) sul diagramma psicrometrico (v. figura 8) si trova sulla retta congiungente i due punti originari 1 e 2 ed il rapporto tra le distanze 2-3 su 3-1 è pari al rapporto tra le portate  $G_1$  e  $G_2$ .



**Figura 8:** Processo di mescolamento adiabatico.

**ESEMPIO 10.2 – Mescolamento adiabatico**

Si mescolino una portata di 0.5 kg/s d'aria a 24 °C e 50 % di umidità relativa con 0.1 kg/s a 34 °C e 70 % di umidità relativa.

Determinare le condizioni termoigrometriche dell'aria umida in uscita dall'unità di miscelamento. Disegnare, inoltre, la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia delle due correnti d'aria umida in ingresso al miscelatore possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	<b>24</b>	<b>50</b>	2983	0.00929	47.77
stato 2	<b>34</b>	<b>70</b>	5320	0.02373	94.99

Il titolo e l'entalpia della corrente d'aria umida in uscita dal miscelatore possono essere determinati mediante le equazioni di bilancio e valgono, rispettivamente:

$$\omega_3 = \frac{G_1 \omega_1 + G_2 \omega_2}{G_1 + G_2} = 0.0117$$

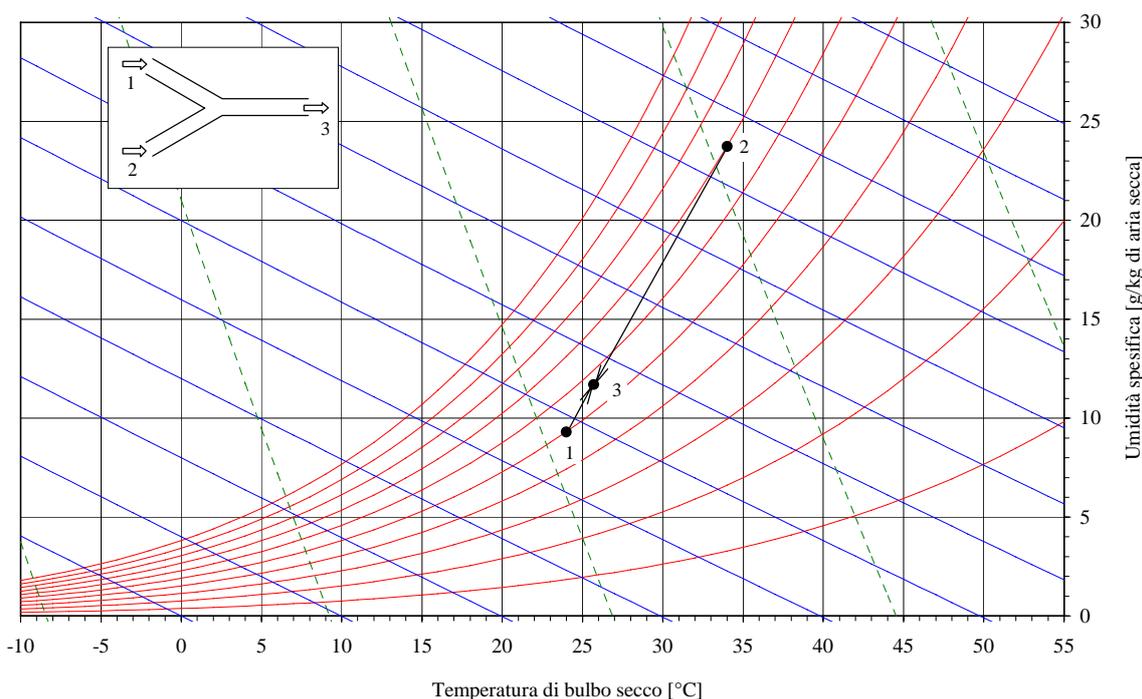
$$h_3 = \frac{G_1 h_1 + G_2 h_2}{G_1 + G_2} = 55.64 \text{ kJ/kg}$$

Noti il titolo e l'entalpia dell'aria umida nello stato 3, è possibile calcolare la temperatura di bulbo secco e l'umidità specifica facendo uso delle seguenti relazioni:

$$t_3 = \frac{h_3 - 2501.3\omega_3}{1.005 + 1.820\omega_3} = 25.7 \text{ °C}$$

$$\phi_3 = \frac{\omega_3}{\omega_3 + 0.622 \frac{p}{p_{v,sat}(t_3)}}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 3	25.7	56.7	3302	<b>0.0117</b>	<b>55.64</b>



**Processo di raffreddamento con deumidificazione dell'aria umida**

Nella maggior parte degli impianti di condizionamento estivo dell'aria si richiedono, contemporaneamente, il raffreddamento e la deumidificazione dell'aria trattata.

*Bilancio di massa dell'aria secca*

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

*Bilancio di massa dell'acqua*

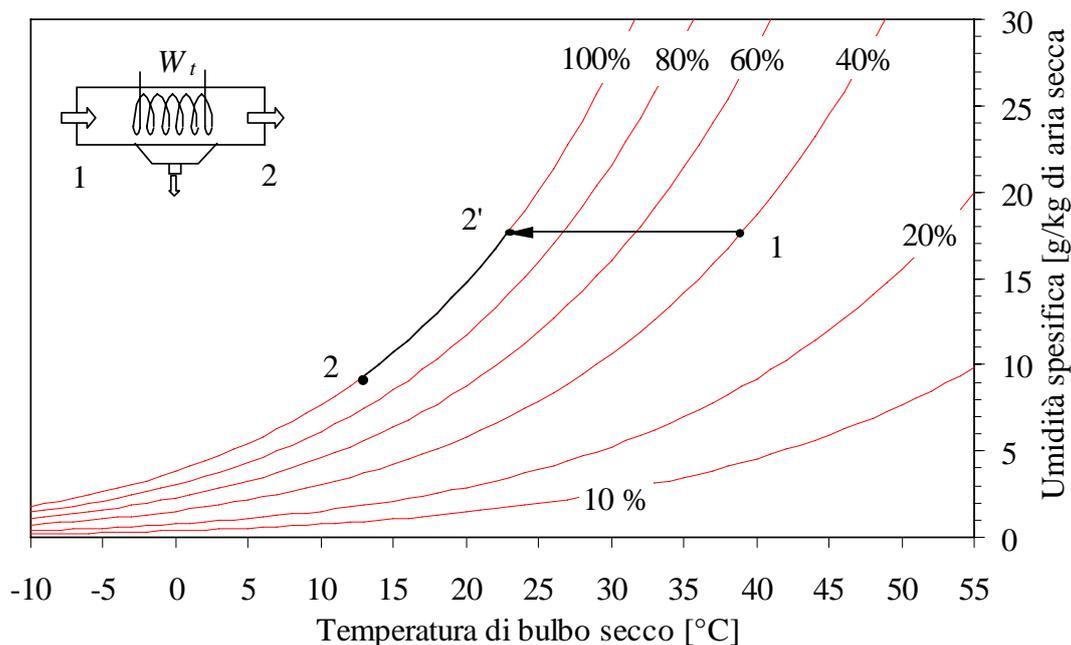
$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 - G_l = 0 \Rightarrow \boxed{G_l = G (\omega_1 - \omega_2)}$$

*Bilancio di energia dell'aria umida*

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 - G_l h_l + W_t = 0 \Rightarrow \boxed{h_2 = h_1 - (\omega_1 - \omega_2) h_l + W_t / G}$$

Per il calcolo dell'entalpia del liquido ( $h_l$ ) si assume che esso sia estratto alla temperatura  $t_2$  (in realtà esso viene estratto a temperature comprese tra quelle del punto 2' e del punto 2). Il contributo dell'entalpia del liquido al bilancio energetico è comunque quasi sempre trascurabile.

L'aria in uscita (condizioni 2) è saturata e occorre generalmente un successivo processo di riscaldamento sensibile per riportarla in condizioni di umidità relativa gradevoli.



**Figura 9:** Processo di raffreddamento con deumidificazione.

**Processo di deumidificazione con by-pass**

In realtà nel processo di raffreddamento con deumidificazione solo una parte d'aria viene in contatto con la superficie raffreddante subendo il processo 1-2 (linea in grassetto del grafico precedente). La rimanente parte dell'aria (aria by-passata) non subisce alcuna trasformazione (rimane cioè nello stato 1). Inoltre, alcune volte si può introdurre intenzionalmente un circuito di by-pass esterno per evitare il successivo processo di riscaldamento sensibile.

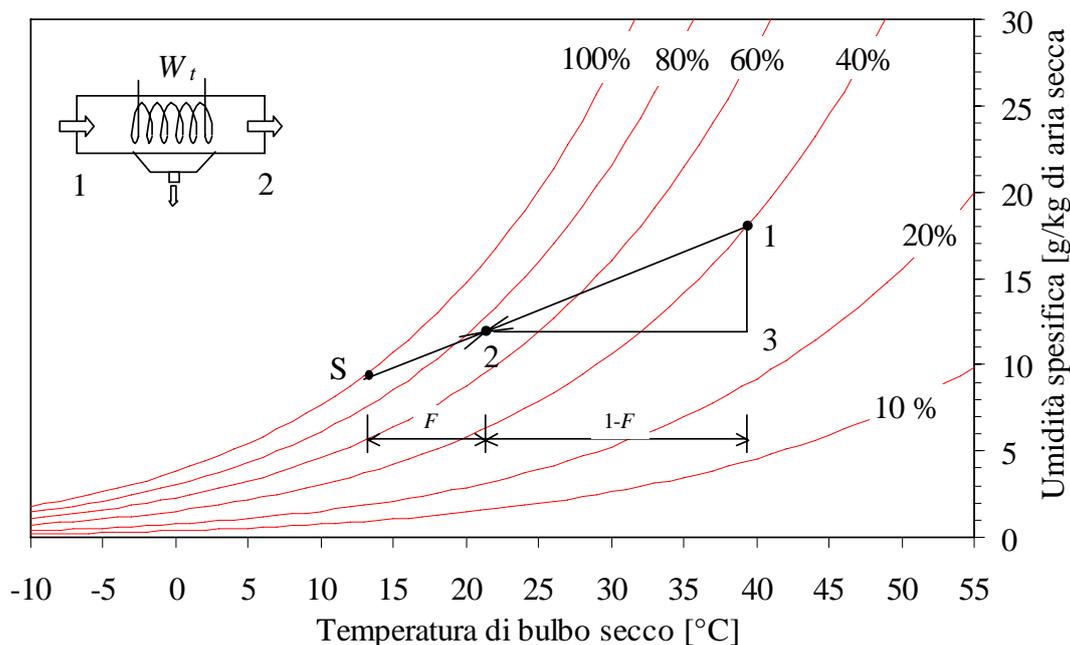
All'uscita della batteria di raffreddamento si avrà quindi un mescolamento tra l'aria nelle condizioni S (la temperatura  $t_s$  è la temperatura media della superficie della batteria) e l'aria nelle condizioni 1 che risulta in una miscela nelle condizioni 2 (vedi secondo grafico).

Si definisce **fattore di bypass**,  $F$ , il rapporto tra la portata d'aria by-passata e quella totale:

$$F \equiv G_{bp} / G$$

Il calore sottratto all'aria umida serve in parte per raffreddarla (calore sensibile) ed in parte per deumidificarla (calore latente). Se si trascura il flusso convettivo d'energia del condensato dal bilancio d'energia discende che:

$$W_{t,tot} \cong G(h_2 - h_1) = W_{t,sens} + W_{t,lat} = G(h_2 - h_3) + G(h_3 - h_1)$$



**Figura 10:** Processo di raffreddamento con deumidificazione.

**ESEMPIO 10.3 – Raffreddamento con deumidificazione**

Una corrente di 0.1 kg/s d'aria umida passa attraverso un deumidificatore avente una batteria di raffreddamento con una temperatura media della superficie esterna di 12 °C e con un fattore di bypass di 0.1. L'aria umida esterna ha una temperatura di 24 °C ed un'umidità relativa del 70 %.

Determinare le condizioni termoigrometriche dell'aria umida in uscita dal deumidificatore e la potenza termica scambiata con la corrente d'aria. Disegnare la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia della corrente d'aria umida in ingresso al deumidificatore possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	<b>24</b>	<b>70</b>	2983	0.0131	57.46

La frazione  $(1 - F_{bp})$  di portata non bypassata esce dal gruppo di raffreddamento ad una temperatura di 12 °C e con un'umidità relativa del 100 %. Se indichiamo con S lo stato

corrispondente a questa frazione di corrente di aria umida, le variabili di stato corrispondenti sono:

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato S	<b>12</b>	<b>100</b>	1401	0.0087	34.13

Il titolo e l'entalpia della corrente totale d'aria umida in uscita dall'umidificatore possono essere determinati considerando che in uscita dal gruppo di refrigerazione avviene un miscelamento tra una portata  $(1-F)G$  con proprietà uguali a quelle dello stato S ed una portata  $F G$  che si trova nelle condizioni 1:

$$\omega_2 = F \omega_1 + (1-F)\omega_S = 0.0091$$

$$h_2 = F h_1 + (1-F)h_S = 36.46 \text{ kJ/kg}$$

La temperatura e l'umidità specifica dello stato 2 valgono:

$$t_2 = \frac{h_2 - 2501.3\omega_2}{1.005 + 1.820\omega_2} = 13.4 \text{ °C}$$

$$\phi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_2 + 0.622} \frac{p}{p_{v,sat}(t_2)} = 95.1 \%$$

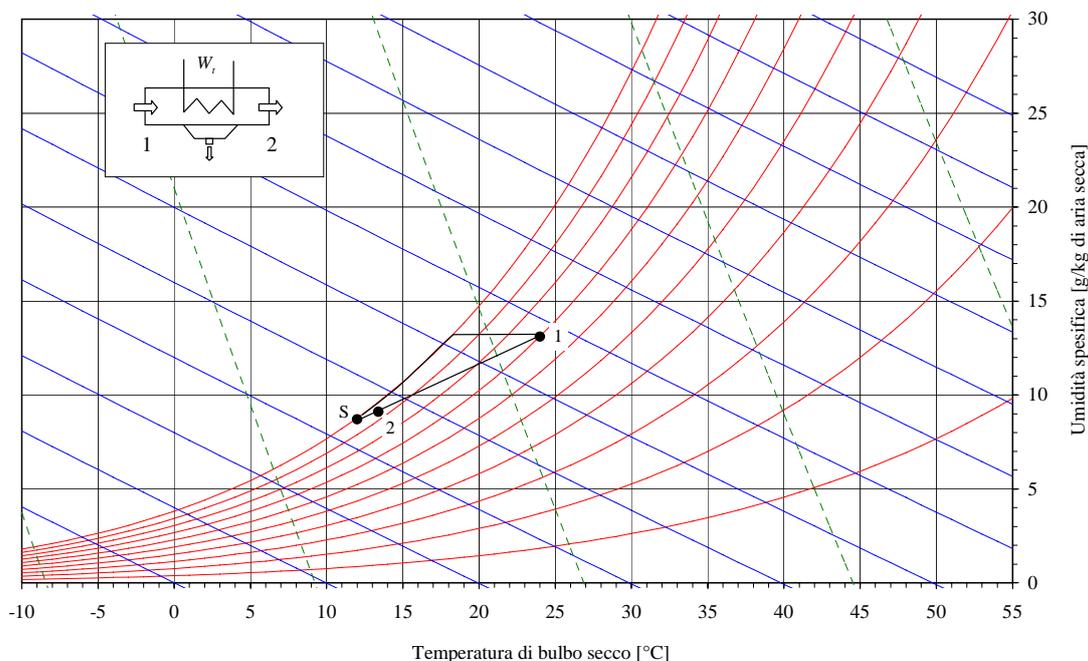
	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 2	13.4	95.1	1535	<b>0.0091</b>	<b>36.46</b>

La potenza termica scambiata con la corrente d'aria umida vale:

$$W_{t,tot} \cong G(h_2 - h_1) = -2.1 \text{ kW}$$

mentre la portata di vapore estratto per condensazione è:

$$G_l = G(\omega_1 - \omega_2) = 0.4 \text{ g/s}$$



**Processo di raffreddamento per evaporazione diretta**

Il solo raffreddamento dell'aria umida si può ottenere anche mediante evaporazione di acqua in fase liquida. L'acqua per evaporare deve assorbire calore latente di evaporazione dall'acqua stessa o dall'aria circostante. Sia l'aria che l'acqua possono raffreddarsi durante il processo di evaporazione. Il raffreddamento per evaporazione è un processo identico alla trasformazione di saturazione adiabatica, eccetto per il fatto che non è detto che l'aria in uscita sia satura. Per questo motivo il processo di raffreddamento per evaporazione viene rappresentato sul diagramma psicrometrico come una linea a temperatura di bulbo umido costante (ciò non è esatto se l'acqua viene spruzzata ad una temperatura diversa da quella di uscita dell'aria). Dal momento che le linee a temperatura di bulbo umido costante sono praticamente coincidenti con quelle ad entalpia costante, si può assumere che anche l'entalpia durante questo processo rimanga costante.

**Processo di riscaldamento con umidificazione**

Nella maggior parte degli impianti di condizionamento invernale dell'aria si richiedono, contemporaneamente, il riscaldamento e l'umidificazione dell'aria trattata. I bilanci della sez. 1-2 sono già stati visti (vedi riscaldamento sensibile) per cui le equazioni di bilancio riportate di seguito sono relative alla sola sezione di umidificazione (2-3)

*Bilancio di massa dell'aria secca nella sezione di umidificazione*

$$G_2 - G_3 = 0 \Rightarrow G_2 = G_3 = G_1 = G$$

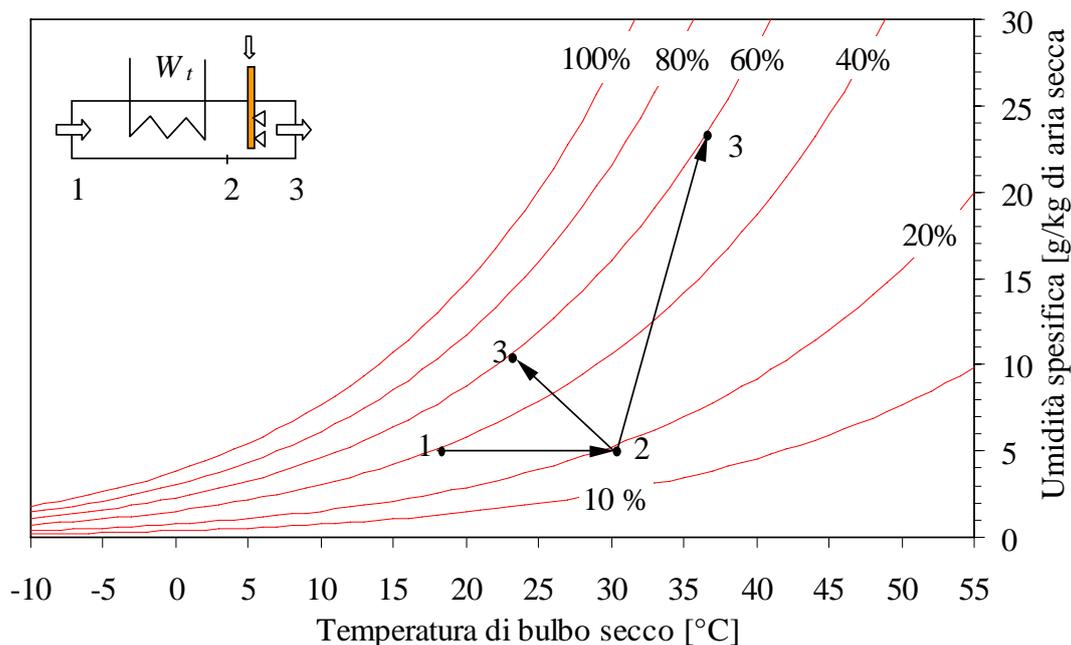
*Bilancio di massa dell'acqua nella sezione di umidificazione*

$$G_2 \omega_2 - G_3 \omega_3 + G_v = 0 \Rightarrow \boxed{G_v = G(\omega_3 - \omega_2) = G(\omega_3 - \omega_1)}$$

*Bilancio di energia dell'aria umida nella sezione di umidificazione*

$$G_2 h_2 - G_3 h_3 + G_v h_v = 0 \Rightarrow \boxed{h_3 = h_2 + (\omega_3 - \omega_2)h_v = h_1 + W_{t,sens} / G + (\omega_3 - \omega_1)h_v}$$

Questo processo è caratterizzato da un aumento di entalpia e di umidità specifica dell'aria trattata. La temperatura finale di bulbo secco ( $T_3$ ) può essere minore, uguale o maggiore di quella iniziale, a seconda del processo di umidificazione. Se si introduce vapore surriscaldato nella sezione di umidificazione, come nell'esempio considerato, si avrà umidificazione (crescita dell'umidità) con contemporaneo riscaldamento. Se l'umidificazione viene realizzata spruzzando acqua nella corrente d'aria, parte del calore latente di evaporazione sarà sottratto all'aria che quindi si raffredda (vedi trasformazione 2-3 riportata in figura 11).



**Figura 11:** Processo di riscaldamento con umidificazione.

**ESEMPIO 10.4 – Riscaldamento con umidificazione**

Una corrente di 0.1 kg/s d'aria umida esterna entra in un condizionatore a 15 °C e al 30 % di umidità relativa ed esce a 24 °C e al 50 % di umidità relativa. Il riscaldamento avviene mediante una resistenza elettrica, mentre l'umidificazione avviene con acqua in fase liquida nebulizzata all'interno della corrente d'aria.

Determinare la potenza termica necessaria per il riscaldamento e la portata massica di liquido necessaria per l'umidificazione. Disegnare, inoltre, la trasformazione termoigrometrica sul diagramma Carrier.

L'umidità specifica e l'entalpia della corrente d'aria umida in ingresso ed in uscita dal condizionatore possono essere determinate facendo uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right) \text{ [Pa]}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

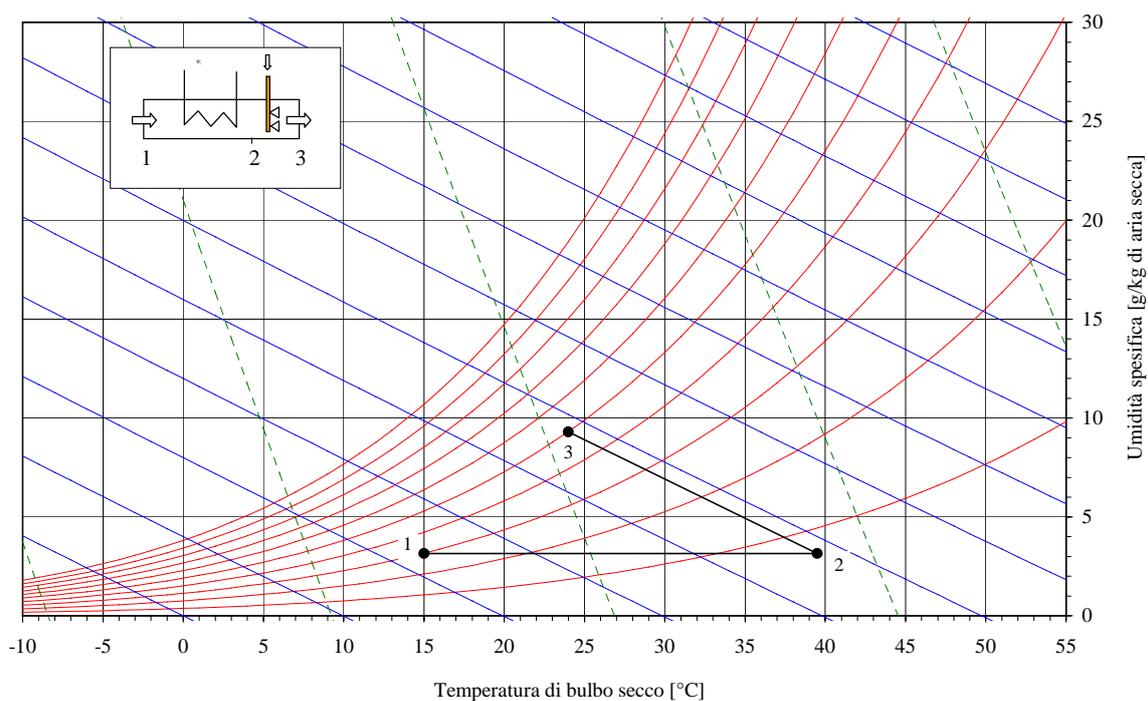
$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \text{ [kJ/kg]}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$H$ [kJ/kg]
stato 1	<b>15</b>	<b>30</b>	1703	0.00315	23.0
stato 3	<b>24</b>	<b>50</b>	2983	0.00929	47.77
stato 2	39.5	7.1	7183	<b>0.00315</b>	<b>47.77</b>

La potenza termica necessaria per il riscaldamento e la portata massica di liquido necessaria per l'umidificazione valgono, rispettivamente:

$$W_t = G(h_2 - h_1) = 2.5 \text{ kW}$$

$$G_l = G(\omega_3 - \omega_2) = 0.61 \text{ g/s}$$



## 6. Torri di raffreddamento

Nel processo di conversione dell'energia termica in energia meccanica degli impianti termoelettrici o nel processo di condizionamento, può risultare necessario smaltire una grande quantità di calore verso l'ambiente esterno. Un metodo per trasferire questo calore all'ambiente esterno è quello di far uso delle **torri di raffreddamento**.

Esistono torri di **raffreddamento a secco** (cioè senza contatto tra il fluido motore dell'impianto e la corrente d'aria esterna, ovvero veri e propri scambiatori a superficie) e torri di **raffreddamento ad umido** (o evaporative) nelle quali il fluido motore dell'impianto (acqua calda) viene in intimo contatto con l'aria esterna. In quest'ultimo caso lo scambio di calore tra l'acqua e l'aria avviene per *evaporazione* di una piccola quantità di acqua e, in misura minore, per *convezione*.

Nelle torri di raffreddamento l'aria circola o per **tiraggio naturale** (in questo caso le torri sono a profilo iperbolico e di grande altezza) o per **tiraggio forzato** (in questo caso le torri sono normalmente di forma cilindrica). L'acqua calda generalmente è immessa dall'alto in controcorrente e atomizzata con spruzzatori oppure distribuita per gravità su di una serie di graticci per favorirne il contatto con l'aria immessa dal basso.

*Bilancio di massa dell'aria secca*

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

*Bilancio di massa dell'acqua*

$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 + G_3 - G_4 = 0 \Rightarrow \boxed{G_4 = G_3 - G(\omega_2 - \omega_1)}$$

*Bilancio di energia dell'aria umida + goccioline di liquido*

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 + G_3 h_3 - G_4 h_4 = 0 \Rightarrow \boxed{G = \frac{G_3 (h_4 - h_3)}{(h_1 - h_2) + (\omega_2 - \omega_1) h_4}}$$

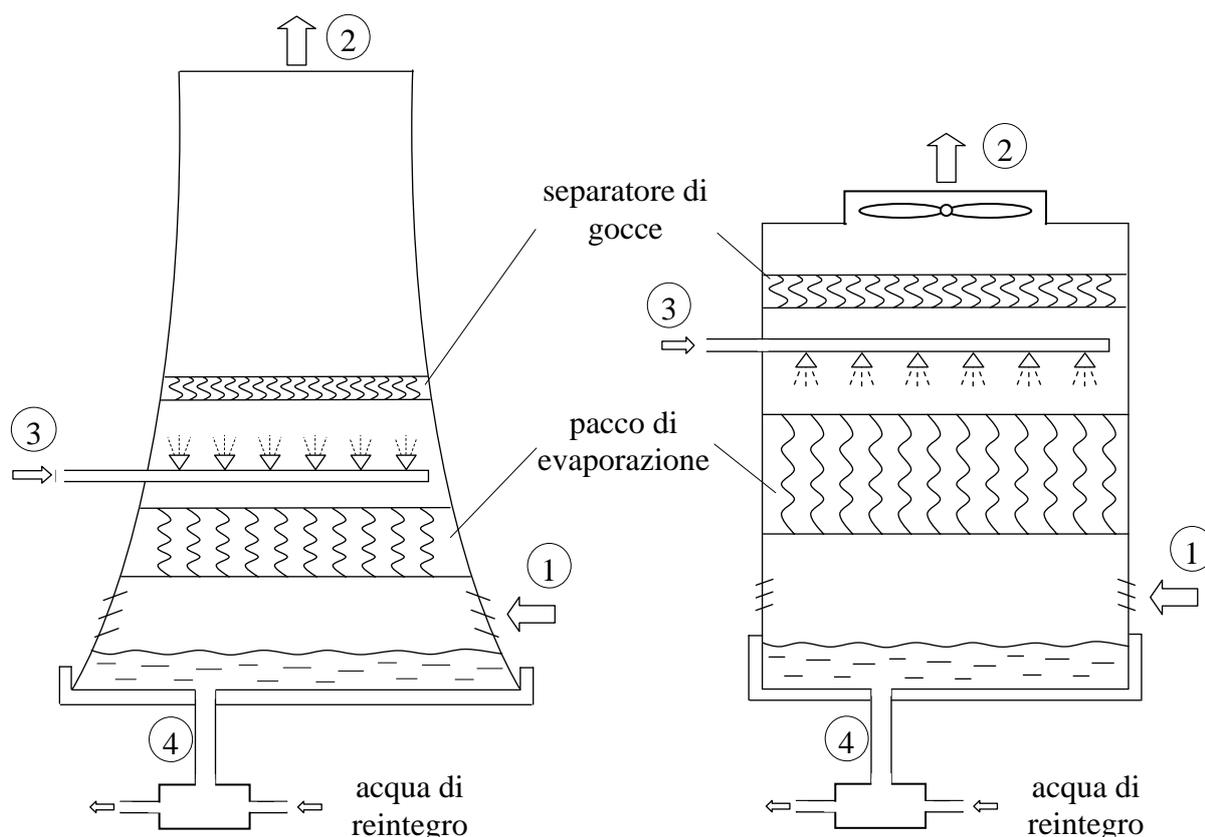
Il consumo di acqua dovuto all'evaporazione in seno all'aria è dato da:

$$\boxed{G_3 - G_4 = G(\omega_2 - \omega_1)}$$

E' importante notare che la temperatura minima alla quale si può avere l'acqua in uscita dalla torre evaporativa è la temperatura *di bulbo umido* dell'aria umida in ingresso (la torre in questo caso si comporterebbe come un saturatore adiabatico). In una torre a secco la temperatura minima di uscita dell'acqua è invece uguale a quella *di bulbo asciutto* dell'aria in ingresso e quindi (tranne nel caso d'aria satura) superiore alla precedente.

E' possibile definire l'*efficienza* ( $\varepsilon$ ) di una torre di raffreddamento ad umido come il rapporto tra la potenza termica effettivamente sottratta all'acqua e quella massima sottraibile teoricamente:

$$\boxed{\varepsilon \equiv \frac{W_t}{W_{t,\max}} \cong \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_{bu,1}}}$$



**Figura 12:** Torre di raffreddamento a circolazione naturale (a sinistra) ed a circolazione forzata (a destra).

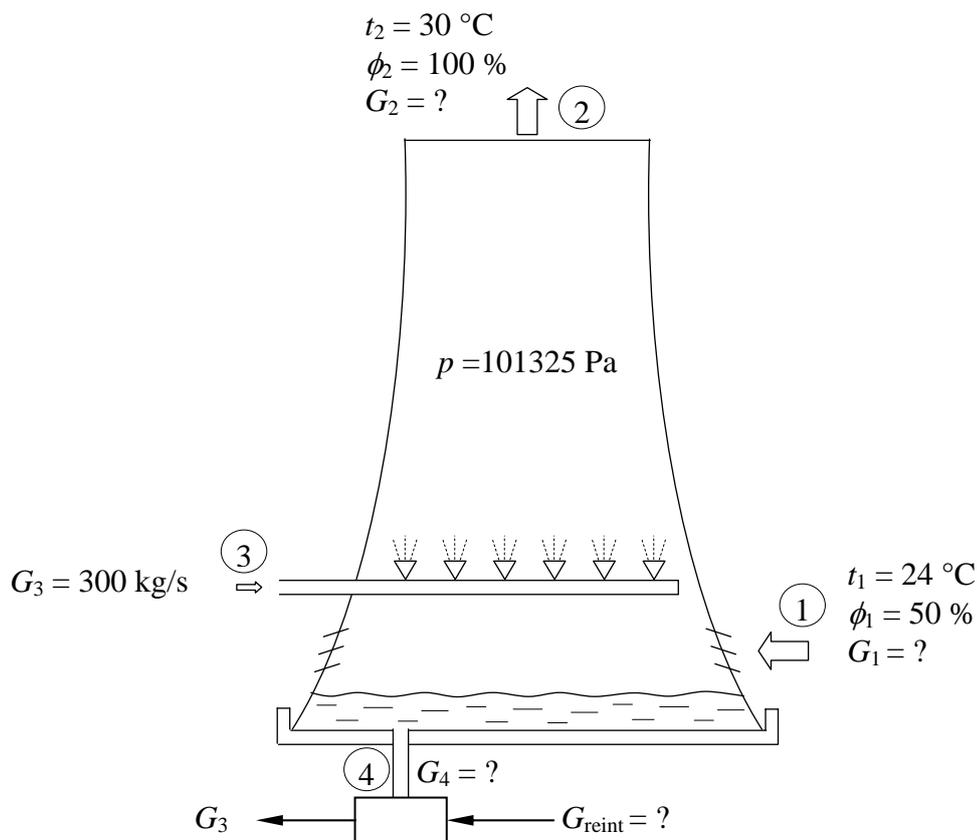
### **ESEMPIO 10.5 – Torre di raffreddamento**

L'acqua uscente dal condensatore di una centrale termoelettrica è inviata ad una serie di torri refrigerative a circolazione naturale. L'aria entra in ciascuna torre con temperatura di bulbo secco e con umidità relativa di 24 °C e 50 %, rispettivamente, e fuoriesce in condizioni di saturazione alla temperatura di 30 °C (vedi figura). La portata massica dell'acqua inviata a ciascuna torre evaporativa è pari a 300 kg/s.

Nell'ipotesi che il processo sia stazionario e che la pressione dell'aria umida nella torre sia 101325 Pa, si calcoli la portata massica d'aria che attraversa la torre e la portata massica di acqua necessaria per il reintegro nei seguenti tre casi:

- l'acqua viene inviata a ciascuna torre con temperatura di 35 °C e fuoriesce con temperatura pari a 23 °C;
- l'acqua viene inviata a ciascuna torre con temperatura di 32 °C e fuoriesce con una temperatura pari a 23 °C;
- l'acqua viene inviata a ciascuna torre con temperatura di 35 °C e fuoriesce con una temperatura pari a 18 °C.

Si valuti inoltre l'efficienza della torre di refrigerazione nei tre casi suddetti.



- a) L'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida in ingresso ed in uscita dalla torre di raffreddamento può essere determinata mediante le seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \quad [\text{kJ/kg}]$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	<b>24</b>	<b>50</b>	2983	0.00929	47.77
stato 2	<b>30</b>	<b>100</b>	4246	0.02720	99.7

Le entalpie specifiche dell'acqua in ingresso ed in uscita dalla torre di refrigerazione valgono rispettivamente:

$$h_3 = 4.186 t_3 = 146.5 \text{ kJ/kg}$$

$$h_4 = 4.186 t_4 = 96.3 \text{ kJ/kg}$$

La portata d'aria in ingresso alla torre può essere determinata mediante la seguente formula:

$$G = \frac{G_3(h_4 - h_3)}{(h_1 - h_2) + (\omega_2 - \omega_1)h_4} = 300 \text{ kg/s}$$

La portata di liquido da reintegrare

$$G_3 - G_4 = G(\omega_2 - \omega_1) = 5.4 \text{ kg/s}$$

Come si può notare bisogna reintegrare solo il 2 % circa della portata di liquido inviata alla torre.

L'efficienza della torre di refrigerazione ad umido può essere valutata con la seguente formula approssimata:

$$\varepsilon \equiv \frac{W_t}{W_{t,\max}} \cong \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_{bu,1}} = \frac{35 - 23}{35 - 17.1} = 67 \%$$

Per il caso b) ed il caso c) si procede in modo analogo a quanto visto precedentemente.

### **ESEMPIO 10.6 – Torre di raffreddamento**

L'acqua uscente dal condensatore di una piccola centrale termoelettrica è inviata ad una serie di torri refrigerative a circolazione forzata. L'aria entra in ciascuna torre con temperatura di bulbo secco e con umidità relativa di 25 °C e 50 %, rispettivamente, e fuoriesce alla temperatura di 30 °C e con un'umidità relativa del 98 %.

La portata massica dell'acqua inviata a ciascuna torre evaporativa è pari a 50 kg/s, mentre la sua temperatura è di 35 °C. La temperatura di uscita dell'acqua dalla torre è uguale a quella di ingresso dell'aria.

Si calcoli:

1. la portata massica d'aria che attraversa la torre;
2. la portata massica di acqua necessaria per il reintegro nell'ipotesi che la temperatura dell'acqua in uscita dalla torre sia uguale alla temperatura dell'aria in ingresso alla torre;
3. l'efficienza della torre di refrigerazione;
4. la potenza termica che l'aria umida scambia con per sola convezione con le goccioline di liquido durante la loro discesa.

(Si supponga il processo stazionario e si assuma la pressione dell'aria umida nella torre uguale a 101325 Pa; inoltre, nel bilancio energetico si trascuri la potenza meccanica del ventilatore)

L'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida in ingresso ed in uscita dalla torre di raffreddamento possono essere determinate mediante le seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,\text{sat}}}{p - \phi p_{v,\text{sat}}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \quad [\text{kJ/kg}]$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,\text{sat}}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	<b>25</b>	<b>50</b>	3167	0.009876	50.3
stato 2	<b>30</b>	<b>98</b>	4243	0.026620	98.2

Le entalpie specifiche dell'acqua in ingresso ed in uscita dalla torre di refrigerazione valgono rispettivamente:

$$h_3 = 4.186 t_3 = 146.5 \text{ kJ/kg}$$

$$h_4 = 4.186 t_4 = 104.7 \text{ kJ/kg}$$

La portata d'aria in ingresso alla torre può essere determinata mediante la seguente formula:

$$G = \frac{G_3(h_4 - h_3)}{(h_1 - h_2) + (\omega_2 - \omega_1)h_4} = 45.3 \text{ kg/s}$$

La portata di liquido da reintegrare

$$G_3 - G_4 = G(\omega_2 - \omega_1) = 0.76 \text{ kg/s}$$

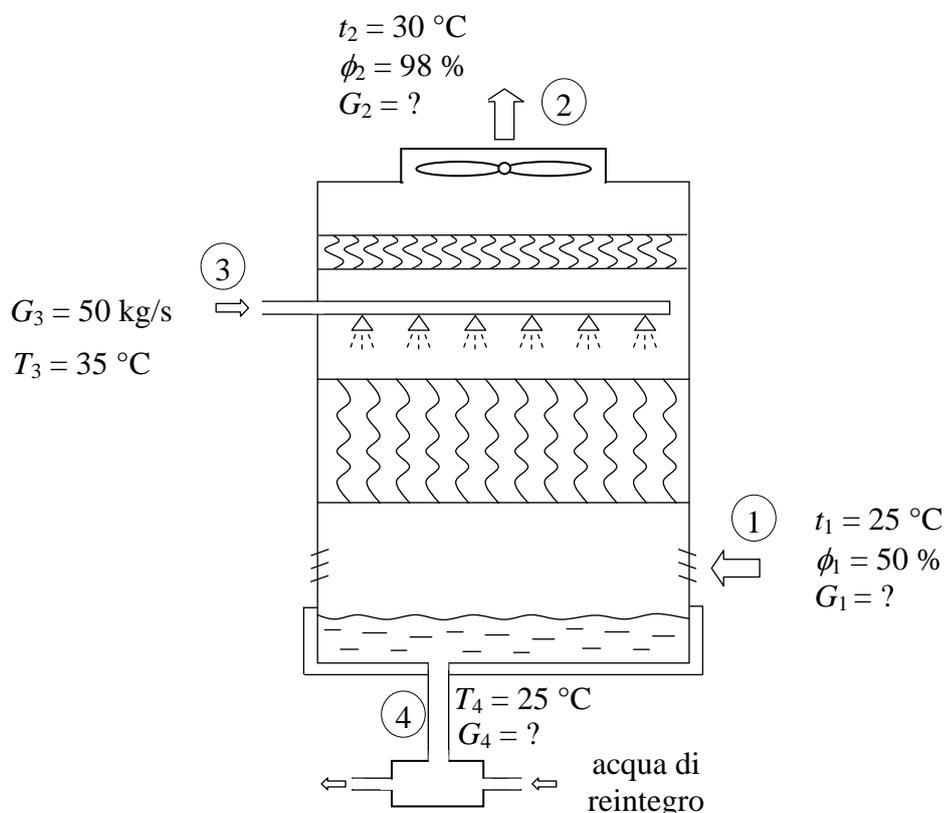
Come si può notare bisogna reintegrare solo il 1.5 % circa della portata di liquido inviata alla torre.

L'efficienza della torre di refrigerazione ad umido può essere valutata con la seguente formula approssimata:

$$\varepsilon \equiv \frac{W_t}{W_{t,\max}} \cong \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_{bu,1}} = \frac{35 - 25}{35 - 17.89} = 58.4 \%$$

Eseguendo il bilancio dell'energia per le sole goccioline di liquido in caduta all'interno della torre si ricava:

$$W_{t,\text{conv}} = G_3 h_3 - G_4 h_4 - (G_3 - G_4) h_v = 231.6 \text{ kW}$$

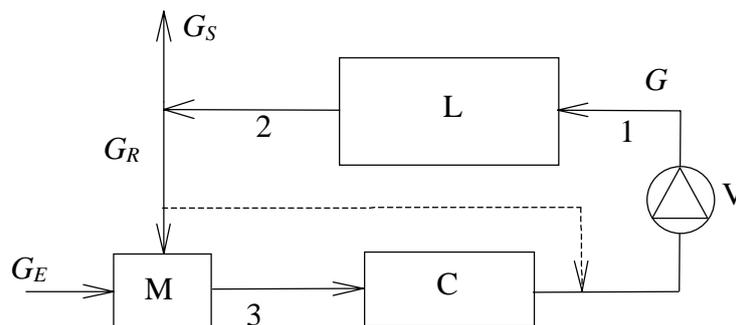


## 7. Impianto di condizionamento dell'aria (°)

Il benessere umano dipende principalmente da tre fattori: la temperatura di bulbo secco ( $20 \div 26$  °C), l'umidità relativa ( $40 \div 60$  %) e la ventilazione ( $0.05 \div 0.3$  m/s).

Lo scopo di un impianto di condizionamento è quello di mantenere in un locale i parametri ambientali (temperatura, umidità relativa, velocità e purezza dell'aria) a valori ottimali per l'uomo (condizionamento di tipo civile) o per particolari processi tecnologici (condizionamento di tipo industriale). Lo schema base di un impianto di condizionamento dell'aria è quello riportato in figura 13 (condizionamento di un solo locale) dove:

- **L** è il locale condizionato dall'impianto ed all'interno del quale si vogliono mantenere certe condizioni ottimali; le condizioni dell'aria umida in uscita da L (stato 2) si suppongono uguali a quelle dell'ambiente all'interno del locale condizionato (condizioni di progetto).
- in **M** (Miscelatore) l'aria di ricircolo  $G_R$  viene miscelata con quella esterna  $G_E$  in modo approssimativamente adiabatico;
- in **C** (Condizionatore) l'aria è sottoposta ai trattamenti (ad es. refrigerazione con deumidificazione);
- **V** è il ventilatore che permette la circolazione dell'aria attraverso il circuito; dato che esso assorbe una piccola potenza, il suo contributo al bilancio energetico viene generalmente trascurato.



**Figura 13:** Schema di un impianto di condizionamento.

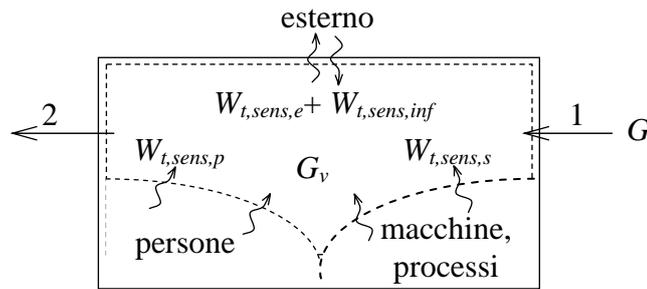
La progettazione di un impianto di condizionamento, una volta fissate le condizioni di temperatura e umidità relativa ottimali per il locale (condizioni interne di progetto), può dividersi in quattro fasi, descritte più in dettaglio nel seguito.

- FASE 1: determinazione dei cosiddetti "carichi termici" ovvero degli scambi energetici tra il locale (sistema) e l'esterno;
- FASE 2: determinazione delle condizioni dell'aria in ingresso al locale (stato 1), cioè determinazione della portata, della temperatura, dell'umidità relativa e della purezza dell'aria da immettere nel locale per mantenere in esso le condizioni di progetto (condizioni ottimali);
- FASE 3: individuazione di tutti i processi cui deve essere sottoposta l'aria per portarla nelle condizioni precisate nella fase 1;
- FASE 4: dimensionamento della rete dei condotti di distribuzione dell'aria; scelta delle apparecchiature atte a realizzare i processi definiti nella fase 2; scelta dei sistemi di

controllo e di regolazione dell'impianto (questa fase esula dagli scopi del corso e non viene trattata nel seguito).

**FASE 1 – Determinazione dei carichi termici**

Un locale da sottoporre a condizionamento è un sistema aperto schematizzabile come in figura 14. Le condizioni dello stato 2 si suppongono uguali a quelle dell'ambiente all'interno del locale condizionato, fissate in precedenza.



**Figura 14:** Interazione tra il locale condizionato e l'ambiente.

Il **carico sensibile totale ambiente**,  $W_{t,sens}$ , può pensarsi somma di quattro termini

$$W_{t,sens} = W_{t,sens,e} + W_{t,sens,p} + W_{t,sens,s} + W_{t,sens,inf}$$

i quali hanno il seguente significato:

- il primo termine,  $W_{t,sens,e}$  ( $>0$  in estate e  $<0$  in inverno), rappresenta la potenza termica scambiata dall'ambiente con l'esterno attraverso le pareti opache o trasparenti:

$$W_{t,sens,e} = \sum_i u_i A_i (t_{e,i} - t_2);$$

- il secondo termine,  $W_{t,sens,p}$  ( $>0$  sempre), rappresenta la potenza termica prodotta dalle persone presenti nel locale:

$$W_{t,sens,p} = N \dot{q}_p$$

$$\left( \begin{array}{l} (\dot{q}_p)_{\min} \cong 60 \text{ W/persona in estate e } (\dot{q}_p)_{\min} \cong 80 \text{ W/persona in inverno} \\ (\dot{q}_p)_{\max} \cong 200 \text{ W/persona} \end{array} \right);$$

- il terzo termine,  $W_{t,sens,s}$  ( $>0$  sempre), rappresenta la potenza prodotta da eventuali sorgenti presenti nell'ambiente (impianti di illuminazione, computers, ecc.);
- il quarto termine rappresenta la potenza termica sensibile connessa alle infiltrazioni di aria esterna:

$$W_{t,sens,e} = G_{inf} c_{p,a} (t_e - t_2)$$

dove  $G_{inf}$  è la portata massica di aria che entra nel locale a causa delle infiltrazioni.

Il **carico latente totale ambiente**,  $W_{t,lat}$ , è definito come:

$$W_{t,lat} = G_v h_v$$

dove  $h_v$  è l'entalpia specifica del vapore alla temperatura dell'ambiente ( $\cong 2550$  kJ/kg) e  $G_v$  rappresenta la portata di vapore immessa nell'ambiente, data dalla somma di tre termini:

$$G_v = N g_v + G_{processi} + G_{inf} (\omega_e - \omega_2) \quad (g_v \cong 40 \div 400 \text{ g/(h persona)})$$

Il **carico totale ambiente**, somma del carico sensibile e di quello latente è quindi dato da:

$$W_{t,tot} = W_{t,sens} + W_{t,lat} = W_{t,sens} + G_v h_v$$

### **FASE 2 – Determinazione della portata e delle condizioni dell'aria in ingresso**

Per determinare la portata e le condizioni termoigrometriche dell'aria in ingresso al locale è necessario risolvere le equazioni di bilancio relative al locale condizionato.

*Bilancio di massa dell'aria secca*

$$G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow G_1 = G_2 = G$$

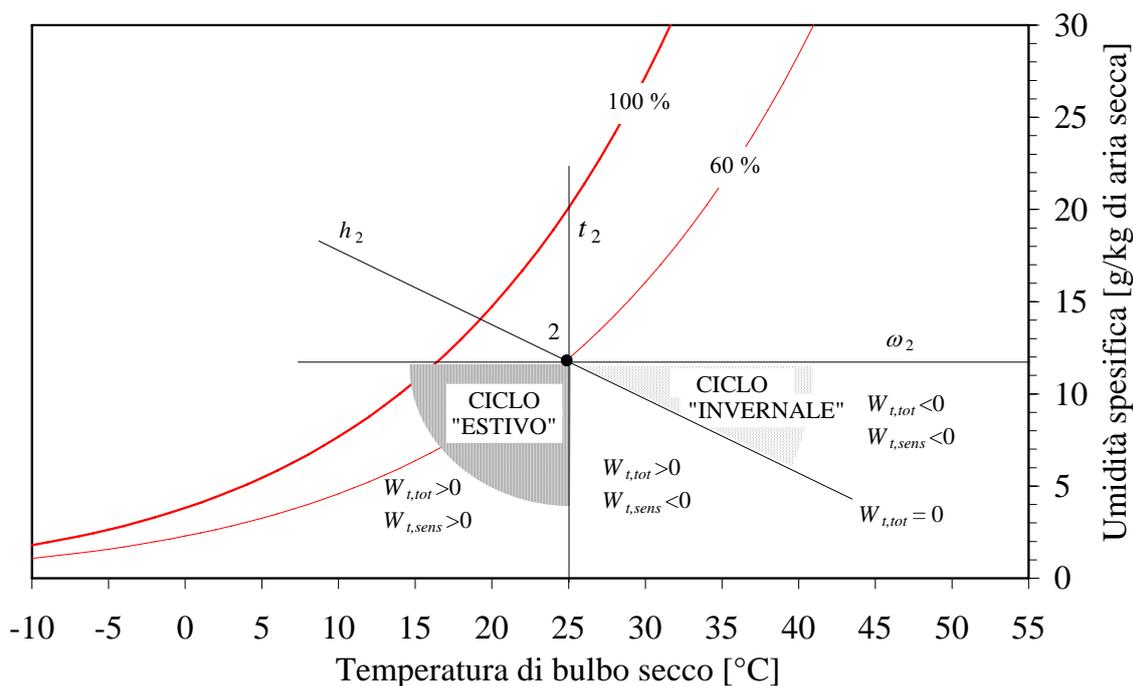
*Bilancio di massa dell'acqua*

$$G_1 \omega_1 - G_2 \omega_2 + G_v = 0 \Rightarrow G = G_v / (\omega_2 - \omega_1)$$

*Bilancio di energia dell'aria umida*

$$G_1 h_1 - G_2 h_2 + G_v h_v + W_{t,sens} = 0 \Rightarrow \frac{h_2 - h_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{W_{t,sens}}{G_v} + h_v = \frac{W_{t,tot}}{G_v} = m$$

Essendo generalmente  $G_v > 0$  ed essendo  $G$  sempre positivo, dal bilancio di massa risulta che  $\omega_1 < \omega_2$ . Dal bilancio dell'energia risulta che in estate, essendo  $W_{t,tot} > 0$ , si ha  $h_1 < h_2$ , mentre in inverno si ha, generalmente,  $h_1 > h_2$ . Inoltre, in estate occorrerà immettere aria nel locale a temperatura di bulbo secco  $t_1 < t_2$ , mentre in inverno si vorrà che avvenga il contrario. Da quanto osservato precedentemente risulta che lo stato 1, dell'aria umida in ingresso al locale, si trova sempre al di sotto dello stato 2 nel diagramma psicrometrico. Inoltre esso *generalmente* va scelto nella regione scura per il ciclo "estivo" o nella regione più chiara per il ciclo "invernale" (vedi figura 15). La zona intermedia corrisponde ad un caso in cui il locale cede calore sensibile all'esterno ( $W_{t,sens} < 0$ ) ma il carico totale risulta positivo ( $W_{t,tot} > 0$ ) a causa del carico latente più elevato; tali condizioni sono inusuali, ma possono verificarsi, ad esempio, nella stagione invernale in locali con grande produzione di vapore al loro interno.



**Figura 15:** Trasformazioni dell'aria in un locale condizionato.

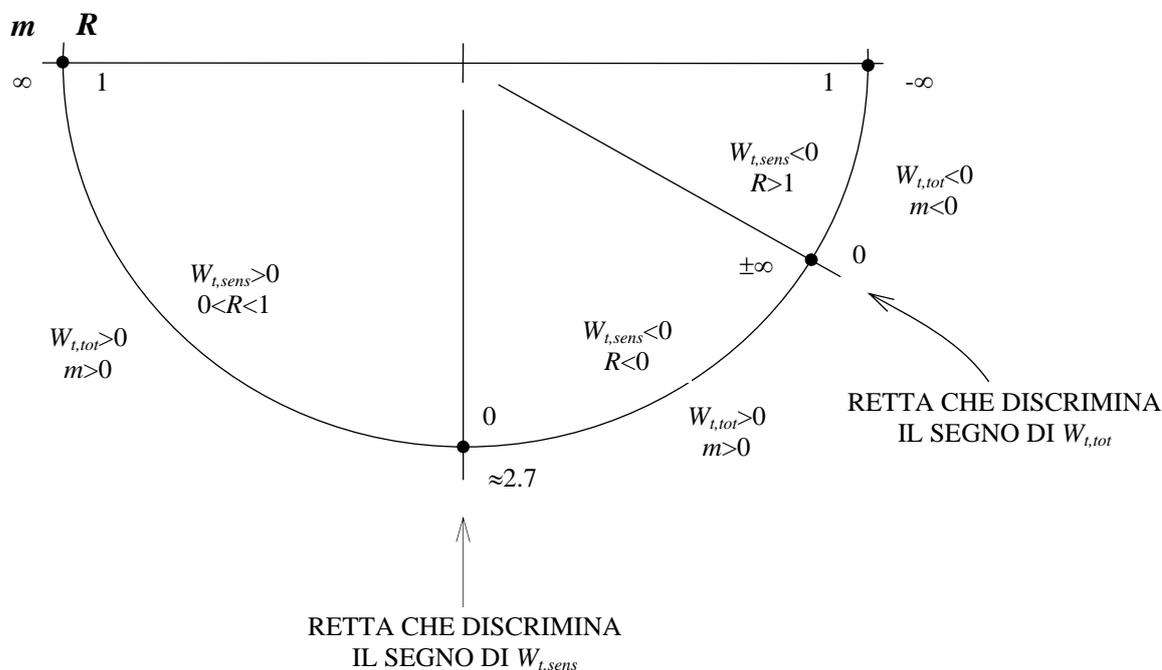
La retta passante per i punti 1 e 2 viene detta **retta di lavoro**. La retta di lavoro può essere facilmente disegnata una volta noto il suo coefficiente angolare,  $m$ , definito precedentemente (rispetto ad un diagramma ad assi obliqui  $\omega$ - $h$ ) o sulla base della conoscenza del **fattore termico** ambientale,  $R$  (o  $RST$ ), definito come:

$$R \equiv \frac{W_{t,sens}}{W_{t,tot}} = 1 - \frac{W_{t,lat}}{W_{t,tot}} = 1 - \frac{h_v}{m}$$

Se il fattore termico è ad esempio 0.8 si ha che il carico è costituito dall'80 % di calore sensibile e dal 20 % di calore latente. Quando il valore del fattore termico è 1 la retta di lavoro è orizzontale, cioè il carico termico è dato dal solo calore sensibile. Se  $R = \infty$  ( $W_{t,sens} = -W_{t,lat}$ ) la trasformazione diventa una isoentalpica (saturazione adiabatica). Quando  $R = 0$  il carico termico è costituito dal solo carico latente e la retta di lavoro è quindi verticale.

Nel caso si disponga del diagramma Carrier la direzione della retta di lavoro può essere individuata facendo passare una retta per il **punto base** del diagramma psicrometrico e per il valore del fattore termico,  $R$ , riportato sulla relativa scala a destra del diagramma. Se si dispone, invece, del diagramma ASHRAE la direzione della retta di lavoro può essere individuata servendosi della scala a forma di semicerchio riportata in alto a sinistra (lo schema e gli intervalli significativi sono mostrati nella figura 16). In questo caso, per disegnare la retta avente direzione uguale alla retta di lavoro si può utilizzare indifferentemente o il fattore termico,  $R$ , o il coefficiente angolare,  $m$ .

Il fattore termico offre dunque un'immagine delle condizioni termoigrometriche dell'ambiente e permette di individuare le condizioni da conferire all'aria in ingresso al locale per il mantenimento delle volute condizioni di progetto del locale.



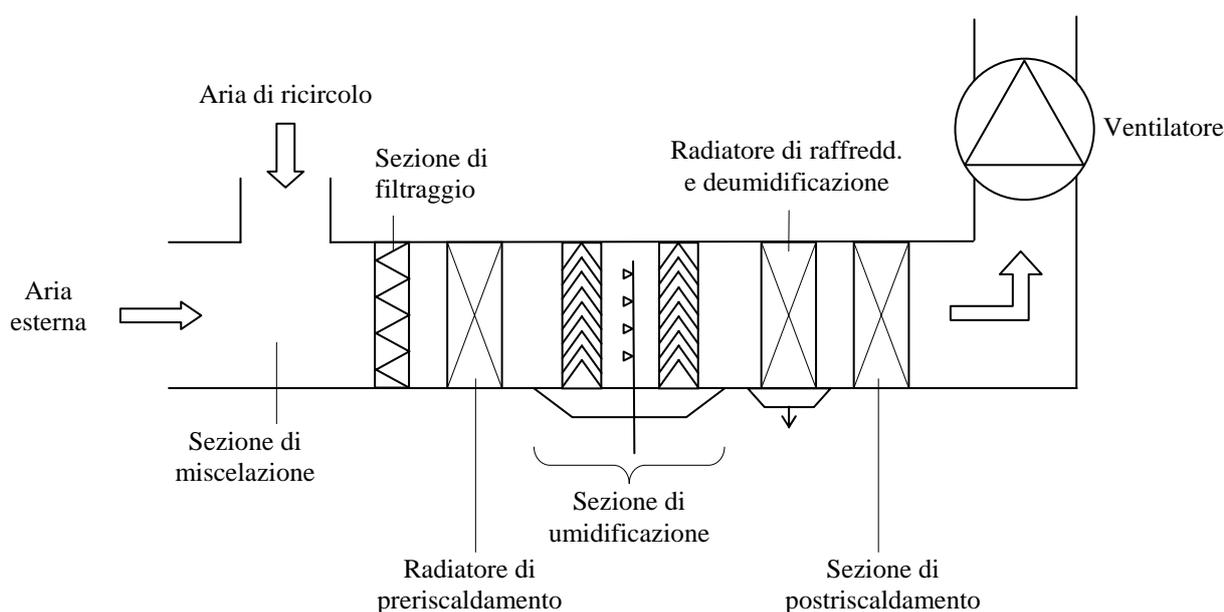
**Figura 16:** Scala graduata per l'individuazione della direzione della retta di lavoro nel diagramma ASHRAE.

### Schema di calcolo per le fasi 1 e 2

1. Si fissano le condizioni che voglio mantenere nel locale da condizionare (in estate si ha tipicamente  $t_2 = 26 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $\phi_2 = 50 \%$ , mentre in inverno si ha  $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $\phi_2 = 50 \%$ ).
2. Si esegue il calcolo dei carichi termici e cioè si trovano le sorgenti termiche e massiche ( $W_{t,sens}$ ,  $W_{t,lat}$ ,  $G_v$ ).
3. Si traccia la retta di lavoro passante per lo stato 2 (noto) la cui inclinazione è individuabile sul diagramma psicrometrico una volta noto  $m$  o  $R$ .
4. Si fissa lo stato 1 sulla retta di lavoro in modo che risulti  $t_2 - t_1 \leq 8 \div 12 \text{ }^\circ\text{C}$  (estate) o  $t_1 - t_2 \leq 12 \div 20 \text{ }^\circ\text{C}$  (inverno) e si ricava la portata d'aria  $G = G_v / (\omega_2 - \omega_1)$ . Lo stato 1 dell'aria umida deve essere scelto tra i punti della retta di lavoro che cadono nelle corrette regioni di interesse. Inoltre, il punto 1 non deve essere scelto né troppo vicino al punto 2, perché altrimenti la portata d'aria  $G = G_v / (\omega_2 - \omega_1)$  risulterebbe troppo grande, né troppo lontana da 2, perché potrebbe aversi un notevole shock termico nella regione nella quale viene immessa la portata d'aria.

### FASE 3 – Trattamenti dell'aria nel gruppo di condizionamento

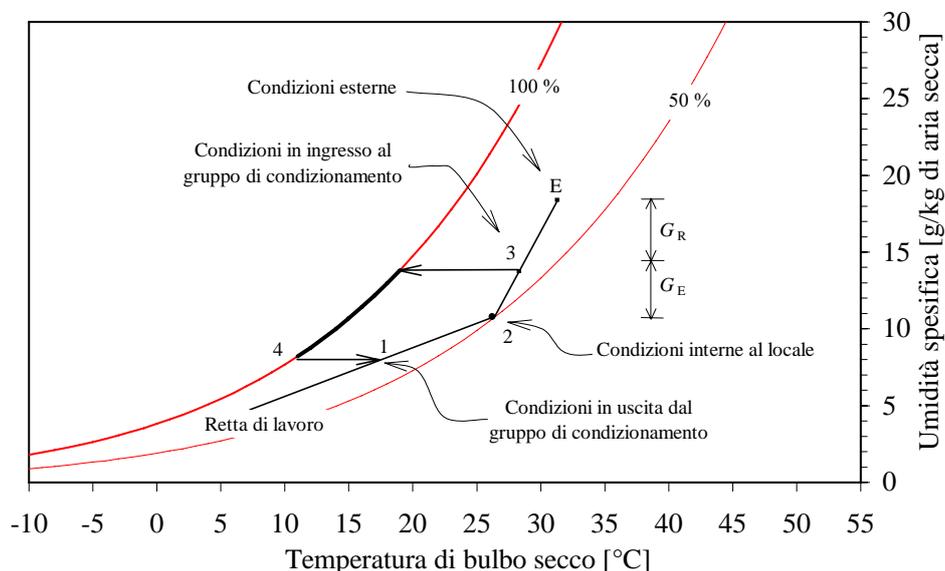
1. Si calcola la portata d'aria esterna  $G_E$  che è necessario rinnovare: per ragioni igieniche è necessario prevedere una portata di reintegro per ogni persona che occupa mediamente il locale cioè  $G_E = N g_E$  in cui  $N$  è il numero di persone, mentre  $g_E$  è la portata esterna di rinnovo per persona ( $18 \div 60$  kg/(h persona)). In tal modo rimane automaticamente determinata la portata di ricircolo,  $G_R = G - G_E$ , e la portata di scarico,  $G_S = G_E$ . In ambienti industriali il valore di  $G_E$  può essere stabilito con criteri diversi a seconda dei processi che avvengono (ad es.: essiccazione, rimozione di sostanze pericolose per la salute, ecc.).
2. Si individua sul diagramma psicrometrico il punto rappresentativo delle condizioni esterne (punto E nei due grafici di figura 18 e 19) e si determina lo stato 3 in corrispondenza del quale si troverà l'aria umida in uscita dal miscelatore ed in ingresso al gruppo di condizionamento; la posizione di tale punto varia con la stagione.
3. A questo punto rimane da identificare il processo 3-4-1 che, generalmente, corrisponde ad un raffreddamento con deumidificazione + riscaldamento nel caso "estivo", mentre corrisponde ad un riscaldamento + deumidificazione nel caso "invernale". La distinzione tra il caso di ciclo "estivo" ed il caso di ciclo "invernale" è comunque convenzionale. Infatti, nella stagione invernale nei locali molto affollati si può avere, a causa del contributo del carico termico delle persone,  $W_{t,sens} > 0$ , ovvero condizioni "estive".



**Figura 17:** Schema di un gruppo di condizionamento per ciclo estivo ed invernale (impianto a tutt'aria con ricircolo).

- **Calcolo termico "estivo" ( $W_{t,tot} > 0$  e  $W_{t,sens} > 0$ )**

In questo caso l'aria nel gruppo di condizionamento viene sottoposta prima al processo di raffreddamento con deumidificazione (3-4, per semplicità si è supposto nullo il fattore di bypass dell'aria) e poi a riscaldamento (4-1).

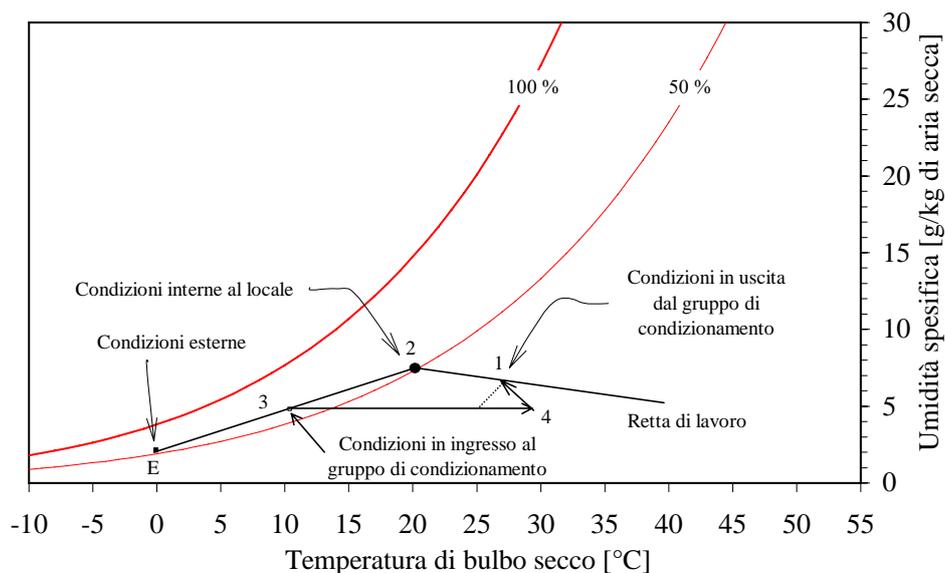


**Figura 18:** Processo di condizionamento, caso “estivo”.

In alcuni casi è possibile evitare il post-riscaldamento (4-1) sfruttando il bypass dell'aria di ricircolo.

- **Calcolo termico "invernale" ( $W_{t,tot} < 0$  e  $W_{t,sens} < 0$ )**

In questo caso l'aria nel gruppo di condizionamento viene sottoposta prima al processo di riscaldamento sensibile (3-4) e poi all'umidificazione (4-1).



**Figura 19:** Processo di condizionamento, caso “invernale”.

**ESEMPIO 10.7 – Condizionamento estivo**

Il carico termico sensibile relativo ad un capannone di una piccola industria è pari 50000 kcal/h, mentre il fattore termico è pari a 0.6. All'interno del capannone si vuole mantenere una temperatura di 25 °C con un'umidità relativa del 60 %, mentre la temperatura dell'aria esterna è di 30 °C con un'umidità relativa del 70 %.

Tenendo conto che nel capannone lavorano 72 persone e che è necessario una portata di rinnovo d'aria pari a 50 kg/(h persona), si realizzi un impianto di condizionamento in grado di mantenere l'ambiente nelle condizioni di progetto.

Si determinino:

- le condizioni termoigrometriche e la portata massica dell'aria umida in ingresso al locale;
- le condizioni termoigrometriche e la portata massica dell'aria umida in ingresso al gruppo di condizionamento;
- la potenza termica che il gruppo di condizionamento deve scambiare con l'esterno.

Si disegni inoltre sul diagramma di Carrier il processo di condizionamento subito dall'aria all'interno dell'impianto.

Si tratta di un tipico caso di condizionamento estivo. I dati di progetto e le condizioni dell'aria esterna al locale ci permettono di ricavare i valori dei principali parametri termoigrometrici degli stati 2 ed E, attraverso l'uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right)$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{vsat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 2	<b>25</b>	<b>60</b>	3167	0.0119	55.40
stato E	<b>30</b>	<b>70</b>	4243	0.0188	78.16

Gli scambi termici tra il locale e l'esterno, con le appropriate unità di misura, valgono:

$$W_{t,sens} = 58.14 \text{ kW}; \quad W_{t,lat} = \frac{W_{t,sens}}{R} - W_{t,sens} = 38.76 \text{ kW}$$

La portata di vapore immessa nell'aria umida, contenuta nel locale, dalle persone e/o dalle macchine e dai processi vale:

$$G_v = \frac{W_{t,lat}}{h_v} = 0.015 \text{ kg/s}$$

A questo punto si può passare alla fase 2 descritta nel paragrafo 7, cioè alla determinazione delle condizioni dell'aria in ingresso al locale. A tale scopo scegliamo un valore dell'umidità specifica dello stato 1 pari a 0.010. Utilizzando le equazioni di bilancio per il locale si può ricavare la portata massica e l'entalpia dell'aria, proveniente dal gruppo di condizionamento, da immettere nel locale

$$G = G_v / (\omega_2 - \omega_1) = 8.0 \text{ kg/s}$$

$$\frac{h_2 - h_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{W_{t,tot}}{G_v} \Rightarrow h_1 = h_2 - \frac{W_{t,tot}}{G_v} (\omega_2 - \omega_1) = 43.36 \text{ kJ/kg}$$

Nota l'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida da immettere nel locale, mediante le formule introdotte nel paragrafo 1 (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico) è possibile ricavare tutte le altre proprietà termoigrometriche dello stato 1:

$$h = h_a + h_v, \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \Rightarrow t_1 = \frac{h_1 - 2501.3\omega_1}{1.005 + 1.82\omega_1}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}} \Rightarrow \phi_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1 + 0.622} \frac{p}{p_{v,sat}(t_1)}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{vsat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	17.9	77.8	2054	<b>0.010</b>	<b>43.36</b>

A questo punto si può passare alla fase 3 descritta nel paragrafo 7, cioè all'individuazione dei trattamenti dell'aria nel gruppo di condizionamento. La portata d'aria esterna che bisogna miscelare con la portata dell'aria di ricircolo al fine di mantenere una buona qualità dell'aria all'interno del locale vale:

$$G_E = N g_E = 1 \text{ kg/s}$$

La portata di ricircolo sarà quindi data dalla differenza tra la portata d'aria in ingresso al locale e la portata di reintegro:

$$G_R = G - G_E = 7.0 \text{ kg/s}$$

Nel miscelatore avverrà il miscelamento tra una portata d'aria umida  $G_R$  nello stato 2 ed una portata  $G_E$  nello stato E. L'aria in uscita dal miscelatore si troverà nello stato 3 individuato dalle variabili ottenute mediante le seguenti equazioni:

$$\omega_3 = \frac{G_E \omega_E + G_R \omega_2}{G} = 0.0127$$

$$h_3 = \frac{G_E h_E + G_R h_2}{G} = 58.23 \text{ kJ/kg}$$

Nota l'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida da immettere nel locale è possibile ricavare tutte le altre proprietà termoigrometriche dello stato 3:

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{vsat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 3	25.6	61.8	3288	<b>0.0127</b>	<b>58.23</b>

Per passare dallo stato 3 allo stato 1 nel gruppo di condizionamento l'aria umida viene sottoposta a raffreddamento con deumidificazione + riscaldamento (vedi diagramma psicrometrico riportato in basso). Lo stato 4, raggiunto al termine del processo di raffreddamento con deumidificazione, possiede un'umidità specifica uguale a quello dello stato 1 ed un'umidità relativa del 100 %. Possono quindi essere ricavati tutti gli altri parametri termoigrometrici (vedi tabella seguente).

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{vsat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
--	----------	------------	-----------------	--------------	-------------

stato 4	14.05	<b>100</b>	1602	<b>0.010</b>	39.44
---------	-------	------------	------	--------------	-------

L'aria umida nel processo di raffreddamento con deumidificazione scambia con l'esterno una potenza termica data da:

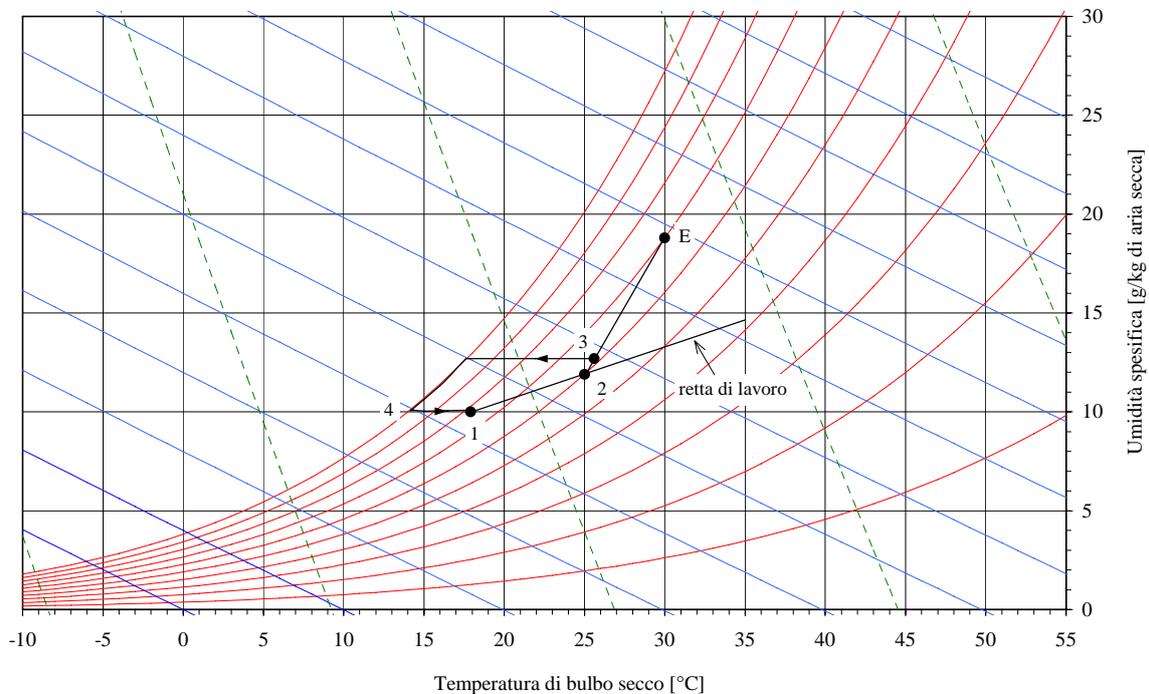
$$W_{t,34} = G(h_4 - h_3) = -151.20 \text{ kW}$$

Lo stadio di raffreddamento del gruppo di condizionamento deve essere quindi progettato in modo da riuscire a sottrarre all'aria umida trattata almeno 151.2 kW

Nel processo di postriscaldamento l'aria umida acquista calore e la potenza termica scambiata vale

$$W_{t,41} = G(h_1 - h_4) = 31.54 \text{ kW}$$

Lo stadio di postriscaldamento del gruppo di condizionamento deve essere quindi progettato in modo da riuscire a fornire all'aria umida trattata almeno 31.54 kW



### ESEMPIO 10.8 – Condizionamento invernale

Un gruppo di condizionamento tratta una portata d'aria totale di 10000 kg/h di cui 2000 kg/h sono di aria esterna. Nell'ambiente da condizionare si vuole mantenere 20 °C con un'umidità relativa del 50 %. La temperatura dell'aria esterna sia di 0 °C con un'umidità relativa dell'80 %.

Nell'ipotesi che il carico sensibile totale sia pari a -30000 kcal/h e che il fattore termico valga 1.1, si determini:

- le condizioni termoigrometriche dell'aria umida in ingresso al locale;
- le condizioni termoigrometriche dell'aria umida in ingresso al gruppo di condizionamento;
- il quantitativo d'acqua da vaporizzare nel gruppo di condizionamento e la potenza termica del gruppo di riscaldamento.

Si disegnano, infine, sul diagramma psicrometrico di Carrier i processi termoigrometrici subiti dall'aria nell'impianto di condizionamento.

Si tratta di un tipico caso di condizionamento invernale. I dati di progetto e le condizioni dell'aria esterna al locale ci permettono di ricavare i valori dei principali parametri termoigrometrici degli stati 2 ed E, attraverso l'uso delle seguenti formule (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico):

$$p_{v,sat} \cong 1000 \cdot \exp\left(16.6536 - \frac{4030.183}{t + 235}\right)$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}}$$

$$h = h_a + h_v \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 2	<b>20</b>	<b>50</b>	2337	0.00726	38.52
stato E	<b>0</b>	<b>80</b>	609	0.00300	7.52

Gli scambi termici tra il locale e l'esterno, con le appropriate unità di misura, valgono:

$$W_{t,sens} = -34.88 \text{ kW}; \quad W_{t,lat} = \frac{W_{t,sens}}{R} - W_{t,sens} = 3.17 \text{ kW}$$

La portata di vapore immessa nell'aria umida, contenuta nel locale, dalle persone e/o dalle macchine e dai processi vale:

$$G_v = \frac{W_{t,lat}}{h_v} = 0.00124 \text{ kg/s}$$

A questo punto si può passare alla fase 2 descritta nel paragrafo 7, cioè alla determinazione delle condizioni dell'aria in ingresso al locale. Questa volta la portata massica di aria umida trattata dal gruppo di condizionamento è nota per cui, utilizzando le equazioni di bilancio per il locale, è possibile ricavare la frazione massica e l'entalpia dell'aria da immettere nel locale

$$\omega_1 = \omega_2 - G_v / G = 0.00681$$

$$\frac{h_2 - h_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{W_{t,tot}}{G_v} \Rightarrow h_1 = h_2 - \frac{W_{t,tot}}{G_v} (\omega_2 - \omega_1) = 49.93 \text{ kJ/kg}$$

Nota l'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida da immettere nel locale, mediante le formule introdotte nel paragrafo 1 (o mediante il programma CATT, oppure in maniera approssimata mediante un diagramma psicrometrico) è possibile ricavare tutte le altre proprietà termoigrometriche dello stato 1:

$$h = h_a + h_v, \omega = 1.005t + 2501.3\omega + 1.820t\omega \Rightarrow t = \frac{h - 2501.3\omega}{1.005 + 1.82\omega}$$

$$\omega = 0.622 \frac{\phi p_{v,sat}}{p - \phi p_{v,sat}} \Rightarrow \phi = \frac{\omega p}{\omega p_{v,sat} + 0.622 p_{v,sat}}$$

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 1	32.34	22.6	4847	<b>0.00681</b>	<b>49.93</b>

A questo punto si può passare alla fase 3 descritta nel paragrafo 7, cioè all'individuazione dei trattamenti dell'aria nel gruppo di condizionamento. La portata d'aria esterna che bisogna miscelare con la portata dell'aria di ricircolo al fine di mantenere una buona qualità dell'aria all'interno del locale vale:

$$G_E = 0.556 \text{ kg/s}$$

La portata di ricircolo sarà quindi data dalla differenza tra la portata d'aria in ingresso al locale e la portata di reintegro:

$$G_R = G - G_E = 2.222 \text{ kg/s}$$

Nel miscelatore avverrà il miscelamento tra una portata d'aria umida  $G_R$  nello stato 2 ed una portata  $G_E$  nello stato E. L'aria in uscita dal miscelatore si troverà nello stato 3 individuato dalle variabili ottenute mediante le seguenti equazioni:

$$\omega_3 = \frac{G_E \omega_E + G_R \omega_2}{G} = 0.00641$$

$$h_3 = \frac{G_E h_E + G_R h_2}{G} = 32.32 \text{ kJ/kg}$$

Nota l'umidità specifica e l'entalpia dell'aria umida da immettere nel locale è possibile ricavare tutte le altre proprietà termoigrometriche dello stato 3:

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{v,sat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 3	16.0	56.8	1820	<b>0.00641</b>	<b>32.32</b>

Per passare dallo stato 3 allo stato 1 nel gruppo di condizionamento l'aria umida viene sottoposta prima al processo di riscaldamento sensibile (3-4) e poi all'umidificazione (4-1) (vedi diagramma psicrometrico riportato in basso). Lo stato 4, raggiunto al termine del processo di riscaldamento, avrà un'umidità specifica uguale a quella dello stato 3. Inoltre, applicando le equazioni di bilancio al gruppo di umidificazione si ottiene:

$$G_v = G(\omega_1 - \omega_4) = 1.1 \text{ g/s}$$

$$G(h_1 - h_4) = G_v h_v \Rightarrow h_4 = h_1 - \frac{G_v}{G} h_v$$

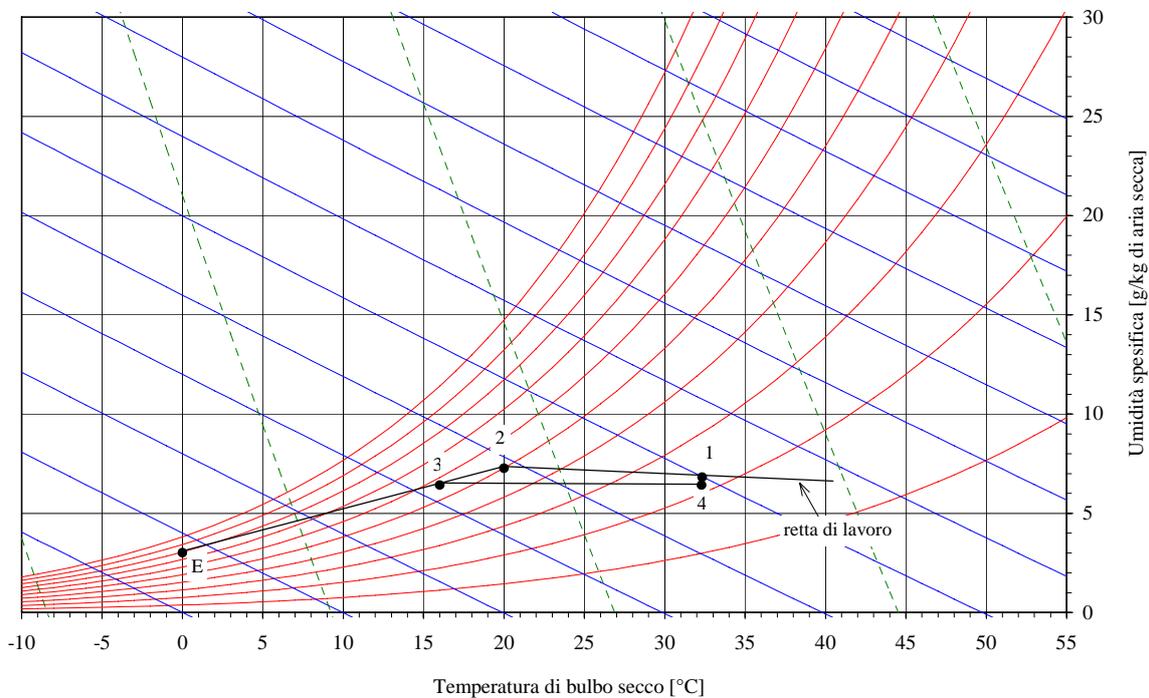
possiede un'umidità specifica uguale a quello dello stato 1 ed un'umidità relativa del 100 %. Possono quindi essere ricavati tutti gli altri parametri termogrometrici (vedi tabella seguente).

	$t$ [°C]	$\phi$ [%]	$p_{vsat}$ [Pa]	$\omega$ [-]	$h$ [kJ/kg]
stato 4	32.3	21.4	4840	<b>0.00641</b>	<b>48.91</b>

L'aria umida nel processo di riscaldamento scambia con l'esterno una potenza termica data da:

$$W_{t,34} = G(h_4 - h_3) = 16.6 \text{ kW}$$

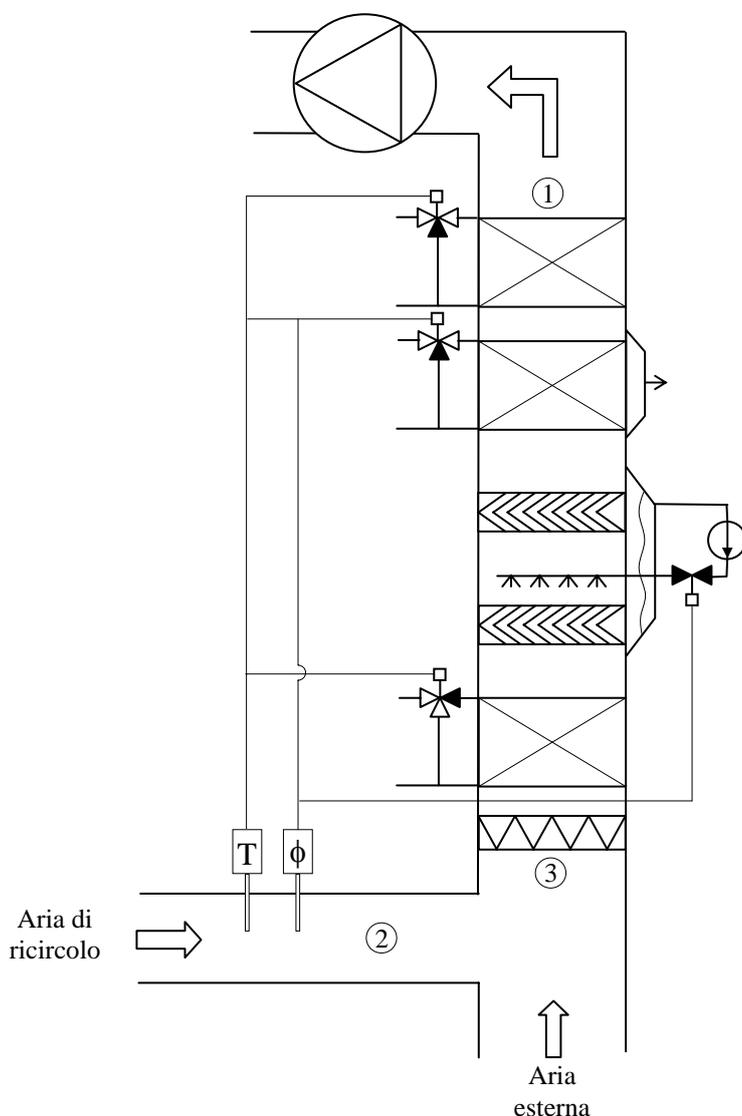
Lo stadio di riscaldamento del gruppo di condizionamento deve essere quindi progettato in modo da riuscire a fornire all'aria umida trattata almeno 16.6 kW.



**FASE 4 – Regolazione dell'impianto di condizionamento**

Gli impianti di condizionamento devono ovviamente essere regolati automaticamente sia per evitare dannosi sbalzi di temperatura, sia per limitare il consumo energetico. Infatti, essi sono progettati nelle condizioni di carico massimo e quindi devono essere regolati in modo da adeguarsi alle condizioni effettive di carico.

Gli strumenti utilizzati per la regolazione sono i termostati e gli umidostati, i quali comandano le normali valvole di apertura e di chiusura dei vari circuiti. I sensori di temperatura e di umidità relativa vengono posti generalmente nel condotto di ricircolo, nel quale la corrente d'aria si trova nelle stesse condizioni termoigrometriche dell'ambiente climatizzato, con il vantaggio che la maggiore velocità dell'aria rende i valori più uniformi e facili da misurare. In figura 20 è riportato lo schema di un impianto di condizionamento con esempio di regolazione per il caso estivo.



**Figura 20:** Schema di regolazione estiva.

## 8. Bilancio energetico e scambio termico nella persona umana e condizioni di benessere ambientale (°)

### *L'essere umano come sistema termodinamico*

Se consideriamo un essere umano come sistema termodinamico (delimitato dalla superficie della sua pelle) ci rendiamo conto che *nel medio termine* si tratta di un sistema a regime: non ci sono infatti (su periodi di alcuni giorni) variazioni sensibili di temperatura (essendo l'uomo un animale omeotermo) e di massa. Si tratta inoltre di un *sistema aperto*, e gli scambi di massa con l'esterno sono costituiti dalla nutrizione, dalla respirazione e dalle secrezioni ed escrezioni organiche.

Il fatto che si tratti di un sistema a regime implica che le cessioni di energia verso l'ambiente, sotto forma di scambi termici e di lavoro, debbano essere reintegrate con una equivalente produzione di energia: questa avviene all'interno delle nostre cellule fondamentalmente tramite le reazioni di ossidazione del cibo ingerito. Il complesso dell'attività chimica che avviene all'interno delle nostre cellule prende il nome di *metabolismo*, e rappresenta appunto la nostra sorgente interna di energia. Tale complesso di reazioni chimiche avviene in maniera ottimale alla temperatura di 37 °C, che rappresenta appunto la temperatura interna del corpo umano e viene mantenuta costante (*omeotermia*) dai meccanismi di *termoregolazione*. Viene detta *potenza metabolica basale* (BMR, basal metabolic rate) la potenza necessaria per mantenere le funzioni vitali (respirazione, circolazione e termoregolazione) in condizioni di riposo assoluto. La potenza metabolica basale per l'essere umano medio (maschio, 30 anni, 70 kg di peso, superficie corporea 1.8 m<sup>2</sup>) è di 84 W. Cervello, fegato e cuore sono le sedi principali dell'attività metabolica (circa il 50% del totale negli adulti). Straordinariamente, nei bambini oltre la metà dell'attività metabolica basale è localizzata nel cervello.

La potenza metabolica (*MR*) può essere misurata in modo indiretto, misurando il consumo di ossigeno attraverso la respirazione ed equivale a circa 20.1 kJ per litro di ossigeno consumato.

La potenza metabolica varia con lo stato di attività, con l'età (diminuisce col passare degli anni) con il sesso (è minore nelle donne) e con la superficie corporea: a parità degli altri fattori, il rapporto potenza metabolica/superficie corporea è circa costante e quindi spesso la potenza metabolica è riportata in W/m<sup>2</sup>. E' invalso anche l'uso di misurare la potenza metabolica in *met*: 1 met equivale a 58 W/m<sup>2</sup>, ovvero alla potenza metabolica di una persona seduta in condizioni tranquille.

In condizioni di sforzo fisico la potenza metabolica aumenta ed una parte di essa viene convertita in lavoro meccanico, come risulta dalla Tab.1. Da essa si vede che il "rendimento massimo" della "macchina uomo" non supera il 20%. In realtà, una parte dell'energia convertita in lavoro meccanico viene consumata internamente al corpo (es. per la circolazione e la respirazione); considerando anche questi contributi, si stima che la conversione in lavoro meccanico possa raggiungere il 45%.

Per reintegrare la potenza metabolica dissipata, si può utilizzare l'energia chimica contenuta nei nutrienti ingeriti oppure nei grassi corporei. Al contrario, se ingeriamo una quantità di cibo superiore al fabbisogno energetico, l'eccesso viene accumulato sotto forma di grasso corporeo. In sostanza, l'uomo si procura l'energia tramite la ossidazione del cibo, convertendone una piccola parte (il 20% al massimo) in lavoro meccanico, utilizzandone di

gran lunga la maggior parte per la termoregolazione e immagazzinando il residuo sotto forma di grasso.

Attività	MR/A (W/m <sup>2</sup> )	MR/A (met)	$\eta = W_m/MR$
Dormire	46	0.8	0
Sedere tranquilli	58	1.0	0
Attività sedentaria (ufficio)	70	1.2	0.2
Attività media in piedi (commesso)	116	2.0	0 - 0.15
Camminare in piano a 5 km/h	200	3.4	0.1
Pulizie domestiche	120 - 200	2 - 3.5	0 - 0.1
Giocare a tennis	250 - 400	4 - 7	0 - 0.1

**Tabella 1:** valori di MR per unità di superficie corporea per varie attività.

L'uomo non si può considerare esattamente una macchina termica: l'energia chimica dei nutrienti viene convertita direttamente in lavoro meccanico da alcuni processi cellulari (il principale è la sintesi dell'ATP, adenosintrifosfato) e quindi non è soggetto ai limiti di rendimento delle macchine termiche propriamente dette, che convertono energia termica in lavoro e che è esposto nel Cap.7. Se così fosse, come risulterà chiaro in seguito, la temperatura corporea dovrebbe essere notevolmente superiore a quella esterna per produrre un lavoro apprezzabile.

### **ESEMPIO 10.9 – Fabbisogno energetico medio**

Si stima che la potenza metabolica media di un individuo adulto durante la giornata sia di 120 W. Determinare il suo fabbisogno energetico giornaliero.

L'energia dissipata dal soggetto in un giorno (86400 s) è data da

$$E = M \cdot t = 120 \cdot 86400 = 10.36 \text{ MJ} = 2475 \text{ kcal}$$

per bilanciare tale consumo senza ricorrere alle riserve di grasso corporeo, occorre ingerire una quantità di cibo che abbia il suddetto contenuto energetico.

Da notare che la stessa persona, in condizioni di riposo assoluto in cui la potenza metabolica si riduce a quella basale (84 W) avrebbe un fabbisogno giornaliero di 7.25 MJ (1720 kcal).

Bisogna ricordare che la potenza metabolica media varia da individuo a individuo. I valori indicativi sono da 1500 a 3500 kcal/giorno.



Il contenuto energetico di un cibo si determina calcolando la sua composizione in base ai suoi costituenti fondamentali: proteine, carboidrati e grassi. I contenuti medi di energia metabolizzabili sono 17.2 MJ/kg (4.1 kcal/g) per i carboidrati e per le proteine e 38.9 MJ/kg (9.3 kcal/g) per i grassi. Quindi 1 kg di grassi contiene più del doppio di energia di un corrispondente ammontare di carboidrati o proteine e questo spiega perché il loro consumo debba essere particolarmente ridotto nelle diete.

Considerare il cibo unicamente come un combustibile è una prospettiva molto riduttiva. Bisogna considerare che il cibo è anche la materia prima utilizzata per reintegrare le parti del nostro organismo e provvedere alle altre funzioni vitali: nella dieta occorre quindi un apporto

equilibrato di nutrienti, inclusi in particolare i sali minerali, che non danno nessun contributo energetico apprezzabile.

La Tab.2 riporta a titolo indicativo il contenuto calorico di alcuni cibi tipici della nostra dieta.

Cibo	per 100 g [kJ – (kcal)]	per porzione [kJ-(kcal)]
Bibita analcolica (200 cc)		350 - (87)
Pizzetta	1050 – (250)	1450 - (350)
Tramezzino		1450 - (350)
Pesca	125 - (30)	150 - (36)
Patate fritte	840 – (200)	1650 - (400)
Cioccolato	2200 - (525)	
Pane (1 fetta)	1180 – (280)	300 – (70)
Hamburger – Hot dog (con panino e salsa)		1900 – (450)
Gelato	1050 – (250)	450 – (110)

**Tabella 2:** valori *indicativi* del contenuto energetico di alcuni cibi.

Il bilancio energetico del corpo umano a regime si può allora porre nella forma

$$MR - W_m - W_{Tm} - W_{Tc} = 0 \quad (1)$$

dove  $MR$  rappresenta la potenza metabolica,  $W_m$  il lavoro meccanico compiuto,  $W_{Tm}$  la potenza perduta per scambi di massa (vedi in seguito) e  $W_{Tc}$  la potenza termica scambiata tra il corpo e l'ambiente, di cui ci occuperemo in dettaglio in seguito.

La potenza dissipata tramite scambi di massa è dovuta all'evaporazione dell'acqua (come vedremo nel capitolo successivo, per evaporare un kg di acqua a temperatura ambiente sono necessari circa 2350 kJ) ed al riscaldamento dell'aria espirata. Essa si può suddividere in:

- evaporazione dell'umidità corporea attraverso la superficie della pelle: fino a 10% BMR;
- evaporazione del sudore dalla superficie del corpo: fino al 500% BMR ed oltre;
- respirazione (riscaldamento e umidificazione dell'aria espirata): fino al 20% BMR.

L'incidenza dei contributi suddetti, specie della sudorazione, che è il meccanismo più efficiente di smaltimento termico, dipende notevolmente dallo stato di sforzo e dalle condizioni (temperatura ed umidità) dell'ambiente esterno.

Con la sudorazione si possono eliminare abbastanza agevolmente 0.1 g/s m<sup>2</sup> di acqua per unità di superficie corporea, corrispondenti ad una dissipazione di potenza di 230 W/m<sup>2</sup>. Questo corrisponde ad eliminare per sudorazione circa mezzo litro d'acqua in un'ora. Gli animali pelosi, che non sudano, sono invece costretti ad aumentare la dissipazione di acqua per via respiratoria ansimando.

Il bilancio energetico può essere riformulato in termini di unità di superficie corporea ( $A_p$ ) come

$$\frac{MR}{A_p} (1 - \eta) - q''_m - q''_c = 0 \quad (2)$$

dove  $\eta$  rappresenta la frazione di  $MR$  convertita in lavoro meccanico (v. Tab.1) e  $q''$  rappresenta il flusso di energia per unità di superficie corporea.

### **Scambio termico tra corpo umano ed ambiente**

Come risulta dall'esperienza comune, lo scambio termico tra il corpo umano e l'ambiente è notevolmente influenzato dalle condizioni ambientali (temperatura, velocità ed umidità dell'aria), dalla posizione del corpo (disteso o rannicchiato) e dagli abiti indossati. Il calore viene dissipato dalla superficie corporea per *convezione* ed *irraggiamento*. Il coefficiente di convezione in aria varia come abbiamo visto da circa  $3 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  a circa  $50 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  in caso di forte vento; in acqua esso aumenta di circa un ordine di grandezza. La emissività e della pelle nuda varia da 0.65 a 0.82 (pelle nera). Consideriamo per ora lo scambio termico dal corpo nudo, come illustrato nel seguente esempio.

### **ESEMPIO 10.10 – Determinazione della temperatura ambiente ottimale**

Una persona nuda si trova in piedi a riposo al centro di una stanza le cui pareti sono alla temperatura  $T_w = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ . La sua potenza metabolica è stimata in  $110 \text{ W}$ , di cui  $20 \text{ W}$  sono smaltiti attraverso scambi di massa (respirazione ed evaporazione). Si stima che per mantenersi in condizioni confortevoli, la temperatura media superficiale della pelle debba essere  $34 \text{ }^\circ\text{C}$ . Assumendo una emissività della pelle  $\varepsilon = 0.62$  ed un coefficiente di scambio convettivo  $\alpha = 5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , determinare a quale temperatura debba essere mantenuta l'aria della stanza.

L'energia dissipata dal soggetto per scambio termico è data da

$$W_T = 110 - 20 = 90 \text{ W}$$

tale potenza viene scambiata per convezione con l'aria della stanza e per irraggiamento con le pareti, quindi

$$W_T = \alpha A_p (T_p - T_a) + \varepsilon \sigma A_p (T_p^4 - T_w^4)$$

(notare che le temperature di riferimento per i due scambi termici sono diverse). Assumendo una superficie corporea  $A_p = 1.4 \text{ m}^2$  (tenendo conto che una parte di essa, come le cavità ascellari, non partecipa allo scambio) la unica incognita è la temperatura ambiente  $T_a$ , data da

$$T_a = T_p - \frac{W_T - \varepsilon \sigma A_p (T_p^4 - T_w^4)}{\alpha A_p} =$$

$$34 - \frac{90 - 0.62 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (307^4 - 291^4)}{5 \cdot 1.4} = 34 - \frac{90 - 60.2}{5 \cdot 1.4} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$$

Tale temperatura è piuttosto elevata, ma bisogna notare come i 2/3 della potenza termica venga scambiata per irraggiamento con le pareti. Per una climatizzazione efficiente, bisognerebbe innalzare la temperatura di queste ultime piuttosto che quella ambiente.

□

Gli abiti influenzano notevolmente lo scambio termico, introducendo una resistenza termica conduttiva tra la superficie corporea e l'ambiente. Inoltre essi possono avere una emissività diversa da quella della pelle nuda e quindi alterare lo scambio radiativo. In genere si tiene conto degli abiti introducendo una resistenza termica

$$R_{cl} = \frac{T_p - T_{cl}}{W_{Tc}} = \frac{r_{cl}}{A_p} \quad (3)$$

Dove  $T_p$  e  $T_{cl}$  sono le temperature rispettivamente della superficie corporea e della superficie esterna dell'abito ed  $r_{cl}$  una grandezza caratteristica del tipo di vestito. Per un abito standard (abito estivo da uomo) essa vale  $0.15 \text{ m}^2 \text{ K/W}$ .

Convenzionalmente,  $r_{cl}$  deve essere divisa per la superficie della pelle per ottenere la resistenza termica dell'abito, che diminuisce all'aumentare della superficie di trasmissione del calore. Assimilando l'abito ad una parete piana si può intuire che  $r_{cl}$  è data da  $s/k$ , dove  $s$  è lo spessore medio dell'abito e  $k$  la sua conducibilità termica.

Delle caratteristiche di tipi diversi di abiti si tiene conto introducendo un indice  $I_{cl}$  (che convenzionalmente si esprime in *clo* – acronimo di clothes, ma che in realtà è adimensionale) che rappresenta il rapporto tra la resistenza termica dell'abito e quella standard. Tale indice è riportato in Tab.3 per alcuni tipi di vestito.

Abito	$f_{cl}$	$I_{cl}$
Nessun abito	1	0
Pantaloncini, maglietta e sandali	1.05	0.3
Jeans e maglietta, scarpe	1.1	0.5
Vestito da uomo estivo	1.15	1
Vestito estivo, soprabito di cotone	1.15	1.5
Abito da uomo invernale, calzini lana	1.2	1.5
Come sopra, con cappotto di lana	1.3	3

**Tabella 3:** valori di  $I_{cl}$  ed  $f_{cl}$  per alcuni tipi di abito.

La potenza termica trasmessa per conduzione attraverso un abito è quindi data, per unità di superficie corporea, da

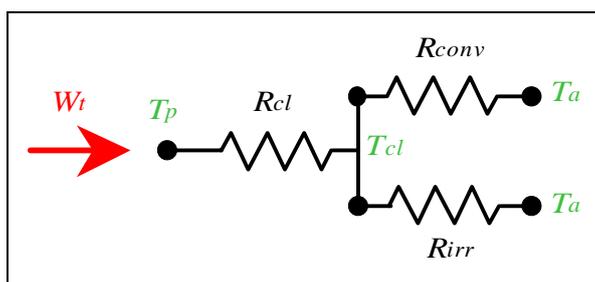
$$\frac{W_{Tc}}{A_p} = \frac{T_p - T_{cl}}{r_{cl}} = \frac{T_p - T_{cl}}{0.15 I_{cl}} = \frac{T_p - T_{cl}}{0.15 I_{cl}} \quad (4)$$

Si introduce inoltre un fattore  $f_{cl}$  per tener conto che la superficie degli abiti esposta all'ambiente esterno è leggermente maggiore di quella del corpo nudo, ovvero  $A_{cl} = f_{cl} A_p$ , v. Tab.3. Combinando infine le resistenze termiche convettiva e radiativa (in parallelo) con quella conduttiva degli abiti (in serie alle prime due, v. Fig.21) si ha (supponendo che gli scambi convettivo e radiativo avvengano entrambi verso corpi alla stessa temperatura  $T_a$ )

$$R_{cl} = \frac{0.15 I_{cl}}{A_p}, \quad R_{conv} = \frac{1}{\alpha A_{cl}} = \frac{1}{\alpha f_{cl} A_p}, \quad R_{irr} = \frac{1}{\alpha_R A_{cl}} = \frac{1}{\alpha_R f_{cl} A_p}$$

$$R_{EQ} = R_{cl} + \left( \frac{1}{R_{conv}} + \frac{1}{R_{irr}} \right)^{-1} = \frac{0.15 I_{cl} f_{cl} + (\alpha_R + \alpha)^{-1}}{f_{cl} A_p} \quad (5)$$

$$W_{Tc} = \frac{T_p - T_a}{R_{EQ}} = \frac{f_{cl} A_p}{0.15 I_{cl} f_{cl} + (\alpha_R + \alpha)^{-1}} (T_p - T_a)$$



**Figura 21:** Rete elettrica equivalente al fenomeno di scambio termico in una persona vestita.

Un calcolo più accurato dovrebbe considerare separatamente le superfici corporee che rimangono scoperte (es. viso e mani). Bisognerebbe inoltre considerare che alcuni di noi hanno una sorta di “vestito naturale” costituito dallo strato di grasso corporeo!

### ESEMPIO 10.11 – Scambio termico attraverso gli abiti

La stessa persona di cui all'esempio precedente è adesso vestita con un abito invernale avente  $I_{cl} = 3$  clo,  $f_{cl} = 1.3$  ed emissività  $\varepsilon = 0.9$ . Supponiamo per semplicità che le pareti si trovino alla stessa temperatura della stanza. A parità dei rimanenti fattori (v. Esempio 2) determinare a quale temperatura debba essere mantenuta l'aria della stanza.

 La soluzione è riportata nel file C2ABITI.XLS

L'energia dissipata dal soggetto per scambio termico è, come nel caso precedente, data da  $W_T = 110 - 20 = 90$  W

La rete di resistenze termiche è riportata nella Fig.21.

La temperatura della superficie esterna degli abiti è ottenibile direttamente dalla Eq.4.

$$T_{cl} = T_p - 0.15 I_{cl} \frac{W_{Tc}}{A_p} = 34 - 0.15 \cdot 3 \frac{90}{1.4} = 5.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Si può calcolare il coefficiente di scambio per irraggiamento  $\alpha_R$  tramite la Eq.4 del Cap.2, stimando  $T_a = 300$  K (stima da verificare in seguito)

$$\alpha_R = \varepsilon_1 \sigma (T_{cl} + T_a) (T_{cl}^2 + T_a^2) = 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} (278 + 300) (278^2 + 300^2) = 4.9 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

La potenza termica scambiata è data dalla Eq.12, da cui ricaviamo  $T_a$

$$T_a = T_p - \frac{0.15 I_{cl} f_{cl} + (\alpha_R + \alpha)^{-1}}{f_{cl} A_p} W_{Tc} = 34 - \frac{0.15 \cdot 3 \cdot 1.3 + (4.9 + 5)^{-1}}{1.3 \cdot 1.4} \cdot 90 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Alternativamente,  $T_a$  poteva essere ricavata dal salto di temperatura a cavallo del parallelo di  $R_{conv}$  ed  $R_{irr}$

$$T_a = T_{cl} - W_{Tc} R_{EQ} = T_{cl} - \frac{W_{Tc}}{f_{cl} A_p (\alpha_R + \alpha)}$$

ottenendo ovviamente (a meno di errori di arrotondamento) il medesimo risultato.

Bisognerebbe a questo punto correggere la stima di  $T_a$  fatta per il calcolo di  $\alpha_R$ . Assumendo  $T_a = 273$  K si otterrebbe  $\alpha_r = 4.8$ , valore con cui bisognerebbe ripetere il conto. La differenza non è comunque rilevante.

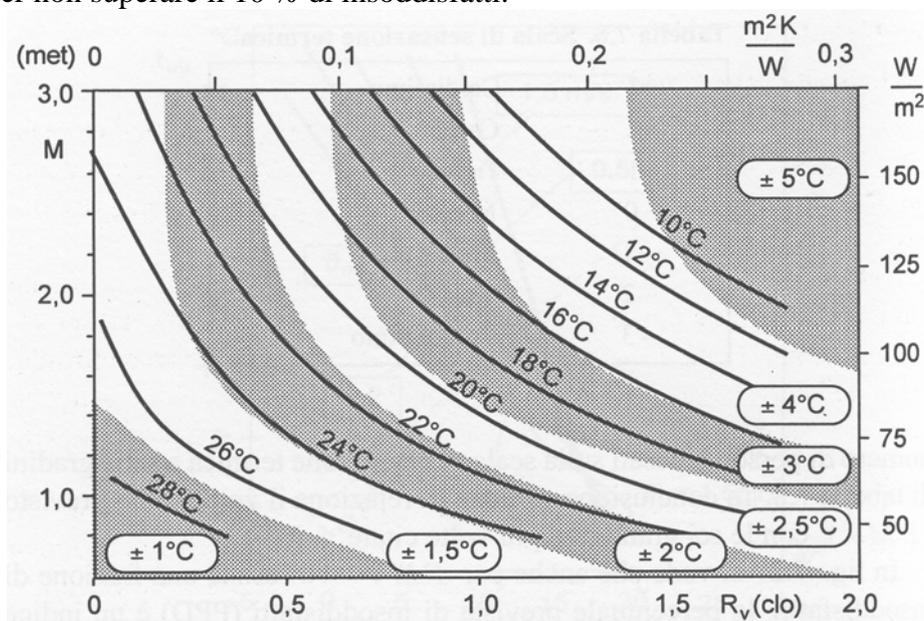
Notare che ridurre la emissività degli abiti comporterebbe una riduzione di scambio termico: radiativo (che è circa la metà del totale): per tale motivo alcuni abiti da montagna sono

argentati esternamente, il che diviene particolarmente importante quando si irraggia verso superfici a temperature molto basse.

Per tenere conto di una temperatura delle pareti diversa da quella della stanza, la Eq.12 dovrebbe essere leggermente modificata: il compito è lasciato per esercizio all'allievo.

□

Naturalmente le sensazioni di benessere ambientale sono soggettive: a parità di tutti i rimanenti fattori, nello stesso ambiente alcune persone provano una sensazione di caldo ed altre una sensazione di freddo. Dette sensazioni non possono quindi essere valutate quantitativamente, ma solo analizzando statisticamente il giudizio di un gran numero di persone. La norma UNI-EN-ISO 7730 prevede di valutare le condizioni di benessere ambientale mediante un voto medio previsto (PMV), valutabile mediante una procedura abbastanza complessa (esposta nella norma stessa) che tiene conto dello stato di attività delle persone, del loro abbigliamento, della temperatura sia dell'ambiente che delle sue pareti. Dato che non si può pensare di accontentare tutti, si stima che quando il PMV vale 0, rimangano solo un 5% di persone insoddisfatte della temperatura ambiente, mentre per un PMV di  $\pm 2$  ci sono circa l'80% di persone che sentono troppo caldo (PMV positivo) o troppo freddo (PMV negativo). La temperatura media ottimale risultante dal calcolo, corrispondente a  $PMV = 0$ , in un ambiente con umidità relativa del 50%, è riportata in Fig.22 in funzione dell'abbigliamento indossato e del valore di attività metabolica. Da esso si vede per esempio che in un ambiente ad attività media (2 met) e con abiti estivi (0.5 clo) la temperatura operativa ottimale, che lascia solo il 5% di persone insoddisfatte, è di poco inferiore a 22 °C, con uno scarto ammesso di  $\pm 2$  K per non superare il 10% di insoddisfatti.



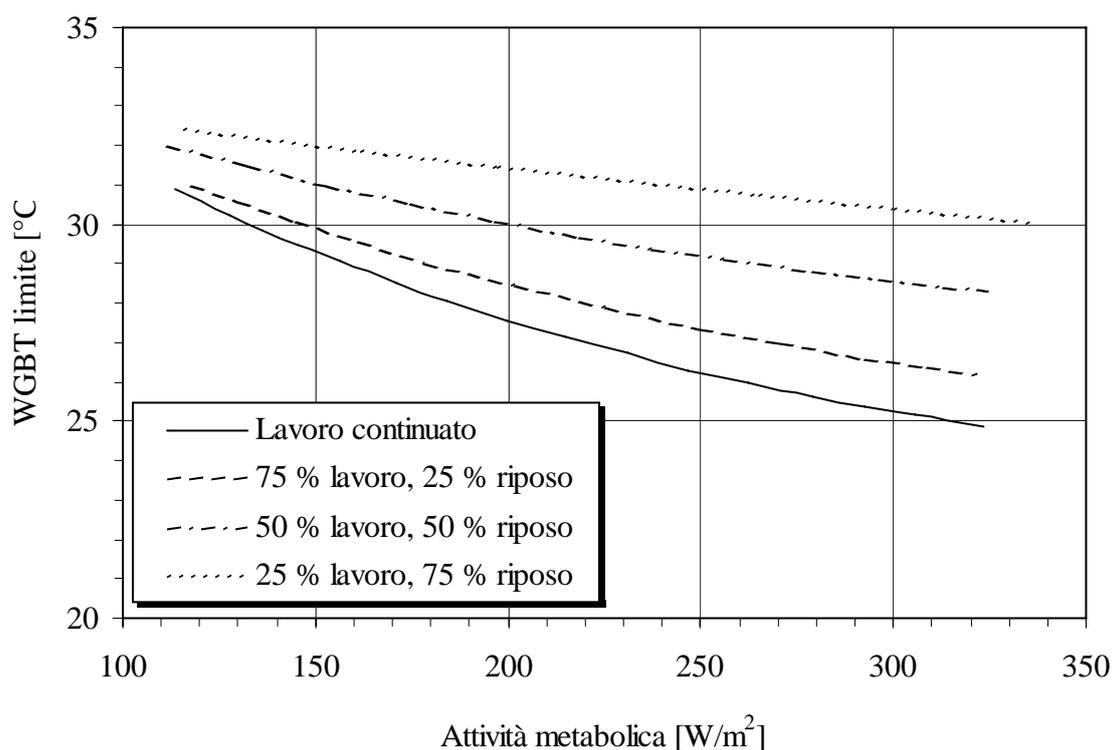
**Figura 22:** Temperatura media ottimale (corrispondente a  $PMV=0$ ) in funzione dell'attività metabolica e dell'abbigliamento.

Nel caso degli ambienti di lavoro industriali l'uomo può trovarsi ad operare in condizioni termiche severe (ambienti "molto" caldi o "molto" freddi). In tali condizioni non sono importanti tanto le condizioni ottimali di benessere, quanto il non superamento di condizioni limite di sopportabilità dello stress termico da parte dell'uomo relativamente all'attività metabolica ed all'abbigliamento utilizzato.

La norma UNI-EN 27243 propone un metodo di valutazione dello stress termico cui è soggetto un individuo in un ambiente industriale caldo, basato sul calcolo dell'indice WBGT (Wet Bulb Globe Temperature). L'indice WBGT è funzione della temperatura di bulbo umido, della temperatura di globotermometro ed, in alcuni casi, della temperatura di bulbo secco presenti nell'ambiente di lavoro. Si tratta in pratica di un valore prossimo alla temperatura di bulbo umido presente nell'ambiente. La norma specifica, inoltre, come devono essere effettuate le misure di queste grandezze che caratterizzano l'ambiente.

I valori limite del WBGT, validi per persone acclimatate al calore in un ambiente con aria non stagnante, sono riportati in Fig. 23 in funzione del valore dell'attività metabolica, per differenti cicli lavoro/riposo.

Se i valori limite di WBGT vengono superati occorrerà intervenire limitando lo stress termico attraverso la riduzione dell'attività di lavoro, del tempo di lavoro oppure dotando i lavoratori di opportuni dispositivi di protezione individuale.



**Figura 23:** Valori limite del WBGT per differenti cicli lavoro/riposo.

## BIBLIOGRAFIA

- Y. A. Cengel, “Termodinamica e trasmissione del calore”, *McGraw-Hill*, New York, 1998, Cap.9.
- P. Anglesio, “Elementi di Impianti Termotecnici”, *Pitagora Editrice*, Bologna, 1998, Capp. 7-9.
- R. Mastrullo, P. Mazzei e R. Vanoli, “Termodinamica per ingegneri”, *Liguori editore*, Napoli, 1996, Cap.4.
- A. Briganti, “Il condizionamento dell'aria”, *Tecniche nuove*, Milano, 1988.
- C. Pizzetti, “Condizionamento dell'aria e refrigerazione”, Vol. 1 e 2, *Massoni*, Milano 1989.
- F. Calza, “Impianti termici, idraulici e di condizionamento, progettazione e realizzazione”, *Tecniche nuove*, Milano, 1986.
- System Design Manual Carrier tradotto dall'Ing. Bernardo Galosi, “Stima dei carichi termici”, *Tecniche nuove*, Milano, 1986.
- G. Moncada Lo Giudice, "Fisica Tecnica Ambientale - Termodinamica applicata", *Massoni*, Milano, 1998.

## NORMATIVA

- UNI 10344, “Riscaldamento degli edifici – Calcolo del fabbisogno di energia”, novembre 1993.
- UNI 10339, “Impianti aeraulici a fini di benessere: generalità, classificazione e requisiti – regole per la richiesta d'offerta, l'offerta, l'ordine e la fornitura”, giugno 1995.
- UNI EN ISO 7730, “Ambienti termici moderati: determinazione degli indici PMV e PPD e specifica delle condizioni di benessere termico”, settembre 1997.
- EN 27726 (ISO 7726), “Ambienti termici: strumenti e metodi per la misurazione delle grandezze fisiche”, ottobre 1993.
- UNI EN 27243, “Ambienti caldi: valutazione dello stress termico per l'uomo negli ambienti di lavoro, basata sull'indice WBGT (temperatura a bulbo umido e del globotermometro), febbraio 1996.
- UNI 9511 parte 1°, 2°, 3° e 4°, “Disegni tecnici: rappresentazione delle installazioni”, dicembre 1989.
- D.P.R. del 28/06/1977 n. 1052 e D.M. del 10/03/1977, per la determinazione delle zone climatiche e dei valori minimi e massimi dei relativi coefficienti volumetrici globali di dispersione termica.
- D.M. del 30/07/1986, per l'aggiornamento dei coefficienti di dispersione termica.
- Legge 5 marzo 1990, n. 46, “Norme per la sicurezza degli impianti”.
- Legge 9 gennaio 1991, n.10 (nota come legge 10/91), “Norme in materia di uso razionale dell'energia, di risparmio energetico e di sviluppo delle fonti rinnovabili di energia”.
- D.P.R. 26 agosto 1993, n. 412, “Regolamento recante norme per la progettazione, l'installazione, l'esercizio e la manutenzione degli impianti termici degli edifici ai fini del contenimento dei consumi di energia, in attuazione dell'art. 4, comma 4, della legge 10/91”.
- D.P.R. 21 dicembre 1999, n.551, “Regolamento recante modifiche al D.P.R. 26 agosto 1993, n. 412”.

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 11. Scambiatori di calore

*Nicola Forgiione*

*Paolo Di Marco*

Versione 2005.00 – 5.05.06.

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico degli allievi dei Diplomi Universitari del settore industriale dell'Università degli Studi di Pisa.*

*Gli autori se ne riservano tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione.*

*Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*Gli autori saranno grati a chiunque segnali loro errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## 1. Tipologia degli scambiatori di calore

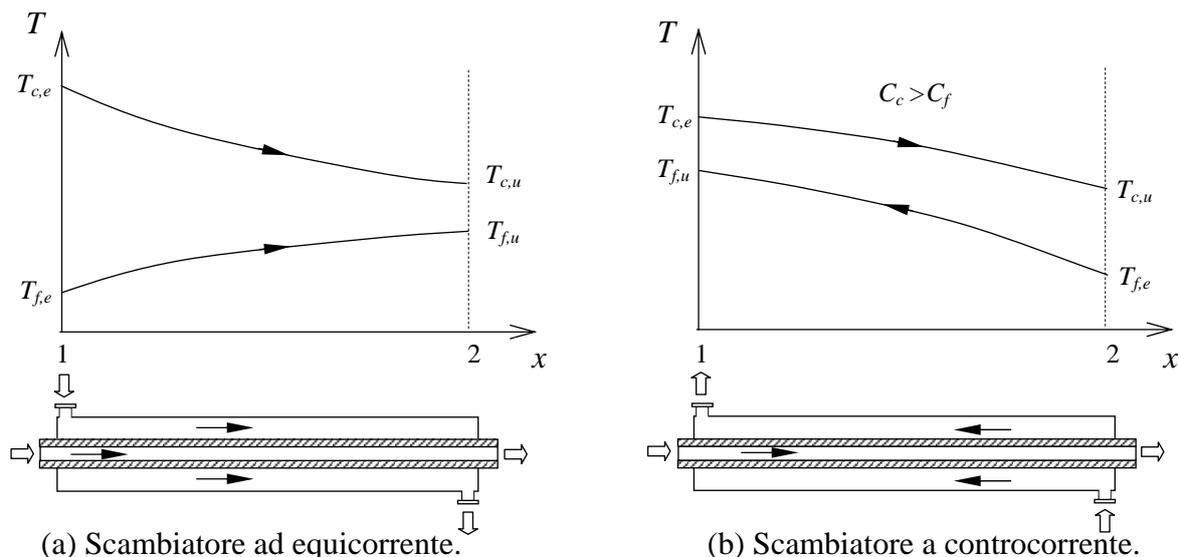
Gli scambiatori di calore sono delle apparecchiature nelle quali si ha trasmissione del calore da un fluido ad un altro. Come già accennato nel Cap.5, gli scambiatori di calore possono distinguersi in:

- **scambiatori a miscelamento**, in cui i due fluidi hanno in genere la stessa natura e si mescolano tra loro;
- **scambiatori a superficie**, in cui i due fluidi, che possono essere di diversa natura, sono separati da una superficie impermeabile alla massa e non si mescolano.

Nel seguito tratteremo solo gli scambiatori di calore a superficie senza che di volta in volta venga specificato. In essi la trasmissione del calore tra i due fluidi avviene per convezione tra i fluidi e le rispettive superfici solide lambite e per conduzione attraverso la parete del tubo che li separa.

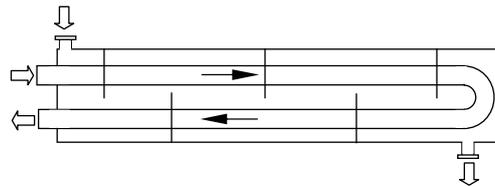
Alcuni esempi di scambiatori di calore sono: il radiatore di un autoveicolo, l'evaporatore di un'unità di condizionamento, il condensatore di una centrale termoelettrica, ecc.

Il più semplice scambiatore di calore è quello costituito da due **tubi coassiali** (vedi figura 1). Uno dei due fluidi fluisce nel tubo interno mentre l'altro fluisce nella regione anulare, in equicorrente o in controcorrente con il flusso del fluido interno; si parla rispettivamente di scambiatore ad **equicorrente** (figura 1.a) e di scambiatore a **controcorrente** (figura 1.b). Nel confrontare le due disposizioni, equicorrente e controcorrente, si può notare che solo per lo scambiatore a controcorrente la temperatura di uscita del fluido freddo può essere maggiore della temperatura di uscita del fluido caldo. Inoltre negli scambiatori a controcorrente la differenza di temperatura tra i fluidi (e di conseguenza il flusso termico) si mantiene pressochè costante lungo tutta la superficie, che conseguentemente viene sfruttata in maniera migliore che in quelli ad equicorrente. In questi ultimi, infatti, la superficie di scambio in prossimità dell'uscita (caratterizzata da un  $\Delta T$  relativamente basso) dà un contributo molto minore alla potenza termica totale scambiata.



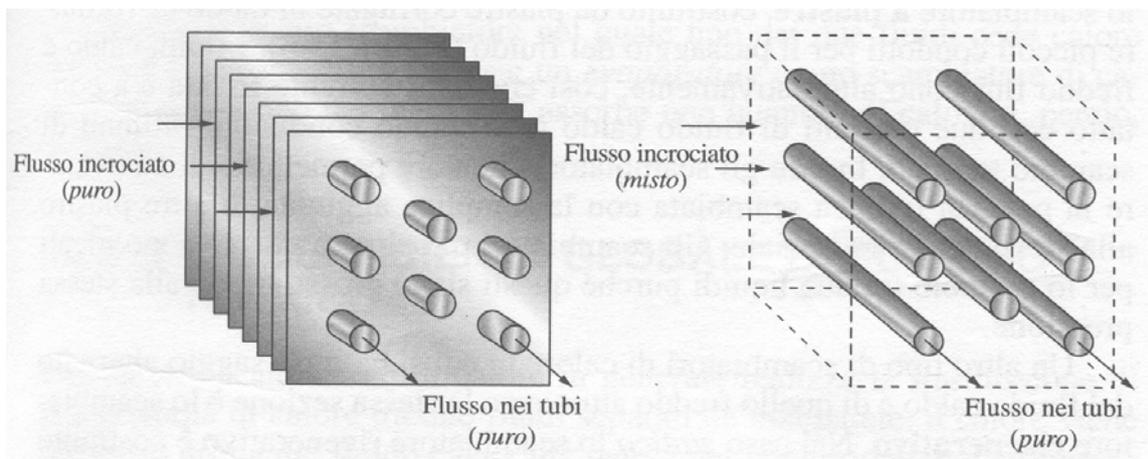
**Figura 1:** Andamento delle temperature negli scambiatori di calore a tubi coassiali.

Un tipo di scambiatore molto diffuso nelle applicazioni industriali è quello a **tubi e mantello** (vedi esempio mostrato in figura 2) costituito da un fascio di tubi opportunamente racchiusi all'interno di un involucro (mantello). I tubi sono mantenuti in posizione all'interno del mantello mediante dei diaframmi che svolgono anche la funzione di miglioramento dello scambio termico convettivo. Un fluido (generalmente liquido) viene fatto scorrere all'interno dei tubi che possono essere sagomati a più passaggi (il fluido percorre in direzioni opposte il lato interno dei tubi prima di uscire), mentre l'altro fluido (generalmente liquido) viene fatto passare all'esterno dei tubi ed all'interno del mantello.



**Figura 2:** Scambiatore di calore a tubi e mantello con 1 passaggio nel mantello, fornito di diaframmi, e 2 passaggi nei tubi.

Allorché uno od entrambi i fluidi sono in fase gassosa si utilizzano **scambiatori a correnti incrociate** (vedi figura 3), nei quali si cerca di ridurre l'effetto di degradazione dello scambio termico, dovuto alla relativamente bassa conducibilità termica dei gas, aumentando la superficie di scambio termico (mediante alettature) su una od entrambi le superfici di scambio (**scambiatori compatti**). I flussi incrociati possono essere: *entrambi puri* (figura 3.a), quando i due fluidi sono forzati a percorrere cammini tra loro perpendicolari; *entrambi mescolati*, quando entrambi i fluidi sono liberi di muoversi anche in direzione parallela l'uno all'altro; *uno mescolato e l'altro puro* (figura 3.b).

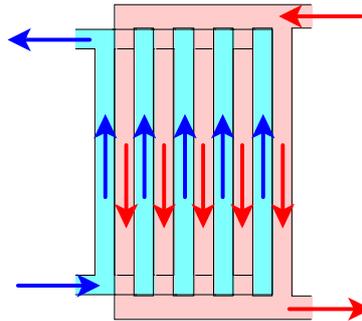


(a) Entrambi i flussi puri.

(b) Un flusso misto ed uno puro.

**Figura 3:** Scambiatore di calore a correnti incrociate.

Un tipo di scambiatori di calore attualmente molto usato, soprattutto nel campo dell'industria alimentare, è quello **a piastre** (v. Fig.4). Si tratta di uno scambiatore di tipo modulare costituito da una serie di piastre metalliche piane, dotate di particolari rilievi per aumentare lo scambio termico, serrate tra di loro mediante tiranti. Le cavità tra le piastre sono percorse alternativamente dal fluido caldo e da quello freddo, che si scambiano calore attraverso le piastre stesse. Si possono assemblare modularmente un numero arbitrario di piastre, fino a raggiungere la superficie di scambio desiderata. Inoltre, lo scambiatore può essere facilmente smontato per eseguire la pulizia.



**Figura 4:** Schema dei flussi in uno scambiatore a piastre.

Infine, un tipo di scambiatori che coinvolge il passaggio alternato di fluido caldo e di quello freddo attraverso una stessa sezione è quello **rigenerativo**. Il calore viene trasferito in una prima fase dal fluido caldo al materiale che costituisce il rigeneratore (accumulo del calore) e successivamente al fluido freddo quando quest'ultimo rimpiazza quello caldo.

Un parametro che caratterizza lo scambiatore è il rapporto  $\beta$  [ $\text{m}^2/\text{m}^3$ ] tra la superficie di scambio ed il volume dello scambiatore. Si parla di scambiatori *compatti* quando  $\beta$  è superiore a  $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$ . Ad esempio, i radiatori di automobili hanno  $\beta \approx 1000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ; i polmoni umani (in cui si realizza scambio di massa oltre che di calore) arrivano al massimo valore di  $\beta \approx 20000 \text{ m}^2/\text{m}^3$ .

## 2. Il coefficiente di scambio termico globale

La potenza termica scambiata tra due fluidi mantenuti a temperatura costante  $T_c$  (fluido caldo) e  $T_f$  (fluido freddo), separati da una parete solida, è data da:

$$W_t = u A (T_c - T_f) \quad [\text{W}]$$

dove  $A$  è la superficie attraverso cui avviene lo scambio ed  $u$  è il cosiddetto **coefficiente di scambio termico globale** o **conduttanza termica unitaria** ( $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ). Come già esposto nel Cap.2, l'analogia con la legge di Ohm consente di introdurre la **resistenza termica totale**  $R_t$  legata al coefficiente di scambio termico globale attraverso la seguente formula:

$$R_t = \frac{1}{u A} \quad (\Rightarrow W_t = \frac{T_c - T_f}{R_t}) \quad [\text{K/W}]$$

Andiamo ora a mostrare le diverse tipologie che possono presentarsi per il calcolo della resistenza termica globale (e quindi di  $u$ ) negli scambiatori di calore.

- *Caso di parete di separazione piana* (vedi figura 5):

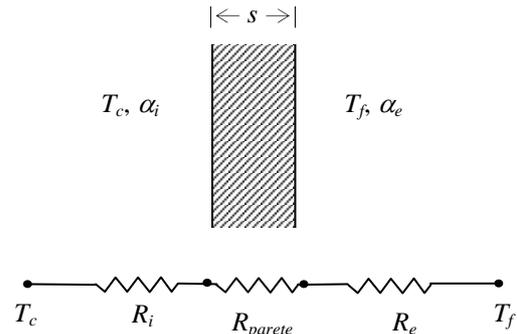
$$R_t = \frac{1}{uA} = R_i + R_{parete} + R_e = \frac{1}{\alpha_i A} + \frac{s}{kA} + \frac{1}{\alpha_e A}$$

dove  $s$  è lo spessore della parete,  $k$  è la conducibilità termica della parete e  $\alpha_i$  ed  $\alpha_e$  rappresentano, rispettivamente, il coefficiente di scambio termico convettivo interno ed esterno.

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i A}$$

$$R_{parete} = \frac{s}{kA}$$

$$R_e = \frac{1}{\alpha_e A}$$



**Figura 5:** Resistenza termica totale nel caso di parete di separazione piana.

- *Caso di parete di separazione cilindrica* (vedi figura 6): bisogna considerare che in generale l'area di scambio termico esterna è diversa da quella interna e che l'area da introdurre all'interno della resistenza termica conduttiva è un'opportuna media (logaritmica) tra queste due.

$$R_t = \frac{1}{u_i A_i} = \frac{1}{u_e A_e} = \frac{1}{\alpha_i A_i} + \frac{s}{k \bar{A}} + \frac{1}{\alpha_e A_e}$$

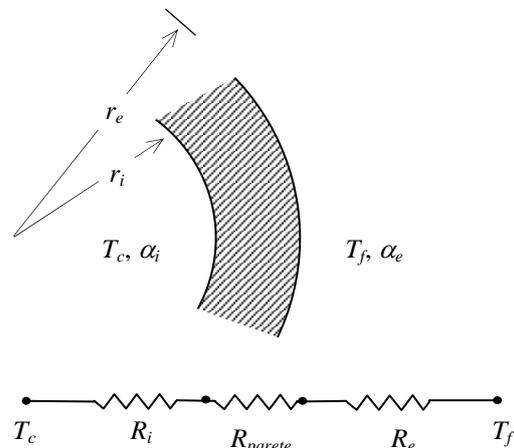
dove in questo caso  $s = r_e - r_i$  ed  $\bar{A}$  è la media logaritmica tra l'area esterna e quella interna, data da:

$$\bar{A} = \frac{A_e - A_i}{\ln A_e - \ln A_i} = \frac{2\pi(r_e - r_i)L}{\ln(r_e/r_i)}$$

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i A_i}$$

$$R_{parete} = \frac{s}{k \bar{A}} = \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi k L}$$

$$R_e = \frac{1}{\alpha_e A_e}$$



**Figura 6:** Resistenza termica totale nel caso di parete di separazione cilindrica.

- *Caso di parete di separazione cilindrica con alettatura esterna* (vedi figura 7): in questo caso l'area da considerare per lo scambio convettivo esterno è un'area efficace, generalmente minore dell'area totale esterna, da calcolare mediante la seguente formula:

$$A_{e, \text{eff}} = A_{e, \text{non alett.}} + \eta_{\text{aletta}} A_{e, \text{alett.}}$$

dove  $\eta_{\text{aletta}}$  è l'efficienza dell'aletta valutabile in funzione della forma e della dimensione dell'aletta tramite diagrammi od appropriate formule (v. Cap.2, App.2). Così facendo si tiene conto delle variazioni di temperatura lungo le alette.

Nel caso di alette anulari all'esterno di un tubo a sezione circolare (vedi figura 6) i parametri da utilizzare per il calcolo dell'area esterna efficace possono essere ottenuti facendo uso delle seguenti formule:

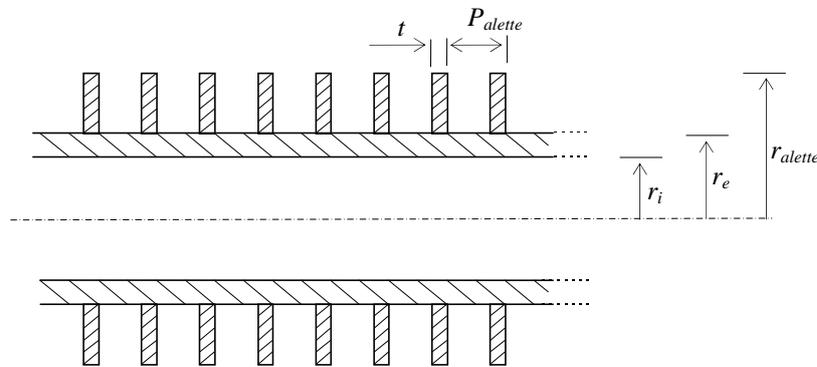
$$A_{e, \text{non alett.}} = 2\pi r_e (P_{\text{alette}} - t) f_{\text{alette}} L$$

$$A_{e, \text{alett.}} = [2\pi (r_{\text{alette}}^2 - r_e^2) + 2\pi r_{\text{alette}} t] f_{\text{alette}} L$$

$$\eta_{\text{aletta}} = \frac{\tanh(b\psi)}{b\psi}; \quad \psi = (1-a)(1-0.35 \log a); \quad a \equiv \frac{r_e}{r_{\text{alette}}}; \quad b \equiv r_{\text{alette}} \sqrt{\frac{2\alpha_e}{k_{\text{alette}} t}}$$

$$\tanh(b\psi) \equiv [\exp(b\psi) - \exp(-b\psi)] / [\exp(b\psi) + \exp(-b\psi)]$$

nelle quali  $f_{\text{alette}}$  sta ad indicare la frequenza delle alette (alette/m), mentre gli altri parametri geometrici sono definiti in figura 7.



**Figura 7:** Caso di parete di separazione cilindrica alettata.

Generalmente le prestazioni di uno scambiatore di calore peggiorano durante il funzionamento a causa dell'accumulo di depositi ed incrostazioni (in inglese **fouling**) sulle superfici di scambio. In un calcolo di verifica si può tener conto di questa degradazione dello scambio termico aggiungendo due **resistenze termiche addizionali** nella serie di resistenze termiche per il calcolo della conduttanza termica globale. In fase di progetto è però difficile prevedere il valore di queste resistenze termiche addizionali per cui si preferisce non tenerne conto nel computo della conduttanza termica globale, ma si sceglie uno scambiatore esistente in commercio avente un'area di scambio maggiore di quella calcolata.

La determinazione del coefficiente di scambio termico globale,  $u$ , può risultare molto rapido allorché si faccia uso dei cataloghi forniti dalle ditte che realizzano gli scambiatori di calore. Infatti, per una data tipologia di scambiatori,  $u$  può essere ricavato da appositi diagrammi in funzione delle portate del fluido freddo e del fluido caldo.

### **ESEMPIO 11.1 – Coefficiente di scambio termico globale**

Il cilindro di un ciclomotore, costruito in lega di alluminio (di conducibilità termica 190 W/(m K)), ha un'altezza pari a 0.16 m, un diametro esterno di 50 mm ed uno spessore di 5 mm. In condizioni tipiche di funzionamento la temperatura del gas contenuto all'interno del cilindro raggiunge valori di circa 1200 °C. Il coefficiente di scambio termico convettivo interno è uguale a 30 W/(m<sup>2</sup> K), mentre quello esterno vale 40 W/(m<sup>2</sup> K). Il cilindro è esposto all'aria ambiente avente una temperatura di 25 °C ed è dotato di alette anulari per aumentare lo scambio termico verso l'esterno. Le alette sono alte 20 mm e sono spesse 3 mm.

Qual'è l'aumento dello scambio termico dovuto alla presenza delle alette? Qual è la temperatura raggiunta sulla superficie interna del cilindro e quella che si raggiungerebbe nel caso di assenza delle alette?

#### *1. Cilindro senza alettatura*

In questa configurazione l'area interna e l'area esterna valgono:

$$A_i = 2\pi r_i L = 0.020 \text{ m}^2$$

$$A_e = 2\pi r_e L = 0.025 \text{ m}^2$$

Le singole resistenze termiche sono date da:

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i A_i} = 1.67 \text{ K/W}; \quad R_{\text{parete}} = \frac{s}{k A} = \frac{\log(r_e / r_i)}{2\pi k L} = 1.17 \cdot 10^{-3} \text{ K/W}; \quad R_e = \frac{1}{\alpha_e A_e} = 1.00 \text{ K/W}$$

La resistenza termica totale è data dalla somma delle tre resistenze calcolate in precedenza:

$$R_{\text{tot}} = R_i + R_{\text{parete}} + R_e = 2.67 \text{ K/W}$$

Si dispone quindi di tutte le informazioni necessarie per il calcolo della potenza termica scambiata dall'interno del cilindro verso l'esterno e della temperatura della parete interna:

$$W_t = \frac{T_c - T_f}{R_{\text{tot}}} = 440.1 \text{ W}; \quad T_{\text{parete}} = T_c - W_t R_i = 465 \text{ °C}$$

#### *2. Cilindro con alettatura*

In questa configurazione l'area interna è la stessa di quella valutata nella precedente configurazione mentre l'area esterna della zona non alettata e di quella alettata valgono, rispettivamente:

$$A_{e,\text{non alett.}} = 2\pi r_e (P_{\text{alette}} - t) f_{\text{alette}} L = 0.0214 \text{ m}^2$$

$$A_{e,\text{alett.}} = [2\pi (r_{\text{alette}}^2 - r_e^2) + 2\pi r_{\text{alette}} t] f_{\text{alette}} L = 0.0772 \text{ m}^2$$

L'efficienza delle alette calcolata mediante l'apposita formula e l'area esterna efficace valgono:

$$\eta_{aletta} = \frac{\tanh(b\psi)}{b\psi} = 0.97$$

$$A_{e,eff} = A_{e,non\ alett.} + \eta_{aletta} A_{e,alett.} = 0.0928 \text{ m}^2$$

A questo punto è possibile rideterminare il valore della resistenza termica totale:

$$R_e = \frac{1}{\alpha_e A_{e,eff}} = 0.26 \text{ K/W} \Rightarrow R_{tot} = R_i + R_{parete} + R_e = 1.93 \text{ K/W}$$

La potenza termica scambiata dall'interno del cilindro verso l'esterno e la temperatura della parete interna valgono:

$$W_t = \frac{T_c - T_f}{R_{tot}} = 608.8 \text{ W}; \quad T_{parete} = T_c - W_t R_i = 183 \text{ }^\circ\text{C}$$

E' questo il motivo per il quale il cilindro non fonde, pur avendo al suo interno un fluido alla temperatura di 1200 °C.

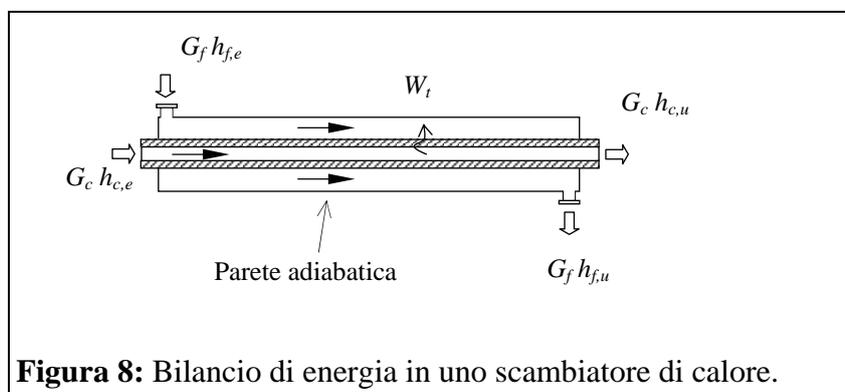
□

### 3. Il dimensionamento degli scambiatori di calore

Lo scopo del presente paragrafo è quello di fornire le nozioni necessarie per eseguire sia il calcolo termico di progetto che il calcolo termico di verifica di uno scambiatore di calore.

- Il **calcolo termico di progetto** ha come scopo quello di dimensionare e di scegliere opportunamente uno scambiatore che deve realizzare il voluto scambio termico tra due fluidi di cui sono note: a) le *portate massiche* b) le *temperature di ingresso* e c) di cui è prescritta *una temperatura* di uscita (desiderata). Il calcolo consiste allora nel selezionare un tipo di scambiatore di calore e nel determinare l'area di scambio termico  $A$  necessaria per ottenere la desiderata temperatura di uscita.
- Il **calcolo termico di verifica** viene eseguito su uno scambiatore già esistente di cui sono note a) l'*area totale di scambio termico*, b) le *portate massiche*, c) le *temperature di ingresso* dei due fluidi. In questo caso l'obiettivo è quello di determinare la potenza termica scambiata e le temperature di uscita dei due fluidi.

Il calcolo termico degli scambiatori avviene normalmente facendo uso delle equazioni di bilancio della massa e dell'energia. Come già esposto nel Cap.5, queste equazioni vengono normalmente ricavate considerando gli scambiatori di calore come sistemi aperti a regime, globalmente adiabatici. Applicando le equazioni di bilancio di massa e di energia al fluido



**Figura 8:** Bilancio di energia in uno scambiatore di calore.

caldo ed al fluido freddo (vedi figura 8) si ottengono le seguenti formule per il calcolo della potenza termica globale,  $W_t$ . In esse, i pedici  $c$  ed  $f$  si riferiscono rispettivamente ai fluidi caldo e freddo e i pedici  $e$  ed  $u$  all'entrata e all'uscita.

$$W_t = G_c (h_{c,e} - h_{c,u})$$

$$W_t = G_f (h_{f,u} - h_{f,e})$$

Nell'ipotesi che i due fluidi non subiscono cambiamenti di fase e che i corrispondenti calori specifici e pressioni siano costanti, le equazioni precedenti divengono:

$$W_t = G_c c_{p,c} (T_{c,e} - T_{c,u})$$

$$W_t = G_f c_{p,f} (T_{f,u} - T_{f,e})$$

Nello studio degli scambiatori di calore è utile riferirsi alla cosiddetta **portata termica (oraria)**,  $C$ , data dal prodotto tra la portata massica ed il calore specifico:

$$C_c = G_c c_{p,c}; \quad C_f = G_f c_{p,f} \quad [\text{W/K}]$$

In tal caso le due equazioni di bilancio precedenti possono scriversi nella seguente forma:

$$\boxed{W_t = C_c (T_{c,e} - T_{c,u})}; \quad \boxed{W_t = C_f (T_{f,u} - T_{f,e})}$$

A queste *due* equazioni di bilancio energetico, si può aggiungere *una equazione di scambio termico*; quest'ultima associa la potenza termica scambiata tra i due fluidi alle temperature di ingresso e/o di uscita, alle portate, al coefficiente di scambio termico globale ed all'area di scambio. Nel seguito, vengono esposti due differenti metodi per ottenere un'equazione di scambio termico da associare alle due equazioni di bilancio dell'energia viste precedentemente. Il primo è il **metodo della media logaritmica delle differenze di temperatura** (o MLDT) ed il secondo è il **metodo  $\epsilon$ -NUT**. Per farne uso, si suppone inoltre che la conduttanza termica unitaria rimanga costante lungo tutta la parete dello scambiatore.

E' importante notare che, avendo a disposizione solo *tre* equazioni *indipendenti* (i bilanci energetici per i due fluidi e l'equazione di scambio termico), si possono ricavare al massimo *tre variabili incognite* dello scambiatore tra: le quattro temperature, le due portate, la potenza scambiata e la superficie di scambio.

**Metodo della media logaritmica delle differenze di temperatura (MLDT o in inglese LMTD)**

In questo caso la potenza termica scambiata tra i due fluidi viene legata alla differenza di temperatura tra il fluido caldo ed il fluido freddo,  $\Delta T = T_c - T_f$ , ovvero (v. Cap.2)

$$W_t = u A (T_c - T_f) = u A \Delta T$$

Tuttavia, poiché  $\Delta T$  varia con la posizione all'interno dello scambiatore di calore è necessario utilizzare una differenza di temperatura opportunamente mediata. Nel caso degli scambiatori di calore ad equicorrente o a controcorrente, se la conduttanza di parete non varia lungo la superficie, si può dimostrare che la differenza di temperatura da utilizzare è la media logaritmica tra le differenze esistenti a monte ed a valle dello scambiatore ottenendo così la seguente equazione di scambio termico:

$$W_t = u A \Delta T_{ml}$$

dove 
$$\Delta T_{ml} \equiv \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}$$

$$\Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,e}; \quad \Delta T_2 = T_{c,u} - T_{f,u} \quad (\text{scamb. equicorrente})$$

$$\Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,u}; \quad \Delta T_2 = T_{c,u} - T_{f,e} \quad (\text{scamb. controcorrente})$$

Per gli altri tipi di scambiatore, l'effettiva differenza media di temperatura da utilizzare nell'equazione di scambio termico è data dal prodotto di quella ottenuta come media logaritmica (come se lo scambiatore fosse a controcorrente) per un **fattore di correzione**,  $F$ , minore di uno:

$$\boxed{W_t = u A \Delta T_{ml} F}$$

Il fattore di correzione dipende dal tipo di scambiatore e dalle temperature di ingresso e di uscita dei due fluidi. Esso è quindi diagrammato per ogni scambiatore di calore in funzione delle temperature dei due fluidi (vedi figura 9).

Il metodo MLDT viene utilizzato per l'analisi degli scambiatori di calore quando si conosce, oltre alle temperature di entrata e alle portate dei due fluidi, almeno una temperatura di uscita (oppure quando si conosce, oltre alle temperature di entrata e di uscita dei due fluidi, almeno una portata), ovvero nel caso del problema *di progetto*. La procedura di calcolo è la seguente:

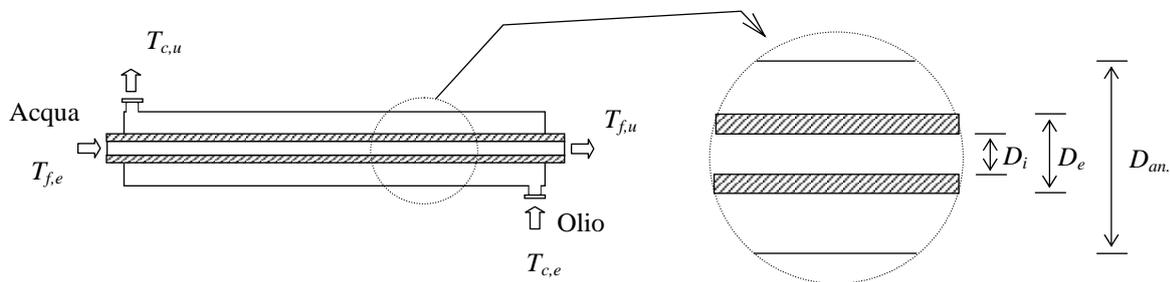
1. si determina la potenza termica scambiata facendo uso di una delle due equazioni di bilancio dell'energia, in cui tutti gli altri termini siano noti.
2. con tale valore di potenza termica, si determina l'eventuale temperatura di uscita (o l'eventuale portata) incognita facendo uso della seconda delle due equazioni di bilancio dell'energia;
3. si calcola la differenza di temperatura media logaritmica e, una volta scelto il tipo di scambiatore di calore da utilizzare, si individua il valore del fattore di correzione;
4. si determina il valore del coefficiente di scambio termico globale mediante tabelle o correlazioni di scambio termico;
5. si calcola l'area della superficie di scambio termico facendo uso dell'equazione di scambio termico;
6. si ordina quindi uno scambiatore di calore del tipo stabilito con una superficie di scambio uguale o superiore a quella calcolata.

Un secondo tipo di calcolo termico (problema *di esercizio*) per gli scambiatori di calore è la determinazione della potenza termica scambiata e delle temperature di uscita, note le temperature di ingresso e le portate dei due fluidi e noto il tipo di scambiatore nonché la superficie di scambio termico (calcolo termico di verifica). In questo caso si potrebbe ancora utilizzare il metodo MLDT, ma la soluzione è più complicata dato che, essendovi due temperature incognite, le tre equazioni non possono essere risolte una alla volta. Un metodo molto semplice per risolvere un problema di questo tipo è, invece, il metodo  $\epsilon$ -NUT che analizzeremo nel seguito.

**ESEMPIO 11.2 – Metodo MLDT**

Uno scambiatore a controcorrente è usato per refrigerare l'olio di lubrificazione di una grande turbina a gas di tipo industriale. L'acqua usata come refrigerante attraversa il tubo interno con una portata di 0.2 kg/s, mentre l'olio viene fatto passare nella regione anulare con una portata di 0.1 kg/s. L'olio e l'acqua entrano alla temperatura di 100 e 30 °C, rispettivamente. Il tubo interno è un tubo in acciaio ¾" schedula 5S (tubi ANSI), mentre il tubo esterno ha un diametro di 45 mm. Determinare la lunghezza del tubo affinché la temperatura di uscita dell'olio sia di 60 °C.

(Proprietà: per l'olio di lubrificazione ad una temperatura media di 80 °C corrispondono le seguenti proprietà:  $c_p = 2131 \text{ J/(kg K)}$ ,  $\mu = 3.25 \cdot 10^{-2} \text{ (Pa s)}$ ,  $k = 0.138 \text{ W/(mK)}$ ; per l'acqua di refrigerazione ad una temperatura di 30 °C corrispondono le seguenti portate:  $c_p = 4178 \text{ J/(kg K)}$ ,  $\mu = 725 \cdot 10^{-6} \text{ (Pa s)}$ ,  $k = 0.625 \text{ W/(mK)}$ ,  $Pr = 4.85$ ; dalle tabelle ANSI si trova che il tubo in acciaio ha un diametro esterno di 26.67 mm ed uno spessore di 1.65 mm, la sua conducibilità termica è pari a circa 50 W/(mK))



Si tratta di un tipico calcolo termico di progetto. La potenza termica scambiata tra i due fluidi può essere ottenuta dall'equazione di bilancio dell'energia per il fluido caldo:

$$W_t = G_c c_{p,c} (T_{c,e} - T_{c,u}) = 8524 \text{ W}$$

La temperatura con la quale l'acqua fuoriesce dallo scambiatore di calore può essere determinato mediante l'equazione di bilancio dell'energia per il fluido freddo:

$$T_{f,u} = T_{f,e} + \frac{W_t}{G_f c_{p,f}} = 40.2 \text{ °C}$$

Per poter determinare l'area di scambio termico necessaria, mediante l'equazione di scambio MLDT, è necessario ricavare il coefficiente di scambio termico globale,  $u$ . A tal fine occorre innanzitutto calcolare i coefficienti di scambio termico convettivi lato interno,  $\alpha_i$ , e lato esterno,  $\alpha_e$ .

Per il flusso di acqua all'interno del tubo si ha:

$$Re = \frac{\rho_f v_f D_i}{\mu_f} = \frac{4G_f}{\pi D_i \mu_f} = 15029$$

Essendo il flusso di tipo turbolento e pienamente sviluppato il coefficiente di scambio termico può essere determinato mediante la correlazione di Colburn

$$Nu_i = 0.023 Re^{0.8} Pr_f^{1/3} = 85.5$$

da cui:

$$\alpha_i = Nu_i \frac{k_f}{D_i} = 2287 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Per il flusso di olio nella regione anulare del tubo il diametro idraulico da utilizzare per il calcolo del numero di Reynolds è:

$$D_h = D_{an.} - D_e = 18.33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Il numero di Reynolds vale:

$$Re = \frac{\rho_c v_c D_h}{\mu_c} = \frac{\rho_c D_h}{\mu_c} \frac{4G_c}{\rho_c \pi (D_{an.}^2 - D_e^2)} = 55$$

Il flusso anulare è, quindi, di tipo laminare ed il numero di Nusselt è in queste condizioni pressoché costante ed uguale a circa 4. Il coefficiente di scambio termico lato esterno vale quindi:

$$\alpha_e = Nu_e \frac{k_c}{D_h} = 30 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Nel paragrafo 2 si è visto che il coefficiente di scambio termico globale può essere determinato mediante la seguente relazione

$$R_t = \frac{1}{u_i A_i} = \frac{1}{u_e A_e} = R_i + R_{parete} + R_e$$

dove:

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i A_i} = \frac{1}{\alpha_i \pi D_i L} = \frac{5.96 \cdot 10^{-3}}{L}$$

$$R_{parete} = \frac{\log(D_e / D_i)}{2\pi k_{parete} L} = \frac{4.20 \cdot 10^{-4}}{L}$$

$$R_e = \frac{1}{\alpha_e A_e} = \frac{1}{\alpha_e \pi D_e L} = \frac{3.98 \cdot 10^{-1}}{L}$$

Come si può notare la resistenza termica dominante risulta essere quella esterna e le altre possono essere trascurate. In definitiva si ha:

$$R_t = \frac{1}{u_e A_e} \cong R_e \Rightarrow u_e \cong \frac{1}{R_e A_e} = \alpha_e = 30 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

A questo punto siamo in grado di poter applicare l'equazione di scambio termico per ricavare la lunghezza del tubo:

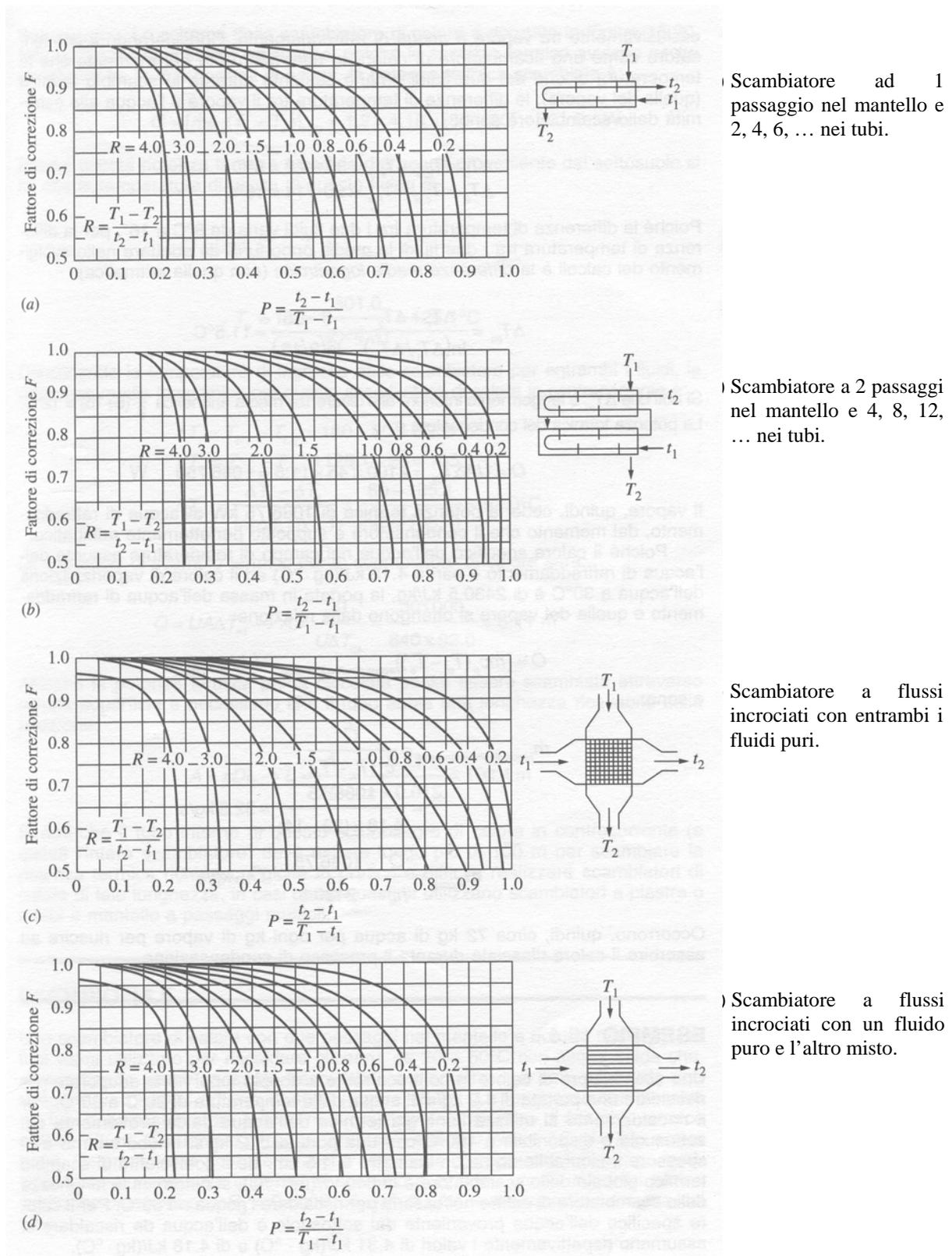
$$L = \frac{W_t}{u_e \pi D_e \Delta T_{ml}} = 78.5 \text{ m}$$

□

### **Metodo $\varepsilon$ -NUT (in inglese $\varepsilon$ -NTU)**

Per ottenere un'espressione dell'equazione di scambio termico che non comprenda alcuna temperatura di uscita si definisce l'**efficienza** di uno scambiatore,  $\varepsilon$ , il rapporto tra la potenza termica effettivamente scambiata nello scambiatore e la massima potenza termica scambiabile:

$$\varepsilon \equiv \frac{W_t}{W_{t,max}} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$



**Figura 9:** Fattore di correzione per differenti tipologie di scambiatori.

La massima potenza termica scambiabile è quella realizzabile in uno scambiatore in cui il fluido di minore portata termica subisce il massimo salto di temperatura possibile senza violare il secondo principio della termodinamica, e questo si verifica quando esso esce dallo scambiatore ad una temperatura pari a quella di ingresso del secondo fluido. In altre parole

$$W_{t,max} = C_{\min} (T_{c,e} - T_{f,e})$$

Tale potenza sarebbe ottenibile con uno scambiatore di calore in controcorrente con una superficie di scambio infinita; in questo scambiatore la temperatura di uscita del fluido freddo uguaglia quella di ingresso del fluido caldo quando  $C_c > C_f$ , mentre la temperatura di uscita del fluido caldo uguaglia la temperatura di ingresso del fluido freddo quando  $C_c < C_f$ ; in definitiva si ha:

$$W_{t,max} = C_f (T_{c,e} - T_{f,e}) \quad (\text{se } C_c > C_f)$$

$$W_{t,max} = C_c (T_{c,e} - T_{f,e}) \quad (\text{se } C_c < C_f)$$

Le due relazioni precedenti possono essere riassunte nell'unica relazione esposta in precedenza.

Se si conoscono l'efficienza e le temperature di ingresso dello scambiatore allora la potenza termica scambiata può essere calcolata mediante la seguente equazione di scambio:

$$W_t = \varepsilon C_{\min} (T_{c,e} - T_{f,e})$$

Per una data tipologia di scambiatori di calore si può dimostrare che l'efficienza è esprimibile in funzione di due parametri adimensionali:

$$\varepsilon = f(NUT, C)$$

dove  $NUT$  è chiamato **numero di unità di trasmissione del calore**, definito come:

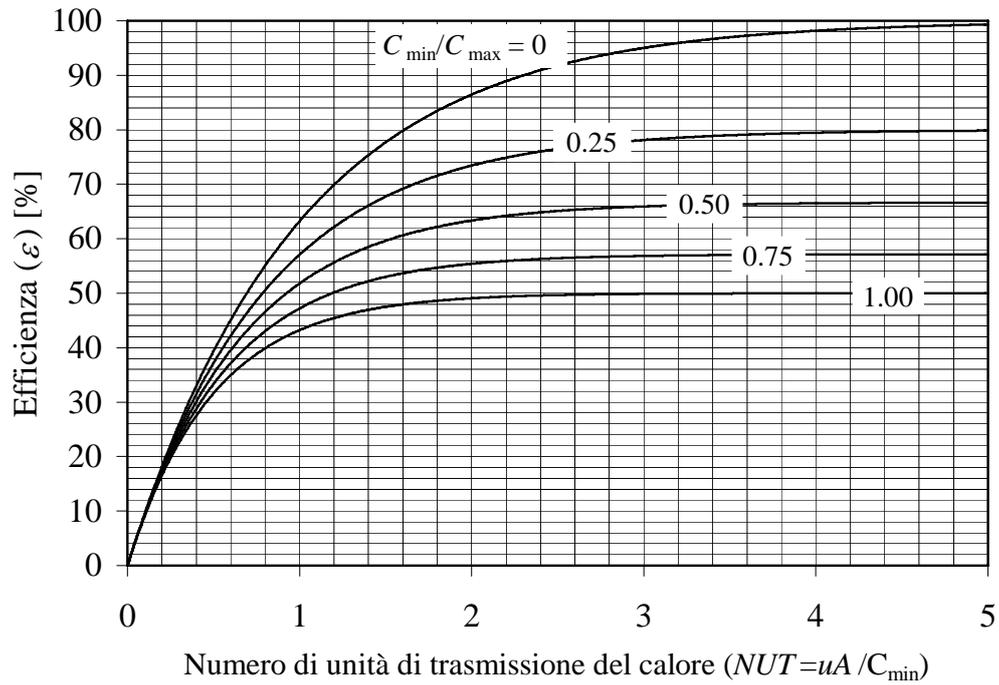
$$NUT \equiv \frac{u A}{C_{\min}} = \frac{1}{R_t C_{\min}}$$

mentre  $C$  è il rapporto tra le portate termiche dei due fluidi:

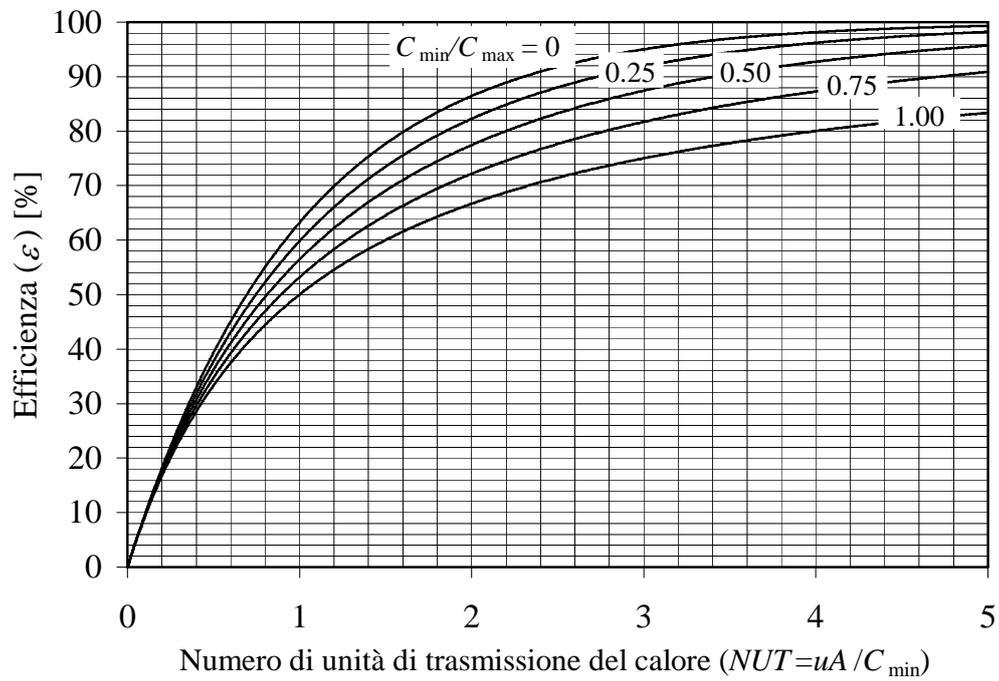
$$C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$$

L'efficienza di uno scambiatore di calore può essere ricavata da appositi diagrammi (vedi figure dalla 10 alla 15) in funzione dei due parametri suddetti.

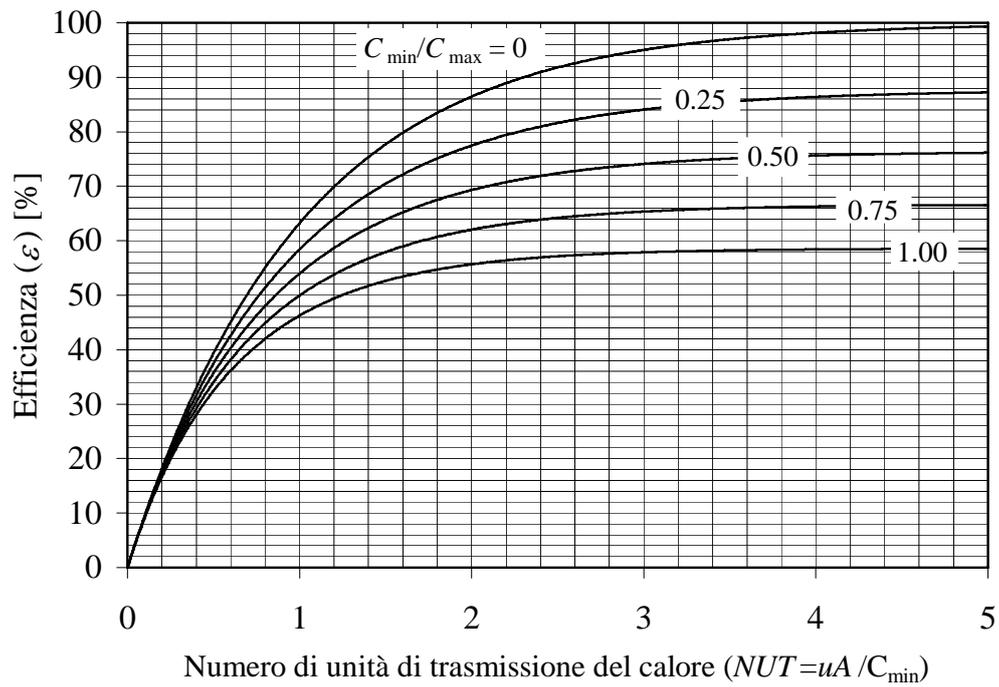
Il metodo  $\varepsilon$ - $NUT$  può essere applicato indifferentemente sia per calcoli di progetto che di verifica senza richiedere procedimenti iterativi: nel primo caso, nota  $\varepsilon$ , si ricava  $NUT$ , da cui si ottiene la superficie di scambio; nel secondo, noto  $NUT$ , si ricava  $\varepsilon$ , da cui si determina la potenza scambiata.



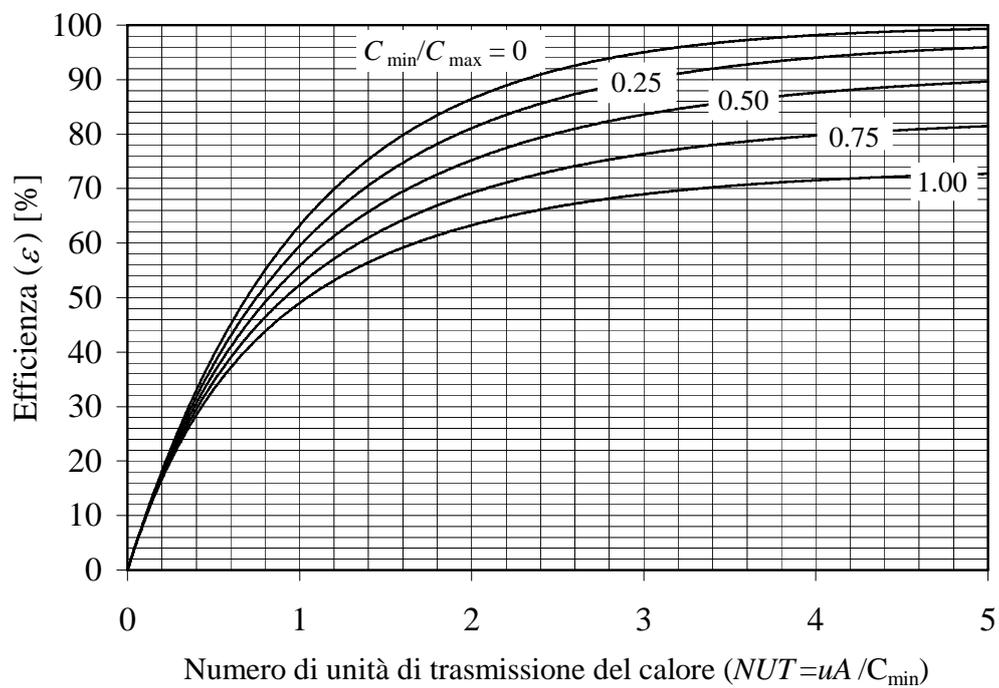
**Figura 10:** Efficienza di uno scambiatore di calore ad equicorrente.



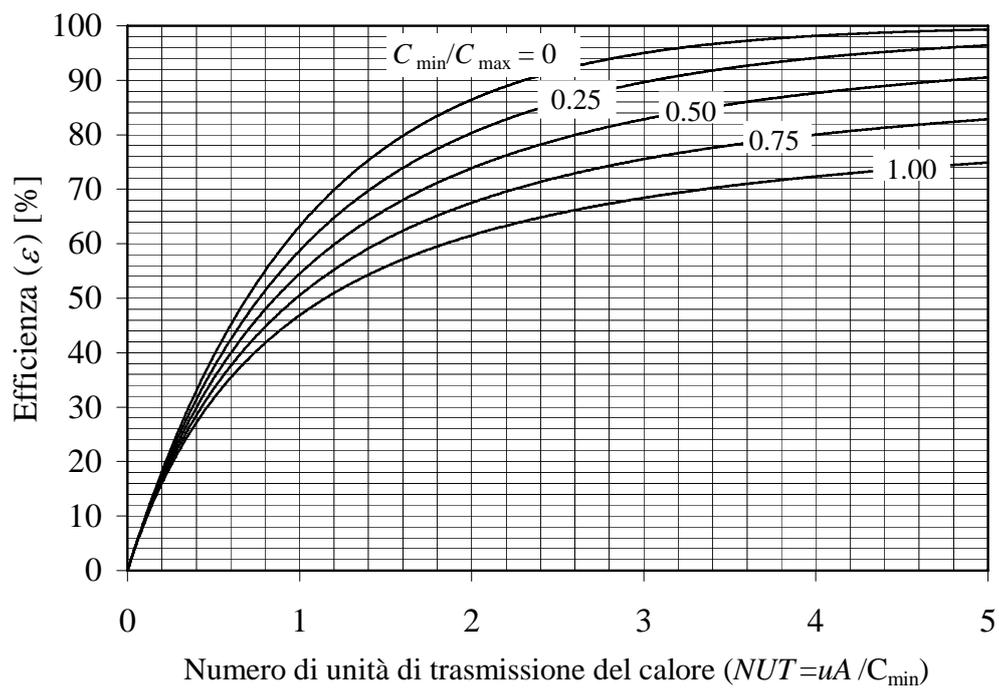
**Figura 11:** Efficienza di uno scambiatore di calore a controcorrente.



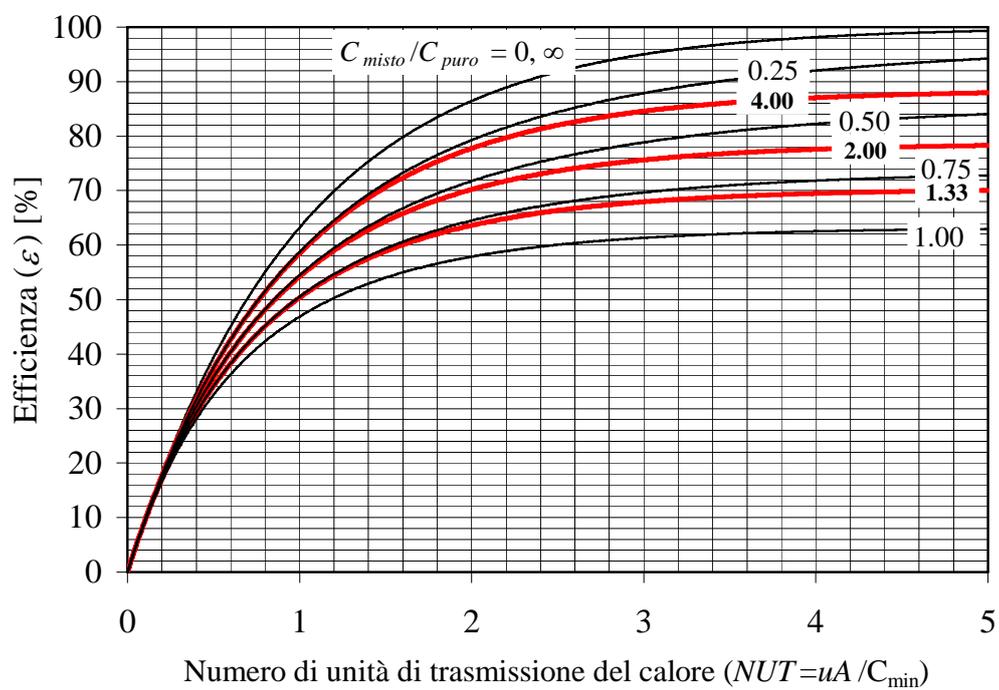
**Figura 12:** Efficienza di uno scambiatore ad 1 passaggio nel mantello e 2, 4, 6, ... nei tubi.



**Figura 13:** Efficienza di uno scambiatore a 2 passaggi nel mantello e 4, 8, 12, ... nei tubi.



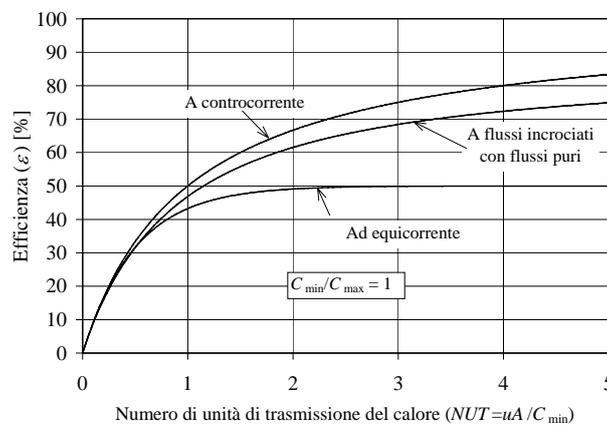
**Figura 14:** Efficienza di uno scambiatore a flussi incrociati con entrambi i fluidi puri.



**Figura 15:** Efficienza di uno scambiatore a flussi incrociati con un fluido puro e l'altro misto.

Relativamente all'efficienza di uno scambiatore di calore, si possono fare le osservazioni riportate nel seguito.

- L'efficienza aumenta rapidamente per piccoli valori del  $NUT$  (fino a  $NUT = 1.5$ ) e piuttosto lentamente per grandi valori. Per questo motivo l'uso di scambiatori di calore con valori di  $NUT$  maggiori di 3 e quindi con grandi dimensioni può non essere economicamente conveniente.
- Per un dato  $NUT$  e  $C$  l'efficienza maggiore è quella relativa ad uno scambiatore a controcorrente seguito da vicino da uno scambiatore di calore a flussi incrociati con entrambi i flussi puri (vedi figura 16); il più basso valore dell'efficienza lo si ottiene invece con uno scambiatore ad equicorrente.
- L'efficienza è indipendente dal rapporto delle capacità  $C$  per valori di  $NUT$  minori di circa 0.3 (vedi figura 16).

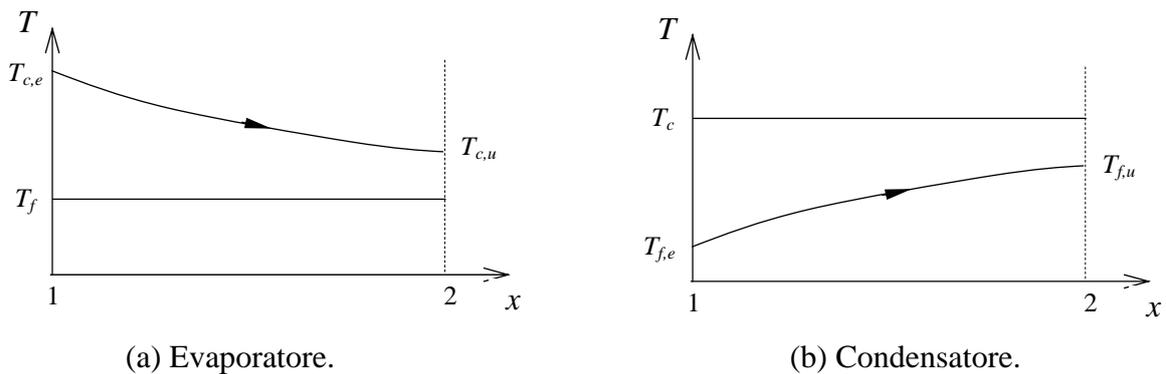


**Figura 16:** Confronto dell'andamento dell'efficienza per tre differenti tipi di scambiatore di calore.

- Per un dato  $NUT$  l'efficienza diventa massima per  $C = 0$  e minima per  $C = 1$ . Il caso  $C = 0$ , corrispondente ad avere  $C_{max} = \infty$ , è realizzato quando uno dei due fluidi nell'attraversare lo scambiatore di calore subisce cambiamento di fase (in questo caso la distribuzione di temperatura è quella mostrata in figura 17). Per  $C = 0$  l'andamento dell'efficienza è sempre lo stesso qualsiasi sia la tipologia degli scambiatori di calore. In particolare la relazione per l'efficienza si riduce alla

$$\epsilon = 1 - \exp(-NUT)$$

Per quanto detto al punto precedente, tale espressione è comunque valida per qualunque valore di  $C$  e per qualunque scambiatore se  $NUT < 0.3$ .



**Figura 17:** Andamento delle temperature quando un fluido subisce cambiamento di fase.

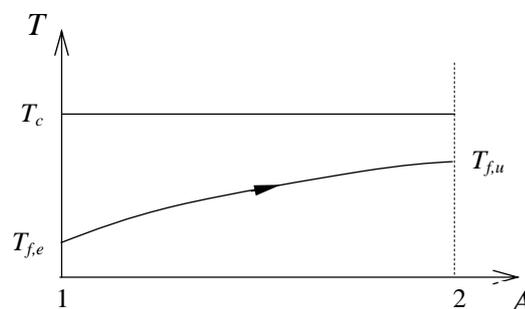
La scelta di uno scambiatore di calore oltre a richiedere un calcolo termico può richiedere anche altre considerazioni quali quelle legate al costo (economiche), all'ingombro, alla facilità di impiego, all'affidabilità, al livello di rumorosità, alla resistenza meccanica (sollecitazioni dovute alla pressione dei fluidi ed alle dilatazione termiche differenziali), ecc..

### **ESEMPIO 11.3 - Metodo $\epsilon$ -NUT**

In un ciclo Rankine, una portata di vapore pari a 1.5 kg/s lascia la turbina come vapore saturo secco alla pressione di 0.08 bar. Il vapore viene condensato a liquido saturo facendolo passare all'esterno dei tubi di uno scambiatore a tubi e mantello, mentre l'acqua liquida di refrigerazione, avente una temperatura di ingresso di 290 K viene fatta passare attraverso l'interno dei tubi. Il condensatore contiene 100 tubi molto sottili, ciascuno di 10 mm di diametro e la portata totale di acqua attraverso i tubi è uguale a 80 kg/s. Il coefficiente di scambio termico medio associato con la condensazione sulla superficie esterna dei tubi vale 5000 W/(m<sup>2</sup> K). Si determini:

1. la potenza termica scambiata tra i due fluidi;
2. la temperatura di uscita dell'acqua di refrigerazione;
3. la lunghezza richiesta per ogni singolo tubo, supposti tutti uguali.

Per le proprietà dell'acqua di refrigerazione si assumano i seguenti valori:  $c_p = 4186$  J/(kg K),  $\mu = 700 \cdot 10^{-6}$  (Pa s),  $k = 0.628$  W/(m K) e  $Pr = 4.6$ ; per le proprietà del vapore saturo si faccia uso delle tabelle termodinamiche.



In corrispondenza di una pressione di 0.08 bar il vapore saturo possiede le seguenti proprietà: temperatura di 314.7 K, entalpia del liquido saturo di 173837 J/kg ed entalpia del vapore saturo secco di 2576907 J/kg. La potenza termica scambiata tra i due fluidi vale quindi

$$W_t = G_c (h_{c,e} - h_{c,u}) = 3604605 \text{ W}$$

Nota la potenza termica, si può ricavare facilmente la temperatura di uscita dell'acqua di refrigerazione:

$$T_{f,u} = T_{f,e} + \frac{W_t}{G_f c_{pf}} = 300.8 \text{ K}$$

Ricaviamoci l'area di scambio termico con il metodo  $\varepsilon$ -NUT; in questo caso, dato che uno dei due fluidi cambia fase, si ha  $C_{max} = \infty$ ,  $C_{min}/C_{max} = 0$ ; si ha inoltre

$$C_{min} = 4186 \cdot 80 = 334.88 \text{ W/K}$$

si trova poi l'efficienza dello scambiatore:

$$\varepsilon = \frac{W_t}{W_{t,max}} = \frac{W_t}{C_{min} (T_{c,e} - T_{f,e})} = 0.44$$

A questo punto è possibile ricavare il numero di unità di trasmissione del calore attraverso l'apposita formula (od un qualsiasi diagramma, dato che tutte le curve coincidono per  $C_{min}/C_{max} = 0$ ):

$$NUT = -\ln(1 - \varepsilon) = 0.58$$

Prima di ricavare l'area è necessario determinare anche il coefficiente di scambio termico globale  $u$ :

$$\frac{1}{uA} = \frac{1}{\alpha_i A} + \frac{1}{\alpha_e A}$$

dove si è trascurata la resistenza termica conduttiva della parete dei tubi, supposti sottili. Il coefficiente di scambio termico esterno,  $\alpha_e$ , è dato, mentre quello interno deve essere determinato mediante un'opportuna correlazione di scambio termico per convezione. Il numero di Reynolds per l'acqua che passa all'interno dei tubi (tenendo conto che vi sono 100 tubi) vale:

$$Re \equiv \frac{\rho_f v_f D}{\mu_f} = \frac{4}{\mu_f \pi D} \left( \frac{G_f}{100} \right) = 145513$$

Lo scambio termico avviene all'interno dei tubi per convezione forzata. Adottando la correlazione di Colburn si ottiene il seguente valore del numero di Nusselt:

$$Nu_i = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.333} = 516.4$$

Il coefficiente di scambio termico convettivo interno vale quindi:

$$\alpha_i = Nu_i \frac{k_f}{D} = 32430 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$$

A questo punto è possibile ricavare il coefficiente di scambio termico globale:

$$\frac{1}{uA} = \frac{1}{\alpha_i A} + \frac{1}{\alpha_e A} \Rightarrow u = \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_e} \right)^{-1} = 4332 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

Che, come era lecito aspettarsi, è molto vicino al minore dei due, ovvero quello esterno. Dalla definizione del numero di unità di trasmissione del calore si ottiene la seguente espressione per il calcolo dell'area della superficie di scambio termico:

$$NUT = \frac{uA}{C_{min}} \Rightarrow A = \frac{NUT C_{min}}{u} = 44.8 \text{ m}^2$$

La lunghezza di ogni singolo tubo vale quindi:

$$L = \frac{A}{\pi D N} = 14.3 \text{ m}$$

□

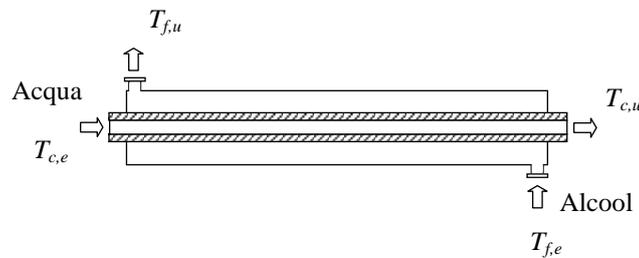
#### ESEMPIO 11.4 - Metodo MLDT ed $\epsilon$ -NUT

Uno scambiatore di calore di un impianto chimico è usato per riscaldare alcool etilico ( $c_{p,f} = 2670 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ ) da  $25^\circ\text{C}$  a  $70^\circ\text{C}$  ad una portata di  $2.1 \text{ kg/s}$ . Il riscaldamento viene fatto con acqua ( $c_{p,c} = 4190 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ ) che entra nello scambiatore a  $95^\circ\text{C}$  ed esce a  $45^\circ\text{C}$ .

Si determini la potenza termica scambiata tra i due fluidi e la portata di acqua necessaria per il processo.

Nell'ipotesi che il coefficiente di scambio termico globale sia pari a  $800 \text{ W/(m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$ , calcolare l'area della superficie di scambio termico nei seguenti due casi (si usi sia il metodo MLDT che il metodo  $\epsilon$ -NUT):

1. scambiatore in controcorrente;
2. scambiatore a tubi e mantello con 2 passaggi nel mantello ed 8 nei tubi (l'acqua entra nel mantello).



Si tratta di un tipico calcolo termico di progetto. La potenza termica scambiata dai due fluidi vale:

$$W_t = G_f c_{p,f} (T_{f,u} - T_{f,e}) = 252315 \text{ W}$$

Nota la potenza termica si può ricavare facilmente la portata dell'acqua:

$$W_t = G_c c_{p,c} (T_{c,e} - T_{c,u}) \Rightarrow G_c = \frac{W_t}{c_{p,c} (T_{c,e} - T_{c,u})} = 1.2 \text{ kg/s}$$

##### 1. Scambiatore in controcorrente

Con il metodo MLDT, nota la potenza termica scambiata tra i due fluidi, è facile ottenere l'area della superficie di scambio termico con la seguente formula:

$$A = \frac{W_t}{u \Delta T_{ml}} = 14.1 \text{ m}^2$$

Con il metodo  $\epsilon$ -NUT è necessario trovarsi innanzitutto l'efficienza ed il rapporto tra le capacità termiche orarie:

$$\epsilon = \frac{W_t}{W_{t,\max}} = \frac{W_t}{C_{\min} (T_{c,e} - T_{f,e})} = 0.7143, \quad C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = 0.9$$

A questo punto è possibile ricavare il numero di unità di trasmissione del calore attraverso l'apposita formula (o l'apposito diagramma):

$$NUT = \frac{1}{C-1} \ln \left( \frac{\epsilon-1}{\epsilon C-1} \right) = 2.232 \Rightarrow A = \frac{NUT C_{\min}}{u} = 14.1 \text{ m}^2$$

Si noti come il metodo  $\varepsilon$ -NUT risulti più complesso di quello MLDT. Non è però sempre possibile usare il metodo MLDT in quanto non è detto che si conoscano sempre le temperature di uscita del fluido freddo e del fluido caldo.

## 2. Scambiatore a tubi e mantello con 2 passaggi nel mantello ed 8 nei tubi

Con il metodo MLDT, nota la potenza termica scambiata tra i due fluidi è facile ottenere l'area della superficie di scambio termico con la seguente formula:

$$A = \frac{W_t}{u \Delta T_{ml} F}$$

Il fattore di correzione  $F$  può essere ricavato dall'apposito diagramma. Si ottiene un valore di  $F$  pari a circa 0.81. L'area della superficie di scambio termico è:

$$A = \frac{W_t}{u \Delta T_{ml} F} = 17.4 \text{ m}^2$$

Con il metodo  $\varepsilon$ -NUT è necessario trovarsi innanzitutto l'efficienza ed il rapporto tra le capacità termiche orarie:

$$\varepsilon = \frac{W_t}{W_{t,\max}} = \frac{W_t}{C_{\min} (T_{c,e} - T_{f,e})} = 0.7143, \quad C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = 0.9$$

A questo punto è possibile ricavare il numero di unità di trasmissione del calore attraverso l'apposito diagramma ottenendo un  $NUT$  pari a circa 2.8. L'area della superficie di scambio termico vale:

$$A = \frac{NUT C_{\min}}{u} = 17.6 \text{ m}^2$$

□

## 4. Impianti con scambiatori di calore – Regolazione.

Le prestazioni degli scambiatori che vengono installati non sono esattamente pari a quelle di progetto per una serie di motivi, tra cui i principali sono:

- l'effettiva superficie di scambio non è esattamente pari a quella calcolata in sede di progetto;
- ci sono incertezze nella determinazione del coefficiente di scambio termico globale; più in generale, il metodo di calcolo fa uso di numerose ipotesi semplificative;
- le prestazioni dello scambiatore si degradano nel tempo a causa dello sporco delle superfici (fouling);
- alcuni scambiatori sono sottoposti a variazioni di carico durante l'esercizio.

In tutti questi casi si pone il problema di riportare le condizioni di funzionamento dello scambiatore a quelle nominali mediante organi di regolazione. Generalmente, la regolazione è del tipo *ad anello chiuso*, vale a dire si agisce sull'organo di regolazione (di solito una valvola, nel nostro caso) sulla base dello *scostamento* tra il valore della *variabile di controllo* misurato da un sensore (es. la temperatura di uscita di uno dei due fluidi) ed il valore di riferimento impostato di tale variabile. I dispositivi dedicati a questo compito (controller) possono essere anche molto complessi e la loro trattazione è oggetto dei corsi di regolazione o

di automatica. Le più diffuse soluzioni impiantistiche per la regolazione degli scambiatori agiscono sulla portata di uno dei due fluidi e sono le seguenti:

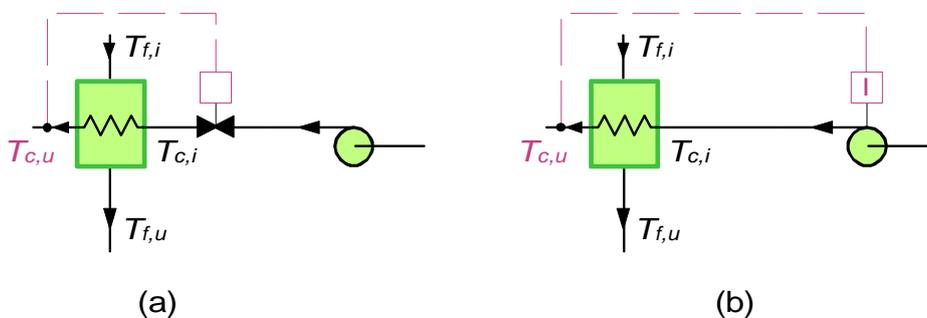
- regolazione di portata tramite valvola a due vie;
- regolazione di portata tramite pompa a velocità variabile;
- regolazione in derivazione a portata costante;
- regolazione in derivazione a temperatura d'ingresso costante.

**Regolazione di portata tramite valvola a due vie**

In questo tipo di regolazione (v. Fig.18-a) la portata viene variata tramite una valvola di regolazione a due vie. Si varia quindi l'efficienza dello scambiatore agendo sia sul rapporto  $C_{min}/C_{max}$ , sia sul valore di  $NUT$  (se la portata regolata corrisponde a  $C_{min}$ ) sia sulla variazione del coefficiente di scambio globale dovuta alla variazione di velocità di uno dei due fluidi. Questa regolazione è di tipo *dissipativo*, in quanto la valvola di regolazione introduce una perdita di carico aggiuntiva, il che comporta un aumento della potenza di pompaggio rispetto al caso in cui la stessa portata fluisca nello scambiatore senza valvola. Questo schema implica i minori costi di impianto tra tutte le soluzioni esposte, tuttavia il campo di regolazione (che dipende dalle caratteristiche della valvola e della pompa) non è in genere molto ampio.

**Regolazione di portata tramite pompa a velocità variabile.**

Per ottenere lo stesso effetto del caso precedente senza introdurre perdite di carico aggiuntive, si può ricorrere ad una pompa a velocità variabile (v. Fig.18-b). La velocità di rotazione della pompa, generalmente azionata da un motore elettrico asincrono monofase o trifase, può essere regolata in modo discontinuo tramite circuiti elettronici (questa soluzione non è adatta per la regolazione ad anello chiuso) od in modo continuo tramite un inverter. I costi sono generalmente maggiori rispetto al caso precedente.



**Figura 18:** Regolazione di portata in uno scambiatore a) tramite valvola a due vie b) tramite pompa a velocità variabile. In questo caso, la variabile regolata è  $T_{c,u}$ .

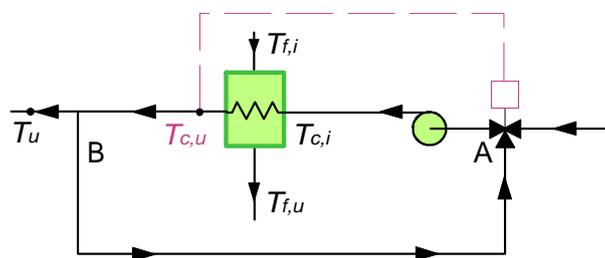
**Regolazione in derivazione a portata costante**

In questa soluzione (v. Fig.19) si introduce un ramo AB di derivazione (o *bypass*) del circuito, e si fa uso di una valvola *a tre vie miscelatrice*: questa valvola miscela due portate in ingresso per ottenere un flusso in uscita il cui valore si mantiene costante. In questo modo, lo scambiatore funziona a portata costante, ma con temperatura in ingresso variabile a seconda della quantità di fluido ricircolata nel ramo AB.

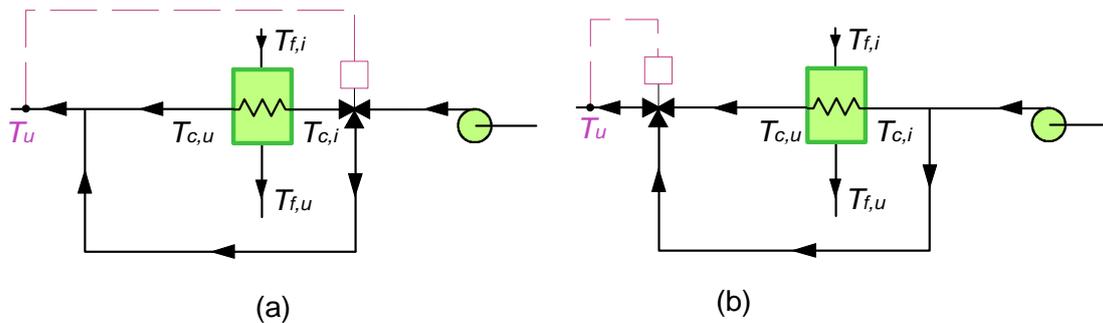
**Regolazione in derivazione a temperatura d'ingresso costante**

In questa soluzione (Fig.20a) si fa uso di una valvola *a tre vie deviatrice*: questa valvola suddivide la portata in ingresso in due flussi in uscita la cui somma si mantiene costante. In questo caso lo scambiatore funziona a portata variabile, ma con temperatura d'ingresso costante. Lo stesso schema si può realizzare inserendo in uscita allo scambiatore una valvola miscelatrice, di minor costo (v. Fig.20b). Questa soluzione è preferibile quando non si vuole variare molto la temperatura media della superficie di scambio. Si noti che in ogni caso di regolazione in derivazione (Fig.19 e 20) la pompa viene piazzata sul ramo del circuito ove circola la portata totale (costante) per non variarne il punto di funzionamento.

La scelta tra l'una o l'altra soluzione impiantistica dipende da un gran numero di fattori, la cui trattazione esula da queste note, tra cui ampiezza del campo di regolazione richiesto, costo di impianto, *layout* dei circuiti.



**Figura 19:** Regolazione di portata in derivazione in uno scambiatore tramite valvola a tre vie a portata costante. In questo caso, la variabile regolata è  $T_{c,u}$  (coincidente con  $T_u$ ) e si fa uso di una valvola miscelatrice.



**Figura 20:** Regolazione di portata in derivazione in uno scambiatore tramite valvola a tre vie a temperatura d'ingresso costante: a) con valvola deviatrice; b) con valvola miscelatrice. In questo caso, la variabile regolata è  $T_u$ .

## BIBLIOGRAFIA

- Y. A. Cengel, “Termodinamica e trasmissione del calore”, *McGraw-Hill*, New York, 1998.
- W. M. Kays, A. L. London, “Compact Heat Exchangers”, *McGraw-Hill*, New York, 1964.
- R. Mastrullo, P. Mazzei, V. Naso e R. Vanoli, “Fondamenti di trasmissione del calore”, Vol. 1, *Liguori editore*, Napoli, 1988.
- F Kreith, “Principi di Trasmissione del calore”, *Liguori editore*, Napoli, 1991.
- J.P. Holman, “Heat Transfer”, *McGraw-Hill*, New York, 1997.

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Cap. 12. Combustibili e combustione

*Nicola Forgione*

*Paolo Di Marco*

*Versione 2005.00 – 5.05.06.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. Gli autori se ne riservano tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore. Gli autori saranno grati a chiunque segnali loro errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

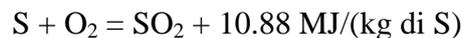
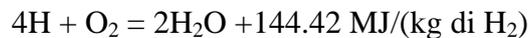
## 1. Definizione

La combustione è una reazione chimica di ossidazione, fra un combustibile ed un comburente (in genere l'ossigeno), con sviluppo di energia termica (ovvero è una reazione esotermica). Da questa reazione si generano nuovi componenti, i prodotti della combustione.

La conoscenza del fenomeno della combustione ha un enorme importanza sia in termini di risparmio energetico che ecologico, per l'inquinamento atmosferico prodotto dai fumi.

## 2. La reazione di combustione

Gli elementi chimici contenuti nei combustibili fossili che reagendo con l'ossigeno danno luogo a reazioni esotermiche sono, principalmente, il carbonio, l'idrogeno e lo zolfo:



Durante il processo di combustione la massa di ciascun elemento rimane invariata per cui può essere eseguito un bilancio di massa che nel caso della reazione di ossidazione del carbonio fornisce:

$$12 \text{ kg di C} + 32 \text{ kg di O} = 44 \text{ kg di CO}_2$$

Quindi, 1 kg di carbonio puro per una combustione stechiometricamente completa richiede  $32/12=2.667$  kg di ossigeno. Essendo poi l'aria costituita da circa il 23,2 % in massa da ossigeno per la combustione di 1 kg di carbonio è necessario, teoricamente,  $2.667/0.232=11.56$  kg di aria. Procedendo in modo analogo si trova che per la combustione di 1 kg di idrogeno puro sono necessari 34.48 kg di aria, mentre per 1 kg di zolfo puro sono necessari 4.31 kg di aria.

Si definisce **aria teorica**,  $a_t$ , la minima quantità di aria necessaria per far avvenire la combustione completa di 1 kg di combustibile. Ovviamente questa grandezza dipende unicamente dalla composizione del combustibile e può essere determinata attraverso la seguente formula:

$$a_t \equiv \frac{m_{a,t}}{m_c} = 11.56x_C + 34.48x_H + 4.31x_S - 4.31x_O \quad (1)$$

dove le  $x$  rappresentano, rispettivamente, la frazione in massa di carbonio, idrogeno, zolfo ed ossigeno presenti nel combustibile.

A causa del non perfetto mescolamento dei reagenti, l'aria teorica non è sufficiente a portare a termine completamente la reazione di combustione: è pertanto necessario aggiungere un eccesso d'aria. Si ottiene così il valore della cosiddetta **aria pratica**:

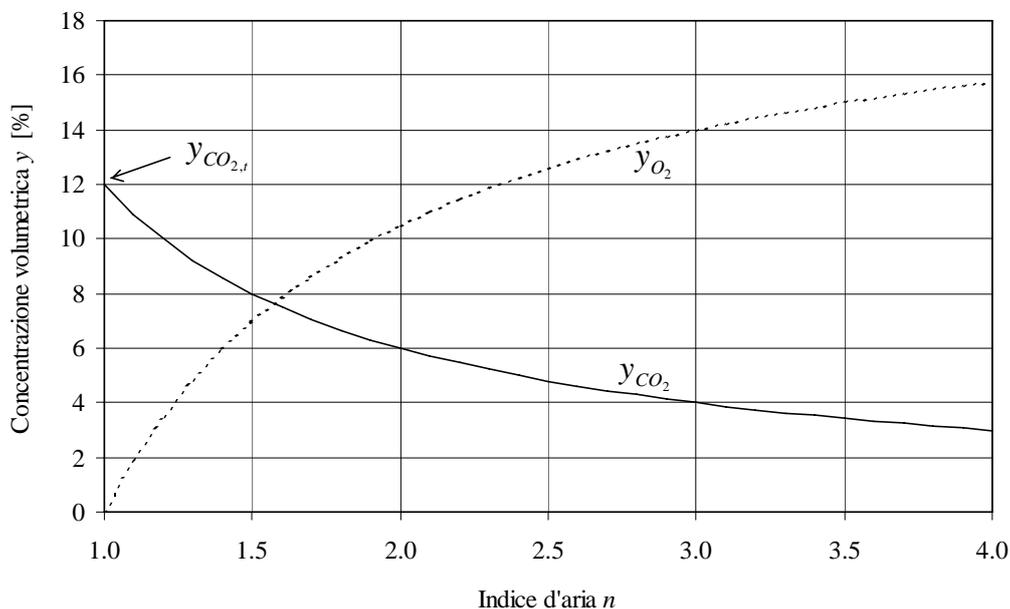
$$a_p \equiv \frac{m_{a,p}}{m_c} = na_t \quad (2)$$

In genere  $n$ , detto **indice d'aria**, varia tra 1 e 1.5 a seconda della conformazione del bruciatore (tanto più esso è sofisticato tanto più  $n$  è prossimo a 1), ma può arrivare fino a 3.5 qualora si voglia limitare la temperatura di combustione, ad es. per non danneggiare gli organi delle macchine o per ridurre la formazione di ossidi di azoto. Di solito il valore di  $n$  viene regolato dall'analisi (in continuo per i grandi impianti, o periodica) dei prodotti di combustione.

In alcuni casi è possibile incontrare in letteratura il cosiddetto **eccesso d'aria** definito come:  $e = (a_p - a_t) / a_t$ . L'eccesso d'aria e l'indice d'aria sono legati tra loro dalla relazione:  $e = n - 1$  (un indice d'aria pari a 1.1 equivale ad un eccesso d'aria del 10 %).

In figura 1 viene riportato l'andamento qualitativo della frazione in volume di  $\text{CO}_2$  ( $y_{\text{CO}_2}$ ) e di  $\text{O}_2$  ( $y_{\text{O}_2}$ ) presenti nei fumi secchi in funzione dell'indice d'aria  $n$ . La misura di queste grandezze, effettuata dagli analizzatori dei prodotti di combustione, è importante perché correla l'eccesso d'aria ( $n-1$ ) al rendimento della combustione. E' evidente che all'aumentare dell'eccesso d'aria, restando costante il volume di  $\text{CO}_2$ , la percentuale di  $\text{CO}_2$  nei fumi diminuisce, mentre quella di ossigeno aumenta. Il valore dell'indice d'aria si può ottenere dalla misura della concentrazione *residua* di ossigeno nei fumi,  $y_{\text{O}_2}$ , tramite la formula seguente

$$n \approx \frac{0.21}{0.21 - y_{\text{O}_2}} \quad (3)$$



**Figura 1:** Frazione volumetrica di  $\text{CO}_2$  e di  $\text{O}_2$  nei fumi secchi nel caso di metano ( $\text{CH}_4$ ).

Oltre all'aria teorica, esistono altre proprietà caratteristiche del combustibile le più importanti delle quali verranno brevemente riportate nel seguito.

Il **potere calorifico superiore**,  $H_s$ , è la quantità totale di calore sviluppata dalla reazione di combustione completa dell'unità di massa del combustibile e può essere approssimativamente valutato come:

$$H_s \cong 34.03x_C + 144.42x_H + 10.88x_S \quad [\text{MJ}/(\text{kg di combustibile})] \quad (4)$$

Nella combustione di combustibili contenenti idrogeno, nei fumi è presente acqua allo stato di vapore; il passaggio dell'acqua dallo stato liquido allo stato di vapore comporta la perdita del calore latente di vaporizzazione (circa 2500 kJ/kg) dal calore di combustione. Il calore effettivamente disponibile per lo scambio termico è quindi solo quello sensibile e viene chiamato **potere calorifico inferiore**,  $H_i$  (circa il 10 % inferiore ad  $H_s$ ).

Più rigorosamente, il potere calorifico è definito come la differenza tra l'entalpia dei reagenti e quella dei prodotti in una reazione a temperatura e pressione costante. Quindi esso dipende anche, seppur lievemente, dalla temperatura del combustibile e dell'aria e dallo stato di aggregazione del combustibile.

Se la pressione parziale del vapor d'acqua nei fumi è, alla temperatura dei fumi, uguale a quella di saturazione si ha la condensa (nella pratica questo avviene anche quando i fumi sono a contatto con superfici a temperatura inferiore a quella di rugiada). La condensa può essere pericolosa per i combustibili che contengono zolfo in quanto si ha formazione di acido solforico, corrosivo nei confronti dell'acciaio. E' questo il motivo per il quale, generalmente, nelle caldaie industriali (tranne in quelle a condensazione) il vapore d'acqua contenuto nei fumi non viene condensato. Dove non espressamente specificato si farà, quindi, riferimento sempre al potere calorifico inferiore.

Tra il potere calorifico superiore e quello inferiore vi è la relazione:

$$H_i \cong H_s - 2.5 m_{H_2O} \quad [\text{MJ}/(\text{kg di combustibile})] \quad (5)$$

dove  $m_{H_2O}$  è la massa di acqua formatasi in seguito alla combustione di 1 kg di combustibile.

Dalla tabella 1 si nota come il rapporto  $H/a_t$  è pressoché indipendente dal tipo di combustibile usato e vale all'incirca 3 MJ/kg; cioè occorrono 1 kg di aria per ogni 3 MJ di energia generata dalla combustione.

La **temperatura di accensione** è la temperatura alla quale, alla pressione atmosferica, il processo di combustione nella miscela stechiometrica costituita da vapori del combustibile liquido (o dal gas) più l'aria avviene e perdura in modo stabile. Si comprende, quindi, come la combustione per innescarsi abbia bisogno della presenza contemporanea di tre fattori: il combustibile, il comburente ed il calore. Una volta innescata la reazione di combustione, la fiamma deve essere mantenuta ad una temperatura superiore a quella minima di accensione. Se nella regione della fiamma la miscela in fase di combustione viene raffreddata ad un valore di temperatura inferiore a quella di accensione, il processo di combustione si arresta e la fiamma si spegne.

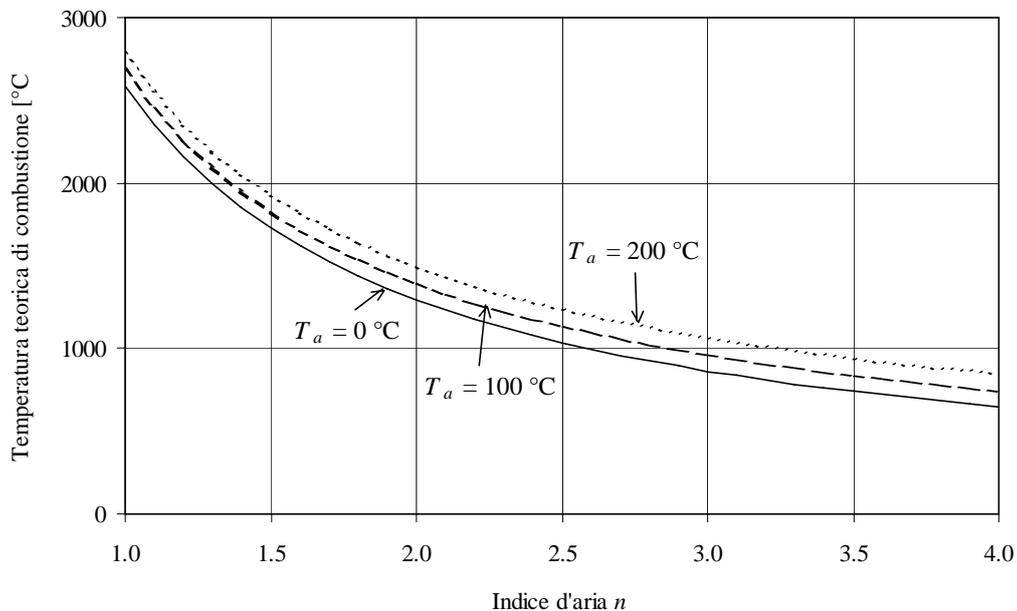
La **temperatura teorica di combustione** è la temperatura raggiunta dai prodotti della combustione quando questa è completa ed avviene adiabaticamente. La temperatura di combustione dipende dal potere calorifico e dall'aria pratica e si determina con buona approssimazione come

$$T_f \cong T_a + \frac{H_i}{c_{p,f} n a_t} \quad (6)$$

dove  $c_{p,f}$  è il calore specifico dei fumi (circa 1.1 kJ/kgK) e  $T_a$  la temperatura dell'aria in ingresso.  $T_f$  oscilla in pratica tra 1200 e 2000 °C, a seconda del combustibile e dell'indice d'aria. Da notare che localmente la temperatura di fiamma può anche eccedere il valore su indicato, favorendo così la produzione di ossidi di azoto. Al contrario, i fenomeni di *dissociazione* (ovvero la separazione di molecole complesse in molecole o radicali più semplici, dovuta all'alta temperatura), che assorbono energia, possono ridurre la temperatura effettiva di combustione.

In figura 2 è riportato l'andamento della temperatura teorica nel caso di combustione di metano, in funzione dell'indice d'aria  $n$ , per alcune temperature di preriscaldamento dell'aria.

Dato che il rapporto tra  $H_i/a_t$  è pressoché indipendente dal tipo di combustibile usato si ha che anche la temperatura teorica di combustione risulta pressoché indipendente dal tipo di combustibile usato.



**Figura 2:** Temperatura teorica di combustione nel caso di metano ( $\text{CH}_4$ ).

### **ESEMPIO 12.1 – Combustione dell'etano**

In un impianto petrolchimico si ha a disposizione dell'etano ( $\text{C}_2\text{H}_6$ ) che viene utilizzato per alimentare un motore alternativo ad accensione comandata. Determinare:

1. la percentuale di massa di carbonio (C) e di idrogeno (H) presenti nel combustibile;
2. l'aria teorica necessaria;
3. il valore approssimato del potere calorifico inferiore.

Sapendo che il motore funziona a regime con un rapporto aria/combustibile effettivo pari a 17.73  $\text{kg}_a/\text{kg}_c$ , calcolare l'indice d'aria  $n$  e la massa effettiva dei fumi.

Ricaviamo la massa di 1 kmole di etano:

2 atomi di C · 12.011 kg/kmole + 6 atomi di H · 1.008 kg/kmole =

24.022 kg di C + 6.048 kg di H = 30.07 kg di C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>

Le proporzioni in massa degli elementi valgono quindi:

$$x_C = \frac{24.022 \text{ kg di C}}{30.07 \text{ kg di C}_2\text{H}_6} = 79.89 \% \text{ di C}; \quad x_H = \frac{6.048 \text{ kg di H}}{30.07 \text{ kg di C}_2\text{H}_6} = 20.11 \% \text{ di H}$$

L'aria teorica può essere ricavata dalla formula vista precedentemente:

$$a_t \equiv \frac{m_{at}}{m_c} = 11.5 x_C + 34.5 x_H + 4.31 x_S - 4.31 x_O = 16.12 \text{ kg}_a/\text{kg}_c$$

Il potere calorifico inferiore può essere determinato in modo approssimato mediante la seguente formula:

$$\frac{H}{a_t} \approx 3 \text{ MJ/kg} \Rightarrow H \approx 3 \cdot 16.12 = 48.36 \text{ MJ/kg}$$

L'indice d'aria  $n$  vale:

$$n \equiv \frac{m_a}{m_{at}} = \frac{17.73}{16.12} = 1.10$$

La massa effettiva dei fumi è data da:

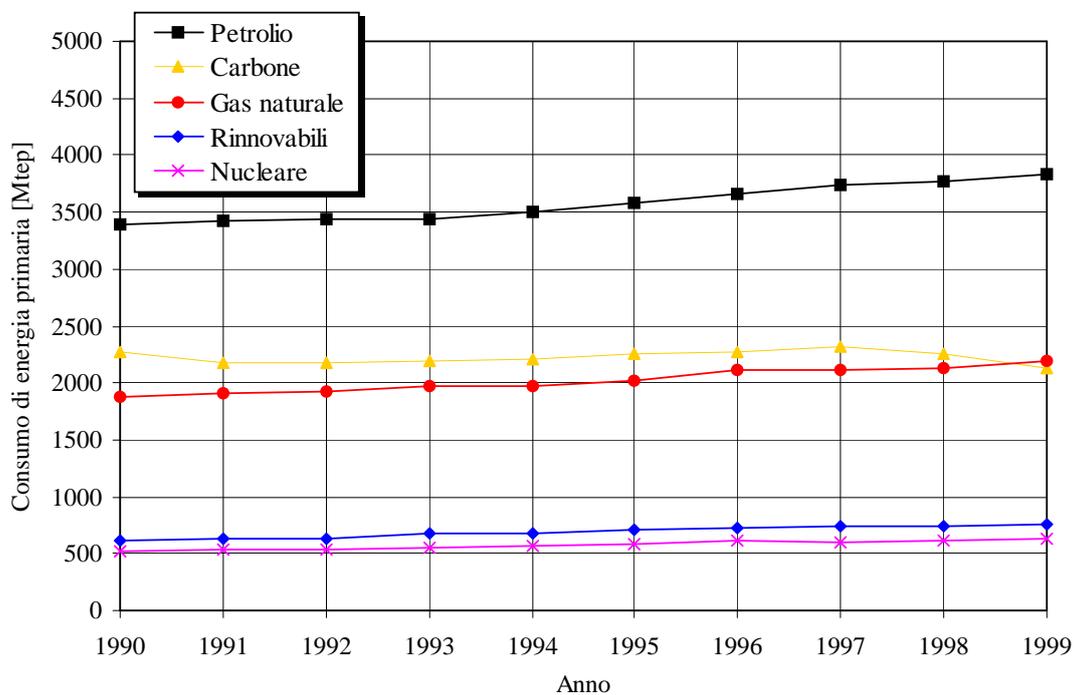
$$\frac{m_f}{m_c} = 1 + n a_t = 18.73 \text{ kg}_f/\text{kg}_c$$

□

### 3. I combustibili

I combustibili possono essere definiti come sostanze capaci di produrre energia termica a seguito di una reazione chimica di combustione. I combustibili attualmente più noti sono i **combustibili fossili** o naturali che vengono utilizzati dopo opportuni trattamenti.

Come si può osservare dalla figura 3, i combustibili fossili contribuiscono per circa l'85-86 % sui consumi energetici mondiali. Per quanto riguarda l'Italia la dipendenza energetica dai combustibili fossili risulta più marcata: nel 1998 si è avuto un consumo energetico pari a circa 200 Mtep di cui il 54 % da prodotti petroliferi, il 28 % da gas naturale, il 6 % da combustibili solidi (carbone) ed il restante 12 % da fonti rinnovabili (quasi tutto idroelettrico) e dall'importazione dell'elettricità. Di questi 200 Mtep, un terzo è stato consumato dai trasporti, un terzo dagli usi civili ed un terzo dall'industria.



**Figura 3:** Consumo mondiale di energia primaria (Official Energy Statistics from the U.S. Government).

I combustibili commerciali si distinguono in genere in solidi, liquidi e gassosi. Tranne poche eccezioni, i combustibili hanno una composizione chimica prefissata: la loro composizione (e quindi anche il loro potere calorifico) varia a seconda del processo produttivo o della zona di estrazione.

Tra i *combustibili solidi* si annoverano la *legna*, i *carboni* (lignite, antracite, litantrace, coke), e quelli non convenzionali: *rifiuti solidi urbani (RSU)*, *sanse*, *vinacce*, destinati ad usi industriali.

I *combustibili liquidi* sono in genere miscele di idrocarburi: le *benzine*, il *gasolio*, il *kerosene*, gli *oli combustibili*, che contengono frazioni via via più pesanti dei prodotti liquidi ottenuti dalla distillazione o dalla lavorazione del petrolio. I combustibili liquidi si distinguono a

seconda del tenore di zolfo in ATZ (alto tenore di zolfo, < 3 %) BTZ (basso tenore di zolfo < 1 %), STZ (senza tenore di zolfo < 0.3 %, ammesso per usi civili).

Nessun combustibile liquido è costituito da un unico componente: tuttavia in prima approssimazione si può considerare la benzina come costituita unicamente da ottano ( $C_8H_{18}$ ) e il gasolio come costituito da dodecano ( $C_{12}H_{26}$ ). I combustibili liquidi sono caratterizzati dalla curva di distillazione, che indica per ogni temperatura la frazione che è convertita in vapore. Ad esempio la benzina inizia a vaporizzare a 40-50 °C ed è completamente convertita in vapore a 200 °C, mentre il gasolio distilla indicativamente tra i 200 ed i 350 °C.

I *combustibili gassosi* annoverano i *GPL* o *gas di petrolio liquefatti* (miscele di propano e butano ed altri prodotti leggeri di distillazione del petrolio, che sottoposti a moderate pressioni – circa 10 bar – passano allo stato liquido e sono contenuti in bombole), il *gas di città* (miscela di idrogeno, metano e monossido di carbonio prodotto dalla distillazione o dalla gassificazione del carbone) il *gas naturale* (quasi integralmente metano, che ha sostituito il gas di città). Altri gas come l'*acetilene* ed il *gas d'altoforno* (monossido di carbonio) hanno impieghi unicamente industriali.

La tabella 1 riporta le caratteristiche più salienti dei principali combustibili. Il costo per unità di energia prodotta è quasi invariante, tranne per i combustibili soggetti a prelievo fiscale. Dato che l'anidride carbonica è il maggiore responsabile dell'effetto serra, per alcuni combustibili viene anche riportato il valore della  $CO_2$  generata per unità di energia prodotta.

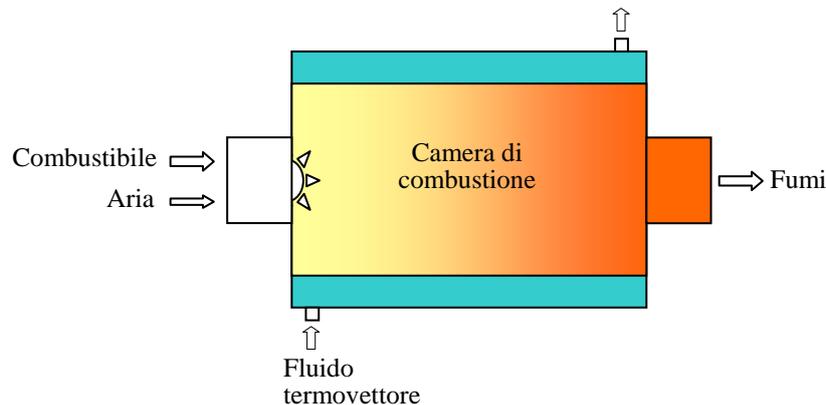
Combustibile	densità [kg/m <sup>3</sup> ]	$H_i$ [MJ/kg]	$a_i$ [kg <sub>a</sub> /kg <sub>c</sub> ]	$H/a_i$ [MJ/kg]	Temp. di accensione [°C]	CO <sub>2</sub> gen. [kg/MJ]
Legna secca	500-800	18-20	5.8-6.7	3.1		0.096
Lignite		20.5				
Litantrace		26				
Antracite		30.5				
Coke	1000	30.2	10.1	2.99		0.103
RSU(*)	100	8	2.7	2.96		0.103
Benzina	730-760	44	14.7	2.99	400	
Gasolio	815-855	43.3	14.7	2.95	250	0.073
Olio denso	950	41.1	13.8	2.98		0.077
Gas di città	0.56÷0.61	30	10	3.00		
GPL	2.25	46	15.5	2.97	400	0.065
Gas naturale	0.83	47.7	17.3	2.76	560	0.056
Butano	2.7	45.7	15.4	2.97	365	
Acetilene	1.17	48.1	13.3	3.61	305	

(\*) *Rifiuti Solidi Urbani*

**Tabella 1:** Principali caratteristiche dei combustibili commerciali.

#### 4. Generatore di calore

Si definisce generatore di calore o **caldaia** (vedi figura 4) il dispositivo dove avviene il trasferimento di calore, sviluppato dal combustibile bruciato all'interno della camera di combustione, ad un fluido termovettore (di solito acqua allo stato liquido o in cambiamento di fase). Nel caso che la caldaia venga usata per la generazione di vapore saturo o surriscaldato si parla di **generatore di vapore**.

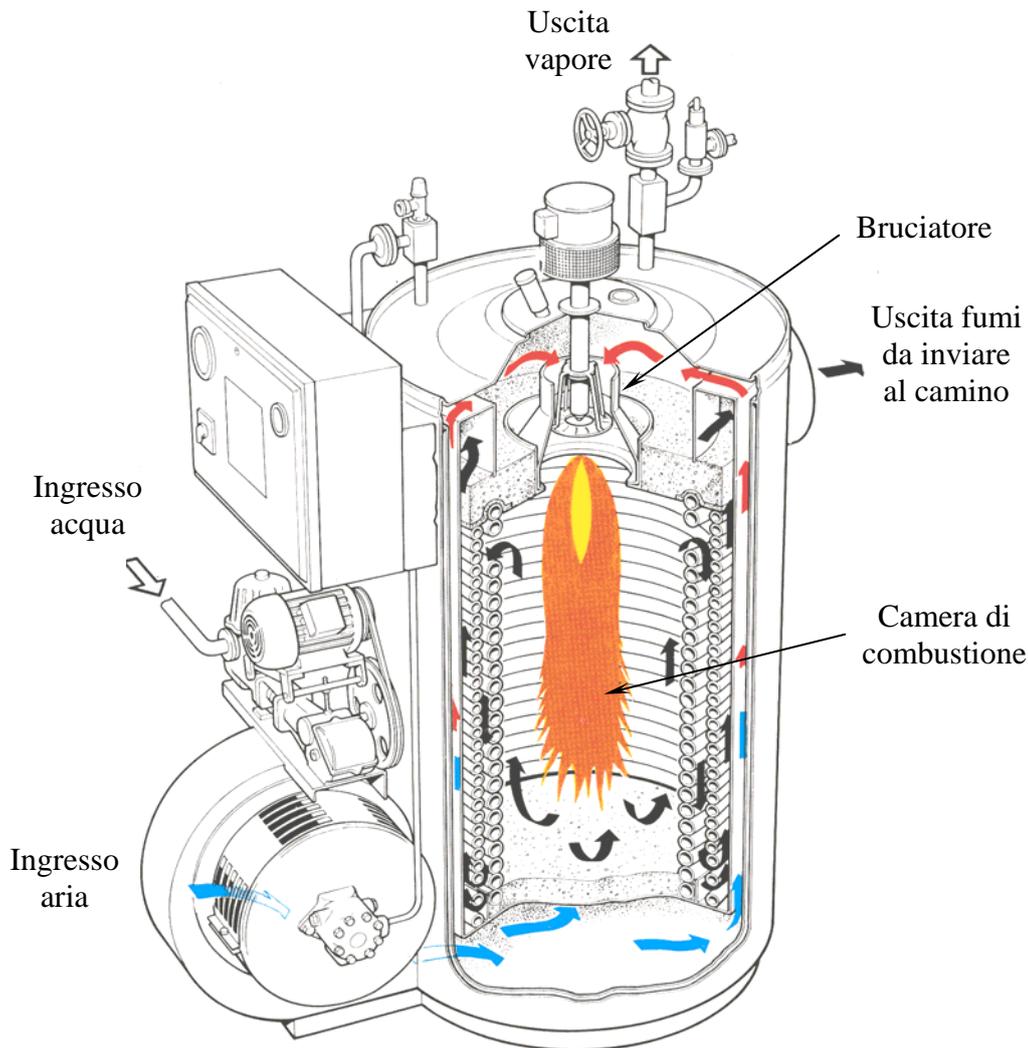


**Figura 4:** Schema funzionale di un generatore di calore.

In figura 5 è riportato un esempio di piccolo generatore di vapore saturo per uso industriale, disponibile in differenti versioni, con produzione di vapore fino a circa 1 kg/s e con pressione di esercizio fino a 34 bar. Si tratta di una caldaia monotubolare a circolazione forzata per produzione istantanea di vapore. La combustione, sotto pressione, tra il combustibile e l'aria preriscaldata avviene a fiamma rovesciata.

Nonostante le ridotte dimensioni di questa caldaia, i principali componenti di cui è costituita sono analoghi a quelli presenti nei **generatori di vapore a tubi d'acqua** di più grandi dimensioni, con potenze nominali che possono arrivare fino a 1500 MW. Essi consistono, principalmente in:

- *preriscaldatore d'aria*: l'aria prima di entrare in camera di combustione attraversa l'involucro esterno che racchiude i fasci di tubi;
- *bruciatore ad aria soffiata*: provvede a miscelare e a dirigere il flusso di combustibile ed aria in modo da consentire la combustione e da mantenere una fiamma stabile;
- *camera di combustione (o focolare)*: lo spazio messo a disposizione per la combustione del combustibile.;
- *economizzatore*: l'acqua di alimentazione attraversando la schiera di tubi più esterna viene preriscaldata prima di passare attraverso i tubi a diretto contatto con la fiamma dove subisce cambiamento di fase;
- *evaporatore*: schiera di tubi più interna dove il liquido passa allo stato vapore;
- *ausiliari*: pompe, ventilatore, termostati, pressostati, rivelatori di fiamma, ecc..



**Figura 5:** Caldaia per la produzione di vapore (serie VAP della Babcock Wanson).

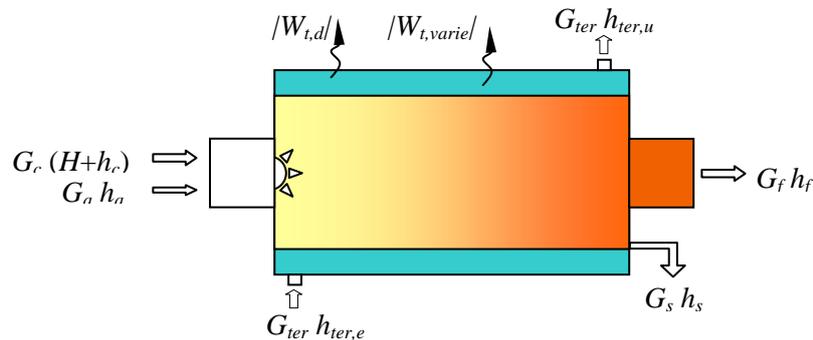
In aggiunta ai suddetti componenti, in un generatore di vapore di un impianto termico può essere presente anche un *surriscaldatore* (separato o meno dall'evaporatore) al quale viene inviato il vapore saturo al fine di conferirgli il voluto grado di surriscaldamento. I fumi che lasciano il preriscaldatore vengono poi mandati, per circolazione naturale o mediante un ventilatore aspirante, ad un *camino* che provvede a farli effluire ad un'altezza da cui possono diffondere nell'atmosfera diluendosi e ricadendo al suolo con concentrazioni di inquinanti accettabilmente basse.

Un altro tipo di generatore di vapore, molto utilizzato nel passato (ad es. per la trazione ferroviaria e per gli impianti navali), è quello a **tubi di fumo**. In questo caso i fumi sono convogliati all'interno di tubi circondati da acqua. Si tratta quindi di generatori a medio o grande volume di acqua con potenze nominali che al massimo arrivano a circa 10 MW. A causa del maggior volume di acqua, questi generatori hanno maggiore inerzia termica ed i relativi transitori (accensione, spegnimento e variazioni di carico) sono di maggior durata.

Il calore di combustione potenzialmente disponibile per il fluido termovettore non viene utilizzato totalmente, ma una parte dell'energia generata dalla combustione viene persa in:

- perdite per calore sensibile nei fumi (la quota maggiore delle perdite);
- perdite per incombusti (combustione incompleta);
- perdite per scambio termico convettivo e per irraggiamento attraverso l'involucro esterno del generatore e l'ambiente;
- perdite dovuta all'energia associata alle scorie (termine importante solo se il combustibile è costituito da rifiuti solidi urbani o legno).

Al fine di comprendere meglio le varie perdite andiamo a considerare i bilanci di massa e di energia:



- bilancio di massa:

$$G_c + G_a = G_f + G_s \Rightarrow 1 + n a_t = \frac{G_f}{G_c} + \frac{G_s}{G_c} \quad (7)$$

dove  $G_c$  è la portata di combustibile,  $G_a$  la portata di aria,  $G_f$  la portata dei fumi e  $G_s$  la portata delle scorie solide di combustione o ceneri.

- bilancio di energia:

$$G_c (H + h_c) + G_a h_a = G_f h_f + G_s h_s + |W_{t,ter}| + |W_{t,d}| + |W_{t,varie}| \quad (8)$$

dove  $H$  è il potere calorifico del combustibile (che per chiarezza indichiamo separatamente dalla cosiddetta *entalpia sensibile*  $h_c$  dovuta invece a pressione temperatura) e:

- ✧  $|W_{t,ter}| = G_{ter} (h_{ter,u} - h_{ter,e}) =$  **potenza del generatore**, potenza termica ricevuta dal fluido termovettore (potenza termica utile);
- ✧  $|W_{t,d}| = \alpha A (T_p - T_e) =$  potenza persa per dispersione termica dalle pareti del generatore;
- ✧  $|W_{varie}| =$  termine che tiene conto delle perdite per combustione incompleta, dell'energia necessaria per alimentare gli ausiliari, energia persa per spurghi, ecc. (è normalmente trascurabile rispetto agli altri termini);
- ✧  $G_s h_s =$  energia associata alle scorie.

Il bilancio energetico può quindi anche essere riformulato come

$$|W_{t,ter}| = G_c H - |W_{t,c}| - |W_{t,d}| - |W_{varie}| - G_s h_s \quad (9)$$

✧  $G_c H =$  **potenza al focolaio** (con  $H$  potere calorifico)

✧  $|W_{t,c}| = G_f h_f - G_c h_c - G_a h_a \approx G_f c_{p,f} (T_f - T_a) =$  potenza persa al camino in quanto nel generatore entrano aria e combustibile a temperatura ambiente ed escono fumi caldi (è il termine più importante).

La perdita dovuta alle dispersioni termiche diminuisce (in percentuale) al crescere della potenza in quanto aumentano le dimensioni dell'apparecchio e quindi diminuisce il rapporto tra la superficie disperdente e volume.

La perdita dovuta ai fumi che escono dal camino ancora caldi sarà tanto minore quanto minore sarà la temperatura dei fumi e quanto minore sarà l'eccesso d'aria.

Si definisce **rendimento** di un generatore di calore il rapporto tra la potenza termica effettivamente ricevuta dal fluido termovettore e la potenza al focolaio:

$$\eta \equiv \frac{|W_{t,ter}|}{G_c H} = \frac{G_{ter} (h_{ter,u} - h_{ter,e})}{G_c H} \quad (10)$$

Ad esempio, nel caso di impianti termici per la climatizzazione invernale di edifici ad uso civile, il DPR n. 412 del 26/08/93 (rettificato con DPR n. 551 del 21/12/99) stabilisce i valori minimi per i generatori di acqua calda con potenza utile nominale compresa fra i 4 ed i 400 kW e precisa le norme alle quali ci si deve attenere per la sua misura nelle due seguenti condizioni:

- al 100% della potenza nominale espressa in kW e temperatura media dell'acqua di 70 °C deve aversi:

$$\eta(\%) \geq 84 + 2 \log P_n$$

- al 30% della potenza nominale espressa in kW e temperatura media dell'acqua di 50 °C deve aversi:

$$\eta(\%) \geq 80 + 3 \log P_n$$

dove  $P_n$  è la potenza termica utile nominale.

Nel caso di generatori ad aria calda con potenza non superiore a 400 kW il rendimento termico alla potenza termica nominale (carico del 100 %) deve essere:

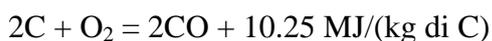
$$\eta(\%) \geq 83 + 2 \log P_n$$

I generatori di calore ad acqua e ad aria calda con potenza nominale superiore a 400 kW devono avere valori di rendimento termico utile pari o superiori a quelli sopra indicati calcolati a  $P_n = 400$  kW .

## 5. Emissioni di sostanze inquinanti

I prodotti della combustione sono essenzialmente acqua (H<sub>2</sub>O) ed anidride carbonica (CO<sub>2</sub>). Sono presenti anche ossidi di zolfo in dipendenza dal tenore di questo elemento nel combustibile: dato che gli SO<sub>x</sub> sono altamente inquinanti, si cerca di ridurre a monte il tenore di zolfo nei combustibili stessi. Gli ossidi di azoto (NO<sub>x</sub>) compaiono a causa della ossidazione ad elevata temperatura dell'azoto contenuto nell'aria comburente.

Quando manca la giusta quantità di aria per far avvenire la combustione completa, nei fumi generati dal processo di combustione possono essere presenti degli elementi incombusti tra i quali il monossido di carbonio, altamente pericoloso per l'uomo:



La presenza degli incombusti (CO ed HC) tra i prodotti della combustione comporta inoltre una minore quantità di calore generato a parità di consumo di combustibile (un contenuto di CO dell'1% nei fumi comporta una perdita energetica di circa il 4%).

Altri prodotti (ceneri, polveri sospese, metalli, etc.) dipendono dal tipo e dalle impurezze del combustibile ed il loro studio esula dallo scopo di questa trattazione.

Le sostanze inquinanti emesse in atmosfera dagli impianti di combustione sono responsabili di diversi problemi ambientali, alcuni già evidenti altri ritenuti potenzialmente molto pericolosi (v. appendice 1 e 2): piogge acide, effetto serra, buco dell'ozono stratosferico, agli episodi di degrado della qualità dell'aria che hanno riflessi diretti sulla vita dell'uomo.

Le emissioni di inquinanti da impianti di combustione possono essere classificati come dipendenti da:

- *combustibile*: se questo contiene una sostanza inquinante che rimane inalterata o se contiene una sostanza che a seguito della combustione si trasforma producendo composti inquinanti (SO<sub>x</sub> ed NO<sub>x</sub>);
- *combustione anomala*: quando la combustione è incompleta si generano sostanze non completamente ossidate (ad es. CO, idrocarburi incombusti) e se la combustione non è ben controllata si può avere formazione di ossidi di azoto (NO<sub>x</sub>) di origine termica, cioè legata alla modalità con cui avviene la combustione (alta temperatura delle fiamme);
- *combustione normale*: anche se la combustione risulta essere normale si ha emissione di anidride carbonica (CO<sub>2</sub>) che provoca l'effetto serra.

Il D.M. 12/07/90 in materia di emissioni di inquinanti dagli impianti di combustione, pone dei limiti alle concentrazioni dei singoli inquinanti nel punto in cui sono emessi (v. tabella 2) che risultano un compromesso tra lo sviluppo tecnologico, le esigenze sanitarie e le effettive possibilità di misura.

Limiti più restrittivi alle emissioni dei grandi impianti di combustione (quelli con potenza termica uguale o superiore ai 50 MW) sono previsti da due nuove direttive europee 2001/80/CE e 2001/81/CE, che a partire dal 27 novembre 2002 (data entro la quale dovranno essere attuate) obbligheranno gli stati membri ad un graduale abbassamento delle emissioni inquinanti prodotte nei propri territori fino a raggiungere, nel giro di pochi anni, il rispetto dei precisi valori limite elencati negli allegati di tali direttive.

INQUINANTE	Potenza nominale minore di 50 MW		Potenza nominale maggiore di 50 MW e minore di 500 MW	Potenza nominale maggiore 500 MW
	OLIO	GAS		
CO	-	-	250	250
HC	150	150	300	300
NO <sub>x</sub>	500	350	650	200
SO <sub>2</sub>	1700	35	1700	400
Polveri	100	5	50	50

**Tabella 2:** Limite di legge (D.M. 12/07/90) alle emissioni (mg/m<sup>3</sup>) per impianti convenzionali esistenti nel 1988.

La composizione di una miscela gas può essere espressa come concentrazione in volume: questa è il rapporto tra il volume che il gas occuperebbe *da solo* alla stessa pressione e temperatura cui si trova nella miscela ed il volume totale di quest'ultima. Se il gas segue un comportamento ideale, la concentrazione in volume corrisponde a quella in *moli* (moli di gas/moli totali). Inoltre, sfruttando l'equazione di stato dei gas ideali, si può dimostrare che la concentrazione in volume è pari alla *pressione parziale* del gas all'interno della miscela (ovvero la pressione che il gas avrebbe se occupasse *da solo* l'intero volume a disposizione).

Gli inquinanti gassosi sono spesso misurati mediante analizzatori che forniscono la concentrazione in volume, mentre la legge fornisce limiti alla concentrazione in massa. La concentrazione in massa di un inquinante (*i-esimo*) nei fumi si esprime generalmente come massa di inquinante ( $m_i$ ) per unità di volume dei fumi ( $V_f$ ) in **condizioni di riferimento**. Questo per evitare che si possano artificialmente "diluire" gli inquinanti aggiungendo aria di combustione in eccesso. Pertanto le "condizioni di riferimento" secondo il D.M. 12/07/90 fissano un limite al tenore residuo di ossigeno nei fumi (3 % per i combustibili liquidi e gassosi, 6 % per il carbone ed 11 % per gli altri combustibili solidi).

Per passare dalla concentrazione in volume ( $V_i/V_f$ ) alla concentrazione in massa ( $m_i/V_f$ ) si può scrivere:

$$\frac{m_i}{V_f} = \frac{m_i}{V_i} \frac{V_i}{V_f} = \rho_i \frac{V_i}{V_f} \quad (11)$$

dove  $\rho_i$  è la densità dell'inquinante *i* ed è calcolabile con buona approssimazione con la legge di Avogadro se l'inquinante è gassoso: si ricorda tale legge afferma che una kg-mole di sostanza (la cui massa in kg è numericamente pari al valore del peso molecolare) occupa in condizioni normali (1 atm e 25 °C) il volume di 22.4 m<sup>3</sup>.

La concentrazione da confrontare con i limiti di legge non è quella misurata, ma è quella riportata nelle condizioni di riferimento:

$$\frac{m_i}{V_f} = \frac{m_i}{V_{fr}} \frac{V_{fr}}{V_f} = \frac{m_i}{V_{fr}} \frac{v_{fr} (1 + n_r a_t)}{v_f (1 + n a_t)} \quad (12)$$

dove:

- $V_{fr}$  = volume dei fumi con indice d'aria di riferimento;

- $m_i / V_{fr}$  = concentrazione in condizione di riferimento;
- $n$  indice effettivo di aria;
- $n_r$  indice d'aria in condizioni di riferimento.

Assumendo  $v_f \approx v_{fr}$  e trascurando la massa di combustibile rispetto a quella dei fumi per cui  $1 + n a_t \approx n a_t$  si ottiene:

$$\frac{m_i}{V_f} \approx \frac{m_i}{V_{fr}} \frac{n_r}{n} \quad (13)$$

essendo valida la relazione approssimata tra  $n$  e la concentrazione residua di ossigeno nei fumi  $y_{O_2}$ , eq(3)

$$n \approx \frac{0.21}{0.21 - y_{O_2}} \quad (14)$$

si ha infine

$$\frac{m_i}{V_{fr}} = \frac{0.21 - y_{O_{2r}}}{0.21 - y_{O_2}} \frac{m_i}{V_f} \quad (15)$$

dove:

$y_{O_2}$  = concentrazione effettiva di  $O_2$  nei fumi (misurata al camino);

$y_{O_{2r}}$  = concentrazione di  $O_2$  nelle condizioni di riferimento.

### **ESEMPIO 2 – Emissione di inquinanti**

I fumi di un impianto di combustione alimentato a gas contengono una concentrazione in volume di CO pari allo 0.01 % ed una concentrazione di ossigeno del 12 %.

Determinare:

1. la concentrazione di CO in massa;
2. la concentrazione di CO riportata nelle condizioni di riferimento.

Sfruttando la legge di Avogadro (essendo il peso molecolare del CO pari a  $12+16 = 28$ ) si ottiene:

$$\frac{m_{CO}}{V_f} = \rho_{CO} \frac{V_{CO}}{V_f} = \frac{28}{22.4} 0.01 \cdot 10^{-2} = 0.000125 \text{ kg/m}^3 = 125 \text{ mg/m}^3$$

La concentrazione di CO nelle condizioni di riferimento vale:

$$\frac{m_{CO}}{V_{fr}} = \frac{m_{CO}}{V_f} \frac{0.21 - y_{O_{2r}}}{0.21 - y_{O_2}} = 125 \frac{0.21 - 0.03}{0.21 - 0.12} = 250 \text{ mg/m}^3$$

che è il valore (notevolmente più elevato) che va confrontato con i limiti di legge alle emissioni.

## BIBLIOGRAFIA

- P. Anglesio, “Elementi di Impianti Termotecnici”, *Pitagora Editrice*, Bologna, 1998.
- G. Cornetti, “Macchine a fluido”, *Edizioni il Capitello*, Torino, 1996.
- P. Andreini, F. Pierini, “La conduzione dei generatori di vapore”, *Hoepli*, Milano, 1995.
- R. della Volpe, “Macchine”, *Liguori Editore*, Napoli, 1994.
- D.M. 12 luglio 1990, “Linee guida per il contenimento delle emissioni inquinanti degli impianti industriali e la fissazione dei valori minimi di emissione”.
- Direttiva 2001/81/CE, “Limiti nazionali di emissione in atmosfera di biossido di zolfo, ossidi di azoto, componenti organici volatili, ammoniaca”.
- Direttiva 2001/80/CE, “Limitazioni alle emissioni in atmosfera degli inquinanti dei grandi impianti di combustione”.
- D.P.R. 203/1988, “Attuazione delle direttive CEE numeri 80/779, 82/884, 84/360 e 85/203 concernenti norme in materia di qualità dell’aria, relativamente a specifici agenti inquinanti, e di inquinamento prodotto dagli impianti industriali, ai sensi dell’articolo 15 della legge 16 aprile 1987, n. 183”.
- D.M. 12 luglio 1990, “Linee guida per il contenimento delle emissioni inquinanti degli impianti industriali e la fissazione dei valori minimi di emissione”.
- Legge 9 gennaio 1991, n.10 (nota come legge 10/91), “Norme in materia di uso razionale dell’energia, di risparmio energetico e di sviluppo delle fonti rinnovabili di energia”.
- D.P.R. 26 agosto 1993, n. 412, “Regolamento recante norme per la progettazione, l’installazione, l’esercizio e la manutenzione degli impianti termici degli edifici ai fini del contenimento dei consumi di energia, in attuazione dell’art. 4, comma 4, della legge 10/91”.
- D.P.R. 21 dicembre 1999, n.551, “Regolamento recante modifiche al D.P.R. 26 agosto 1993, n. 412”.
- Sito della Regione Lombardia:  
[www.ambiente.regione.lombardia.it/inemar/inv\\_emis.htm](http://www.ambiente.regione.lombardia.it/inemar/inv_emis.htm).
- Sito U.S dell’Energy Information Administration: [www.eia.doe.gov](http://www.eia.doe.gov).

## **APPENDICE 12.1: Cenni alle problematiche connesse ai consumi energetici, l'effetto serra e il controllo delle emissioni**

Il consumo energetico mondiale nel 1999 ammontava a 9.5 Gtep (1 tep, tonnellata equivalente di petrolio, equivale a  $10^7$  kcal = 41868 MJ), di cui l'86 % derivante da combustibili fossili, e di questo il 50 % da idrocarburi. Le stime prevedono che nel 2020 il consumo ammonterà a 11.5-15.5 Gtep.

La combustione dei combustibili fossili, che contengono carbonio, produce anidride carbonica (CO<sub>2</sub>), la cui concentrazione atmosferica media è già cresciuta dalle 280 ppm dell'epoca pre-industriale alle attuali 300 ppm. L'anidride carbonica assorbe in maniera notevole la radiazione infrarossa emessa dalla superficie terrestre (che viene riscaldata a sua volta dal sole) e provoca in definitiva un aumento della temperatura media dell'atmosfera (il cosiddetto "effetto serra"). Vi sono ormai evidenze sperimentali di questo riscaldamento e pare ormai accertata, nonostante alcuni pareri ancora discordanti, la correlazione tra riscaldamento atmosferico e l'aumento di concentrazione della CO<sub>2</sub>.

Considerato questo, i rappresentanti dei paesi maggiormente industrializzati, riunitisi a Kyoto nel 1997, hanno concordato di ridurre in media le emissioni di CO<sub>2</sub> del 5.2% nel periodo 2008-2012. L'Italia si è impegnata a ridurre le sue emissioni del 6.5%.

Tale riduzione delle emissioni, senza una parallela massiccia contrazione dei consumi energetici (considerato che quest'ultima porterebbe verosimilmente alla depressione economica i paesi più industrializzati, i cui consumi energetici sono comunque destinati a crescere negli anni considerati) può essere perseguita nei modi seguenti, ordinati (indicativamente) in ordine di realizzabilità.

1. Aumentare del rendimento degli impianti in costruzione e degli impianti esistenti.
2. Incentivare il risparmio energetico e la razionalizzazione dei consumi, per esempio ricorrendo alla *cogenerazione* (vedi Cap.8).
3. Incrementare significativamente il ricorso alle fonti energetiche termiche che non fanno uso di combustibili fossili, come il nucleare, o che usano combustibili privi di carbonio, ovvero l'idrogeno.
4. Incrementare significativamente il ricorso alle fonti energetiche di natura non termica, come l'idroelettrica, la fotovoltaica, l'eolica.

Le metodologie suddette portano tutte, in maggiore o minore misura, ad una sostanziale modifica dell'attuale sistema nazionale di produzione energetica, e rappresentano probabilmente la maggiore sfida programmatica e tecnologica per gli anni a venire.

## APPENDICE 12.2: Caratteristiche ed effetti biologici dei principali inquinanti atmosferici

### CO - Monossido di Carbonio

*Caratteristiche fisico chimiche:* E' un gas incolore, inodore, insapore, infiammabile e molto tossico che si forma dalla combustione incompleta degli idrocarburi presenti in carburanti e combustibili. Esso è uno dei più comuni inquinanti dell'aria.

*Origine:* Inquinante tipico delle aree urbane, proviene principalmente dai gas di scarico degli autoveicoli (circa il 70 %). E' inoltre emesso dagli impianti di riscaldamento e da processi industriali come la raffinazione del petrolio, la produzione di acciaio e ghisa, l'industria del legno e della carta (per il 30 %).

In natura è prodotto dalle attività vulcaniche e dalle scariche elettriche nei temporali, dagli incendi, dai gas di palude, ecc..

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* L'elevata pericolosità e tossicità di questo gas è dovuta alla sua affinità con l'emoglobina, che risulta essere circa 200-300 volte maggiore di quella dell'ossigeno. Questa caratteristica gli consente di legarsi facilmente con l'emoglobina del sangue e di ostacolare così l'ossigenazione dei tessuti, dei muscoli e del cervello, con conseguenti effetti acuti (senso di affaticamento, sonnolenza, mal di testa) che possono portare alla morte o ad effetti cronici (diminuzione delle prestazioni fisiche ed intellettuali, aumento di cardiopatie e di disturbi circolatori).

### SO<sub>2</sub> - Biossido di Zolfo

*Caratteristiche fisico chimiche:* Il biossido di zolfo o anidride solforosa (SO<sub>2</sub>) è un gas incolore, non infiammabile dall'odore pungente, molto solubile in acqua. Deriva dall'ossidazione dello zolfo presente nei combustibili fossili, carbone e petrolio.

*Origine:* Piccole quantità derivano, in natura da emissioni vulcaniche e da processi biochimici microbici. Le fonti principali sono antropiche: centrali termoelettriche, impianti industriali (fonderie e raffinerie di petrolio), impianti di riscaldamento domestico non alimentati a gas naturale, traffico veicolare, in particolare diesel.

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* A basse concentrazioni è un gas irritante per la pelle, gli occhi e le mucose dell'apparato respiratorio, mentre a concentrazioni più elevate può provocare patologie respiratorie come asma e bronchiti.

In atmosfera l'SO<sub>2</sub> si ossida ad anidride solforica e, in presenza di umidità, si trasforma in acido solforico, responsabile del fenomeno delle piogge acide, con conseguenti danni sugli ecosistemi acquatici e sulla vegetazione.

### NO<sub>x</sub> - Ossido di Azoto

*Caratteristiche fisico chimiche:* In atmosfera sono presenti diverse specie chimiche di ossidi di azoto (NO<sub>x</sub>), ma solamente due sono di interesse dal punto di vista dell'inquinamento atmosferico: l'ossido di azoto (NO) ed il biossido di azoto (NO<sub>2</sub>).

L'NO è un gas incolore e inodore, mentre il biossido di azoto è un gas di colore rosso bruno, dall'odore pungente ed altamente tossico e corrosivo.

*Origine:* Le principali fonti di produzione degli di NO<sub>x</sub> sono costituite dalle reazioni di combustione dei combustibili fossili (in cui vengono superati i 1100°C) sia in sorgenti stazionarie (quali le centrali termoelettriche e i riscaldamenti domestici) sia mobili (quali gli autoveicoli a combustione interna).

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* Poiché gli  $\text{NO}_x$  sono gas, la sola via significativa di esposizione è costituita dall'inalazione. L' $\text{NO}_2$  è circa 4 volte più tossico dell' $\text{NO}$ . L'inalazione del biossido di azoto determina una forte irritazione delle vie aeree. L'esposizione continua a concentrazioni elevate può causare bronchiti, edema polmonare, enfisema. L' $\text{NO}_2$  contribuisce alla formazione dello smog fotochimico, in quanto precursore dell'ozono troposferico, e concorre al fenomeno delle piogge acide, reagendo con l'acqua e originando acido nitrico

### **PTS - Polveri Totali Sospese**

#### **PM10 - Polveri con diametro inferiore ai 10 micron**

*Caratteristiche fisico chimiche:* Il particolato, o polveri sospese, è costituito da microscopiche particelle e goccioline di origine organica ed inorganica in sospensione nell'aria. Hanno una composizione molto varia: metalli (Pb, Cd, Zn, Ni, Cu), fibre di amianto, sabbie, ceneri, solfati, nitrati, idrocarburi policiclici pesanti, polveri di carbone e di cemento.

*Origine:* In natura derivano dall'attività vulcanica, gli incendi dei boschi e dall'azione del vento su rocce e terreno. Le principali fonti antropiche sono gli impianti termici, i motori diesel, il risollevarlo causato dallo sfregamento dei pneumatici sull'asfalto. Soprattutto l'uso di carbone come combustibile per il riscaldamento e per le centrali termoelettriche contribuisce in maniera considerevole al particolato sospeso.

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* La tossicità del PTS è legata alla sua composizione chimica, al suo potere adsorbente e alla sua dimensione. La frazione più fine (PM10 cioè particelle con diametro minore di 10  $\mu\text{m}$ ) risulta quella più pericolosa in quanto in grado di superare tutte le barriere naturali del nostro sistema respiratorio e di penetrare direttamente nei polmoni. L'inalazione di particelle metalliche può danneggiare il sistema nervoso e quello circolatorio. Sostanze organiche come gli IPA o di amianto possono avere azione carcinogenica, mentre quelle inorganiche possono fungere da vettori per virus e batteri. E' ormai accertato un effetto sinergico in seguito all'esposizione combinata alle particelle sospese e all' $\text{SO}_2$ . E' stato infatti osservato un incremento nella risposta irritativa, probabilmente attribuibile alla capacità delle particelle di trasportare l' $\text{SO}_2$  più profondamente nell'apparato respiratorio.

### **NMVOC - Composti Organici Volatili Non Metanici**

*Caratteristiche fisico chimiche:* Sono una classe di composti organici molto vari: idrocarburi alifatici, aromatici (benzene, toluene, xileni), ossigenati (aldeidi, chetoni), ecc. Lo stato di aggregazione (solido, liquido e gassoso) in cui possono presentarsi e la loro reattività dipendono dalla diversa struttura molecolare. Come gli  $\text{NO}_x$  sono i precursori dell'ozono troposferico.

*Origine:* Si originano da evaporazione dei carburanti durante le operazioni di rifornimento nelle stazioni di servizio, dai serbatoi e dagli stoccaggi, e dalle emissioni di prodotti incombusti dagli autoveicoli e dal riscaldamento domestico. Fonti secondarie, ma non trascurabili, sono le emissioni di solventi da attività di grassaggio, lavaggio a secco e tinteggiatura.

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* Gli effetti sull'uomo e sull'ambiente sono molto differenziati in funzione del composto. Tra gli idrocarburi aromatici volatili il benzene è il più pericoloso perché risulta essere cancerogeno per l'uomo.

### **O<sub>3</sub> - Ozono**

*Caratteristiche fisico chimiche:* L'ozono è un gas incolore dall'odore acre, tipico inquinante secondario, non è emesso da nessuna sorgente diretta, ad eccezione delle stampanti laser, delle fotocopiatrici e delle scariche elettriche durante i temporali.

*Origine:* In natura si origina da più molecole d'ossigeno per azione della radiazione ultravioletta ed è concentrato nella stratosfera, una fascia compresa tra 20 e 40 Km dal suolo, fungendo da filtro dei raggi ultravioletti dannosi per la biosfera. La sua presenza nella troposfera (regione dell'atmosfera che si estende da 0 a 15 km di altitudine, dove costituisce uno dei componenti principali dello smog fotochimico), rappresenta invece un pericolo per gli organismi viventi a causa delle sue proprietà tossicologiche. Soprattutto nel periodo estivo, in presenza di alte temperature, forte irraggiamento solare ed elevata concentrazione dei cosiddetti "precursori" (idrocarburi e NO<sub>2</sub>), che attivano ed alimentano le reazioni fotochimiche, si verifica un notevole incremento delle concentrazioni di ozono nella troposfera.

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* A causa del suo elevato potere ossidante reagisce con ogni tipo di sostanza biologica ed esercita la sua azione per contatto diretto, in forma gassosa. L'ozono è irritante per le mucose e per gli occhi e a causa della sua elevata tossicità provoca difficoltà respiratorie, attacchi d'asma e mal di testa.

Può provocare anche grossi danni alla componente vegetale degli ecosistemi (invecchiamento foliare, ingiallimento e necrosi) ed al patrimonio storico-artistico.

### **HC - Idrocarburi**

*Caratteristiche fisico chimiche:* Sono composti formati solo da atomi di idrogeno e carbonio. Il loro stato di aggregazione dipende dal numero di atomi di C presenti nella struttura molecolare. Sono i precursori di inquinanti secondari come l'ozono ed altri ossidanti.

*Origine:* In natura derivano da decomposizione di materia organica, in misura minore da attività geotermica e da combustioni spontanee.

Le fonti antropiche principali sono il traffico, diversi processi industriali e gli impianti di combustione.

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* Gli idrocarburi in atmosfera interagiscono con gli NO e gli atomi di ossigeno formando composti ossidati e radicali liberi, che a loro volta, reagendo con gli NO, provocano la formazione di ozono troposferico.

### **H<sub>2</sub>S - Acido Solfidrico**

*Caratteristiche fisico chimiche:* E' un gas incolore, idrosolubile, dal caratteristico odore di uova marce. E' un acido debole e presenta una soglia olfattiva molto bassa.

*Origine:* In natura è prodotto dalla decomposizione anaerobica di composti organici e dalle emissioni derivanti da fenomeni vulcanici e geotermici.

Le fonti antropiche sono costituite da vari processi industriali: raffinazione del petrolio, concia delle pelli, produzione di carbone coke, di fertilizzanti, di coloranti e pigmenti, di processi di depurazione delle acque.

*Effetti sull'uomo e sull'ambiente:* E' un gas molto tossico, poiché è irritante per occhi e mucose e inibisce la respirazione cellulare. Nelle acque, per la sua azione riducente, sequestra l'ossigeno disciolto provocando fenomeni di anossia. Mostra una discreta aggressività nei confronti dei materiali, in particolare dei metalli.

Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

Cap.14. Principi di funzionamento delle macchine a fluido

***Paolo Di Marco***

*Versione 2005.01 – 04.05.06.*

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## 14.1 Introduzione

Fino a questo momento, abbiamo considerato le turbine, i compressori e le pompe come “scatole nere”: ci siamo limitati ad applicare i bilanci termodinamici ai loro ingressi ed alle loro uscite senza preoccuparci dei loro principi di funzionamento, ed in particolare dei meccanismi fisici che consentono la trasformazione dell’energia interna del fluido in energia meccanica o viceversa. In questo capitolo, verranno esposti i principi fondamentali alla base di tali meccanismi fisici.

## 14.2 Macchine volumetriche e macchine dinamiche

Abbiamo già operato una distinzione delle macchine in macchine *motrici* (che convertono l’energia del fluido in energia meccanica) e macchine *operatrici* (che operano la trasformazione opposta). Nelle prime rientrano i *motori alternativi* e le *turbine*; le seconde sono usualmente distinte in *pompe* (se operano su un liquido) e *compressori* se operano su un gas. Una classificazione *indipendente dalla precedente* divide le macchine in *rotative* (quando gli organi di conversione sono animati da moto rotatorio) o *alternative* (con organi di conversione animati di moto alterno).

Infine, per gli scopi che ci prefiggiamo in questo capitolo, le macchine a fluido possono essere divise in due categorie principali: macchine *volumetriche* (o *statiche*) e macchine *dinamiche* (o *turbomacchine*). Nelle macchine volumetriche, il fluido è racchiuso in un volume che cambia periodicamente di forma (una pompa da bicicletta è un esempio calzante): la conversione deriva dalle forze di pressione, di natura essenzialmente statica, che si esercitano sulle pareti mobili. Nelle macchine dinamiche (rappresentate ad es. da un ventilatore) le forze sugli organi mobili sono causati dalla variazione del vettore velocità (in modulo e direzione) del fluido e sono quindi intrinsecamente connesse al moto dello stesso.

E’opportuno rimarcare come le tre classificazioni siano indipendenti tra di loro. Ad esempio, una turbina è una macchina motrice, rotativa e dinamica. Una pompa a pistoni è una macchina operatrice, alternativa, statica; ma una pompa ad ingranaggi è una macchina operatrice, rotativa, statica. Infine, una motrice a vapore a stantuffo (caduta oggi in disuso) è un esempio di macchina motrice, alternativa, statica.

Tutte le macchine a fluido possono trattare sia liquidi che aeriformi. I principi di funzionamento sono gli stessi. Tuttavia in particolari condizioni operative possono insorgere problematiche di natura differente: nel caso di aeriformi, ad alto numero di Mach si possono avere effetti dovuti alla comprimibilità del fluido; nel caso di liquidi, in vicinanza della temperatura di saturazione od in presenza di gas disciolti si possono creare delle sacche gassose (il fenomeno viene detto *cavitazione*) che perturbano notevolmente il funzionamento della macchina e/o ne danneggiano gli organi.

Le principali caratteristiche delle macchine volumetriche e dinamiche sono riassunte nella Tab. 14-1.

MACCHINE VOLUMETRICHE	MACCHINE DINAMICHE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rotative o alternative.</li> <li>• Fluido periodicamente racchiuso in un volume. Portata pulsante nel tempo.</li> <li>• Scambio di energia dovuto alla pressione statica sulle pareti mobili.</li> <li>• Variazione di momento motore nel tempo.</li> <li>• Momento motore pressoché indipendente dalla velocità del fluido.</li> <li>• Forze alterne notevoli (per macchine alternative).</li> <li>• Basso rapporto potenza/massa della macchina.</li> <li>• Adatte per elevati rapporti di compressione e basse portate.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Solo rotative.</li> <li>• Flusso continuo di fluido. Portata costante nel tempo.</li> <li>• Scambio di energia dovuto al moto relativo sugli organi mobili.</li> <li>• Momento motore o resistente pressoché costante.</li> <li>• Momento motore fortemente dipendente dalla velocità del fluido.</li> <li>• Assenza di forze alterne. Presenza di spinte assiali.</li> <li>• Elevato rapporto potenza/massa della macchina.</li> <li>• Adatte per rapporti di compressione relativamente bassi e portate elevate.</li> </ul>

**Tabella 14-1:** Caratteristiche salienti delle macchine volumetriche e dinamiche a confronto.

### 14.3 Tipologie e principi di funzionamento delle macchine volumetriche

Le macchine volumetriche presentano una tipologia vastissima e non esauribile all'interno di questa trattazione: le più diffuse sono le pompe e compressori ad ingranaggi o a vite (di tipo rotativo) e le pompe e i compressori a stantuffo (di tipo alternativo). In questo paragrafo faremo riferimento alle macchine alternative.

Nelle macchine alternative, il moto alternato dello stantuffo (pistone) è trasformato in moto rotatorio da un meccanismo biella-manovella, v. Fig.14-1. La *biella* PA è collegata al pistone tramite un perno detto spinotto; il punto P si dice anche piede di biella. Il componente AO è detto *manovella*. Il punto A (testa di biella o bottone di manovella) è animato di moto rotatorio che supporremo uniforme. L'albero motore ha asse passante per il punto O (cuscinetto di banco). La velocità del pistone (che corrisponde a quella del piede di biella) può essere ricavata derivando rispetto al tempo l'espressione

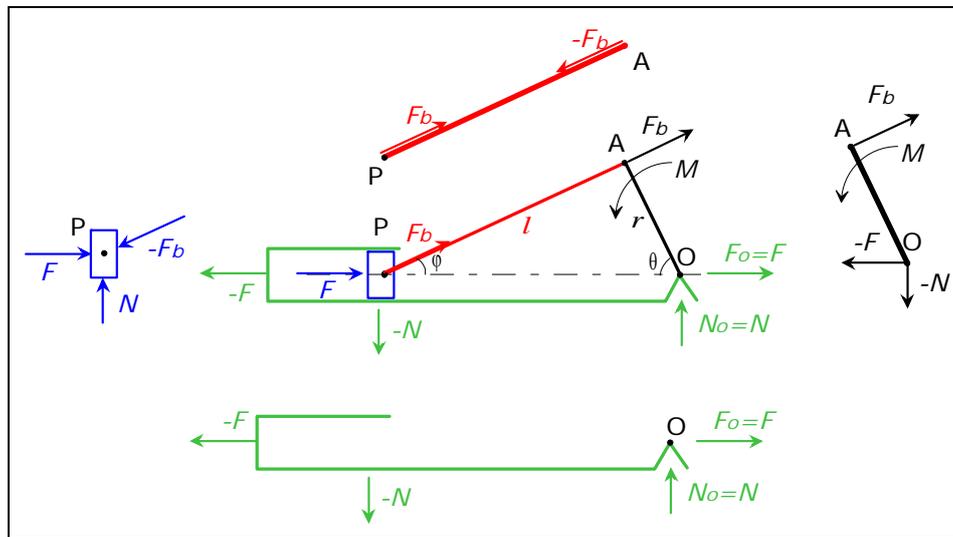
$$PO = l \cos \varphi + r \cos \theta \quad (14.1)$$

tenuto conto che  $l \sin \varphi = r \sin \theta$  e che  $\dot{\theta} = \omega$  si ottiene approssimativamente

$$v_p = \omega r \left( \sin \theta + \frac{r}{2l} \sin 2\theta \right) \quad (14.2)$$

da cui risulta che per  $l \gg r$  il pistone è animato di moto armonico. La velocità massima del pistone si raggiunge quando biella e manovella sono in quadratura, ovvero formano un angolo di  $90^\circ$ .

**Bilancio di forze in una macchina volumetrica alternativa**



**Figura 14-1:** Trasmissione delle forze nel sistema biella-manovella ed equilibrio dei quattro organi che lo costituiscono.

Il bilancio di forze, nell'ipotesi che il moto sia lento o che la biella sia di massa trascurabile, in modo da poter trascurare le azioni dinamiche, mostra che la forza  $F$  agente sul pistone come risultante della pressione dei gas si scompone nelle componenti

$$F_b = \frac{F}{\cos \varphi} \quad ; \quad N = F \tan \varphi \quad (14.3)$$

La prima sollecita la biella a trazione/compressione, mentre la seconda non dà lavoro utile (essendo diretta perpendicolarmente al moto) e, spingendo il pistone contro il cilindro, provoca una resistenza per attrito. La forza  $N$ , con la sua corrispondente applicata al cuscinetto di banco  $O$ ,  $N_o$ , forma una coppia di intensità variabile nel tempo detta *coppia di reazione*, che è pari al momento motore. Sul basamento di scarica anche una forza  $F$ , perpendicolare a  $N_o$  ed uguale in modulo alla forza agente sul pistone.

Le forze esterne che agiscono sul meccanismo (ovvero il sistema pistone-biella-manovella) sono dunque: il momento motore  $M$  applicato all'albero della manovella; la coppia di reazione  $N-N_o$ , di valore pari ad  $M$ , che deve essere equilibrata dal basamento; la forza  $F$  agente sul pistone (dovuta alla pressione del fluido) e la corrispondente  $F_o$  sul cuscinetto di banco, che si equilibrano vicendevolmente. Più in generale, bisogna considerare anche che la  $F$  varia con la posizione del pistone.

Infine uguagliando la potenza della forza agente sul pistone a quella raccolta all'albero (nell'ipotesi quindi di attrito e forze inerziali trascurabili) si ottiene un'espressione del momento all'asse  $M$

$$F v_p = M \omega \Rightarrow M = Fr \left( \sin \theta + \frac{r}{2l} \sin 2\theta \right) \quad (14.4)$$

La Eq.(14.4) mostra che il momento motore all'albero non è costante, anche in caso di forza  $F$  costante e moto rotatorio uniforme dell'albero stesso. In particolare vi sono due *punti morti* ( $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ ) in cui il momento all'asse è comunque nullo. Inoltre, la presenza di un momento resistente elevato a macchina ferma può ostacolare l'avviamento delle macchine operatrici.

**Portata in una macchina volumetrica alternativa – rendimento volumetrico**

La portata in una macchina volumetrica di cilindrata  $V$  il cui albero ruota alla velocità angolare  $n$  (giri/sec) è data da

$$G = \rho_i V n \eta_v \tag{14.5}$$

dove  $\rho_i$  rappresenta la densità del fluido in ingresso e  $\eta_v$  il rendimento volumetrico: tale grandezza, per i fluidi comprimibili, è minore di uno per una serie di fattori tra cui i principali sono le resistenze idrauliche nei condotti di aspirazione (che riducono la pressione e quindi la densità del fluido), i trafiletti di fluido dalle tenute e l'effetto del *volume nocivo*, ovvero il volume di fluido compreso tra la testata ed il pistone quando quest'ultimo si trova al punto morto superiore: il gas compresso che rimane intrappolato in tale volume si espande nella successiva fase di ritorno del pistone, sottraendo così "spazio" al gas in ingresso. Per i liquidi si può porre  $\eta_v \cong 1$ ; per i gas si ha  $\eta_v \cong 0.85 - 0.65$ .

Il volume nocivo non può essere ridotto a zero per evitare gli urti del pistone sulla testata e per consentire l'apertura delle valvole di aspirazione e scarico.

Da questa breve e schematica trattazione si evince che le macchine alternative soffrono di due limitazioni fondamentali: la variabilità del momento motore o resistente (che viene in genere compensata con l'aggiunta di un volano) e le forze alterne sui cuscinetti che provocano sollecitazioni e vibrazioni del basamento. Ulteriori forze alterne si originano per effetto delle forze inerziali dovute alle masse del pistone e della biella, animati di moto accelerato: tali forze sono bilanciate in tutto o in parte da opportuni contrappesi (per approfondimenti in merito si veda il testo di Funaioli).

Il complesso di tali azioni provoca una limitazione del regime di rotazione della macchina o della massa e dimensione degli organi in moto: il che si traduce in definitiva, secondo la (14.5), in una limitazione della portata massima trattabile.

**ESEMPIO 14-1 – Determinazione della cilindrata di un compressore**

Il compressore volumetrico alternativo di un impianto industriale di refrigerazione deve trattare una portata  $G = 0.03$  kg/s di vapore saturo secco di ammoniaca alla temperatura di ingresso  $T_1 = -40$  °C. Determinare la cilindrata del compressore, supponendo che il rendimento volumetrico valga 0.7 e la velocità di rotazione 1430 rpm.

Dalle tabelle termodinamiche dell'ammoniaca, a  $x = 1$  e  $T = -40$  °C si ha  $v_1 = 1.553$  m<sup>3</sup>/kg e quindi  $\rho_1 = 0.64$  kg/m<sup>3</sup>.

Dalla Eq.(14.5) si ha quindi

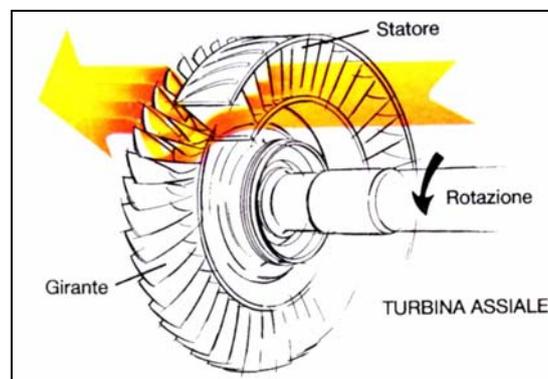
$$V = \frac{G}{\rho_i \eta_v n} = \frac{0.03}{0.64 \cdot 0.7 \cdot 1430 / 60} = 0.0028 \text{ m}^3 = 2.8 \text{ L}$$



#### 14.4 Principi di funzionamento delle macchine dinamiche

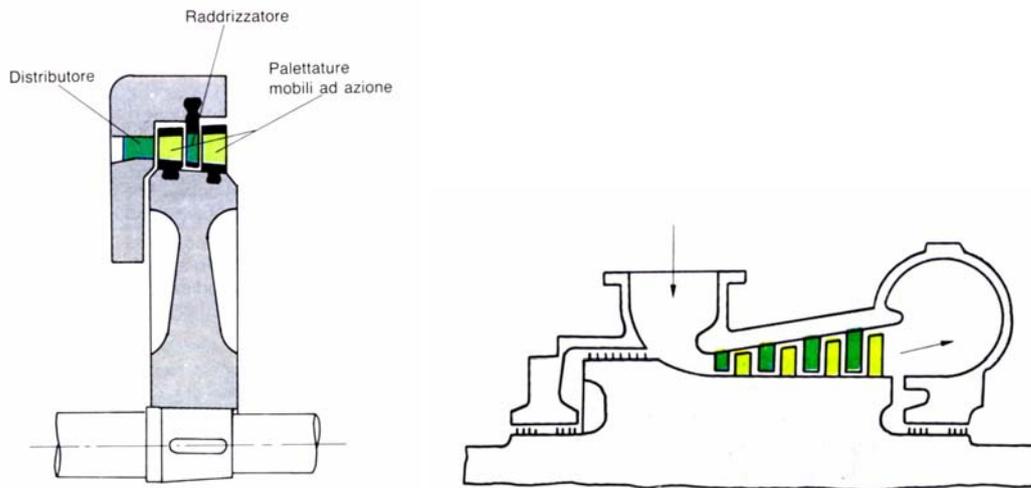
Nelle macchine dinamiche, come detto, le azioni esercitate dal fluido sugli organi della macchina sono dovute al moto del fluido, e sono quindi di natura essenzialmente dinamica. Vedremo in seguito che tali azioni possono essere comprese in termini di bilancio del momento della quantità di moto del sistema.

Le macchine dinamiche sono sempre di natura rotativa. Lo schema di principio è riportato in Fig. 14-2. Sull'asse di rotazione sono calettati una o più dischi detti *ruote* su cui sono ricavati dei condotti (*palettature*) che dirigono opportunamente il moto del fluido; questa parte della macchina si dice *rotore* o *girante* ed è calettata su cuscinetti in grado di sopportarne le spinte radiali ed assiali. All'asse di rotazione sono collegati gli organi destinati a raccogliere la potenza erogata (es. un alternatore) o a fornire la potenza richiesta (es. un motore elettrico). Anche la parte fissa della macchina (*cassa* o *statore*) può recare palettature (*distributore*) che orientano opportunamente il flusso di fluido sul rotore, oltre eventualmente ad accelerarlo o rallentarlo. Le macchine più semplici (ventilatori, mulini a vento) non hanno cassa.

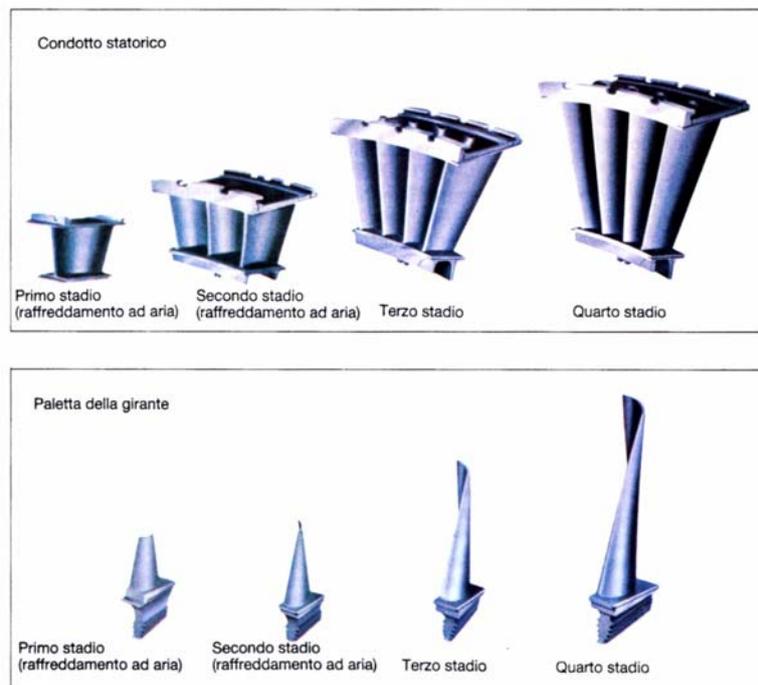


**Figura 14-2:** Schema di principio del funzionamento di una turbina assiale, con indicato il flusso di gas.

Le turbomacchine si dicono ad un solo stadio quando hanno un'unica ruota, oppure *multistadio* quando sono costituite da più ruote in serie, intervallate in genere da schiere di palettature statoriche, vedi Figg. 14-3 e 14-4. A seconda della direzione prevalente di efflusso le turbomacchine si distinguono in *assiali* (flusso parallelo all'asse di rotazione), *radiali* (flusso orientato perpendicolarmente all'asse di rotazione, in direzione radiale), e *miste*. Le macchine radiali si dicono *centrifughe* quando il flusso è diretto dall'interno del rotore verso l'esterno, *centripete* in caso contrario.



**Figura 14-3:** Turbine assiali multistadio: i condotti rotorici (più chiari) sono inframmezzati da palettature statoriche (più scure). Il flusso è da sinistra verso destra. La turbina a destra ha due stadi, quella a sinistra quattro.

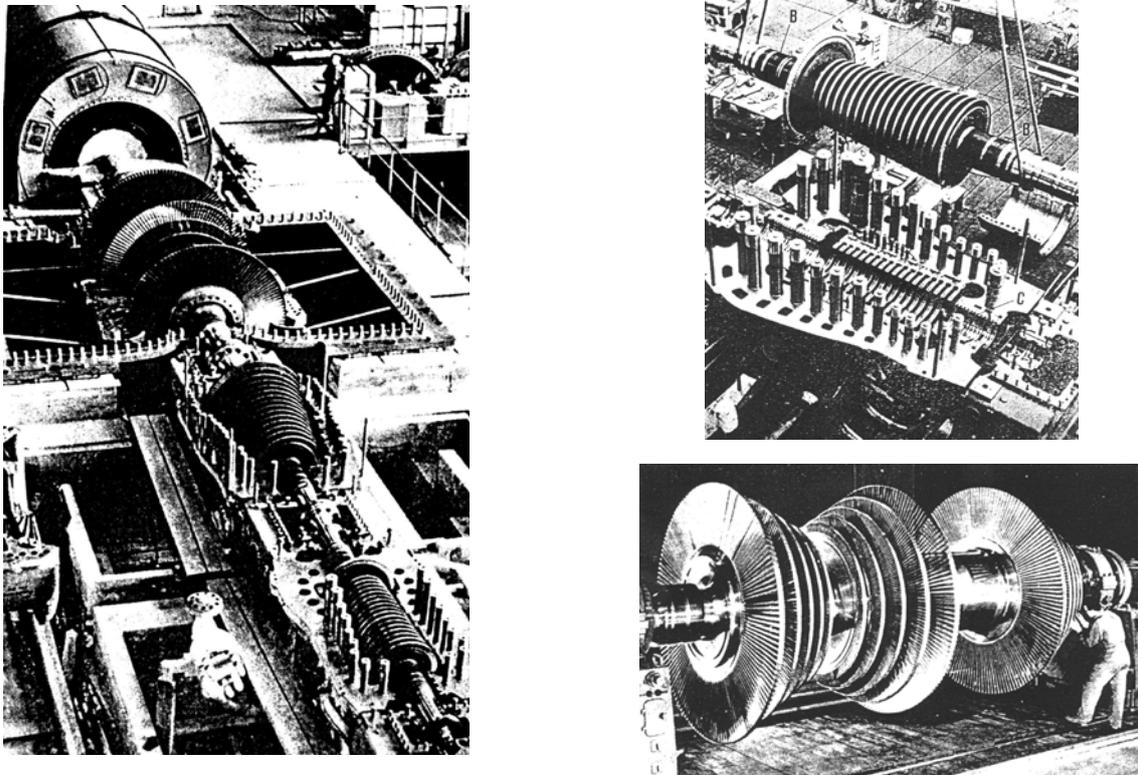


**Figura 14-4:** Dettaglio delle palettature statoriche e rotoriche di una turbina a gas multistadio. Le palettature dei primi stadi, esposte a gas molto caldi, sono refrigerate.

Il principio di base di funzionamento di una macchina dinamica può essere compreso intuitivamente tramite il seguente esempio: supponiamo di essere in piedi su una tavola di una giostra che si muove di moto rotatorio uniforme e di spostarci radialmente dalla periferia verso il centro. Questo provoca un decremento del momento d'inerzia del sistema (dato che la nostra massa si avvicina all'asse di rotazione) e quindi, in assenza di azioni esterne,

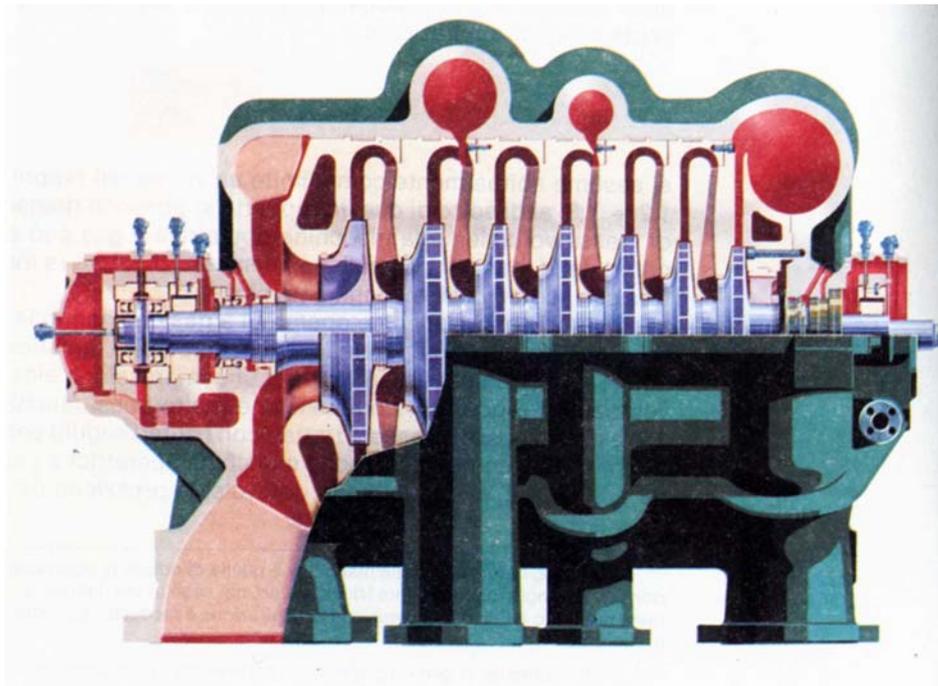
doendosi il momento angolare mantenere costante, si avrebbe un aumento di velocità angolare. Per mantenere la velocità angolare costante, bisogna esercitare una coppia discorde col verso di rotazione, esercitando così lavoro negativo sul sistema, ovvero raccogliendo lavoro all'esterno: su questo principio, in parole povere, funzionano le turbine centripete. L'opposto avviene se ci spostiamo dal centro alla periferia: questo caso corrisponde ad una pompa. Naturalmente, il nostro moto sulla tavola della giostra potrebbe essere non diretto radialmente e questo introduce altri gradi di libertà nelle variazioni del momento angolare.

Alcune tipologie più frequenti di turbomacchine sono descritte nel seguito (si tralasciano in questa sezione le macchine idrauliche). La Fig. 14-5 mostra una turbina a vapore di un impianto termoelettrico, collegata ad un alternatore. I rotori sono riportati in dettaglio sulla destra.

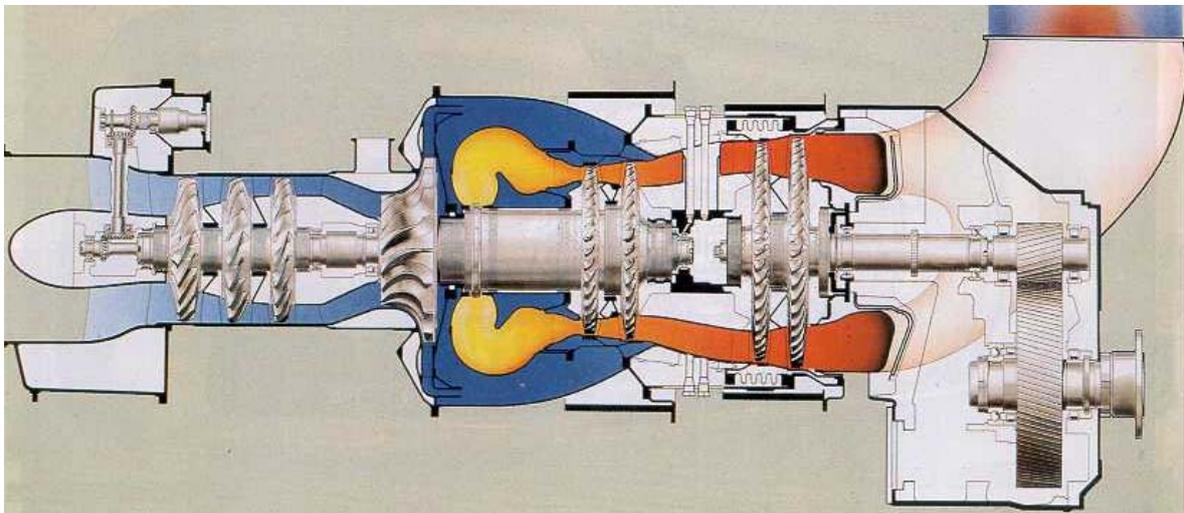


**Figura 14-5:** Turbina a vapore di un impianto termoelettrico: nelle foto di sinistra si notano, a partire dal basso, il corpo di alta pressione (flusso verso il basso) quello di media pressione (flusso verso l'alto) e quello di bassa pressione (a doppio flusso). Ancora più in alto si vede l'alternatore. Sulla destra, in alto un rotore di alta pressione sopra la sua cassa (si vede in testa, a sinistra, la ruota ad azione, più grande, di cui parleremo in seguito) ed in basso un rotore di media e bassa pressione.

La Fig. 14-6 mostra un compressore centrifugo multistadio. Infine la Fig. 14-7 mostra un motore aeronautico turboelica (i dettagli sono riportati nelle didascalie).



**Figura 14-6:** Compressore centrifugo multistadio. Il flusso procede da sinistra a destra, come si può notare dalla progressiva riduzione del diametro dei condotti. I canali statorici riportano il gas dalla periferia della girante precedente all'occhio di quella successiva. Vi sono due spillamenti intermedi di gas al 2° ed al 4° stadio.



**Figura 14-7:** Spaccato di un motore turboelica. Da sinistra si notano il compressore (tre stadi assiali più uno centrifugo), la camera di combustione e la turbina. La turbina, in quattro stadi, è divisa in due sezioni indipendenti: le prime due ruote azionano il compressore e le ultime due (dette ruote di potenza) il carico. In questo modo è possibile variare il regime di rotazione dell'elica senza perturbare il funzionamento del compressore. Infine, all'estrema destra, si nota il riduttore meccanico di velocità.

**Richiami sui principi fisici fondamentali alla base del funzionamento delle turbomacchine**

*Composizione delle velocità*

All'interno di questo capitolo, per conformità con la notazione usata generalmente per le turbomacchine, definiremo  $\vec{c}$  la velocità nel sistema di riferimento fisso (solidale con lo statore della macchina),  $\vec{w}$  la velocità relativa nel sistema solidale con il rotore ed  $\vec{u}$  la velocità di trascinamento. Come è noto, vale la regola di composizione vettoriale delle velocità

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w} \quad (14.6)$$

*Bilancio del momento della quantità di moto*

Il momento della quantità di moto, o momento angolare, rispetto ad un polo  $O$ , è definito, per un sistema di masse discrete  $m_i$  animate da velocità  $\vec{c}_i$ , dal prodotto vettoriale<sup>1</sup>

$$\vec{P} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{c}_i) = \sum_i m_i (\vec{P}_i - \vec{O} \times \vec{c}_i) \quad (14.7)$$

Per un sistema continuo, la sommatoria è sostituita da un integrale sul volume  $V$  del sistema.

Giova ricordare che, in forza delle proprietà del prodotto vettoriale, le componenti di velocità parallele ad  $\vec{r}$  non danno contributo al momento angolare, e che il vettore prodotto è diretto perpendicolarmente ad entrambi i fattori.

Il momento angolare è una grandezza vettoriale estensiva e quindi anche per essa (esattamente come per la massa e l'energia) si può scrivere un'equazione di bilancio. Per un sistema chiuso essa è semplicemente data dalla seconda equazione cardinale della dinamica

$$\vec{M}_e = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (14.8)$$

Dove  $\vec{M}_e$  rappresenta il momento delle forze esterne ( $\vec{M}_e = \vec{r} \times \vec{F}_e$ ). Detta equazione esprime il fatto che la variazione per unità di tempo del momento angolare di un sistema è dovuta al flusso di momento angolare introdotto nel sistema stesso dalle forze esterne, che altro non è che il momento delle forze stesse (come corollario, il momento angolare si conserva in un sistema isolato).

Per un sistema aperto bisogna introdurre anche la variazione di momento angolare trasportata dentro e fuori il sistema dai flussi di massa entranti ed uscenti. La formulazione generale è alquanto ostica dal punto di vista matematico, per cui ci limitiamo a scriverla nelle ipotesi seguenti, particolarmente adatte per descrivere il comportamento di una turbomacchina.

- Il sistema è a regime, quindi la variazione del momento angolare nel tempo è nulla; l'asse di rotazione ha orientamento costante nel tempo e il sistema è animato da velocità angolare costante.
- Ci limitiamo a considerare la componente del vettore momento angolare diretta lungo l'asse di rotazione del sistema: in altre parole, scriviamo una equazione scalare invece di una equazione vettoriale come la (14.8).

<sup>1</sup> Si ricorda che il prodotto vettoriale di due vettori  $\underline{u} \times \underline{v}$  che formano tra loro un angolo  $\alpha$  è un vettore orientato perpendicolarmente al piano contenente  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$ , di modulo  $u v \sin \alpha$  e verso dato dalla regola della mano destra.

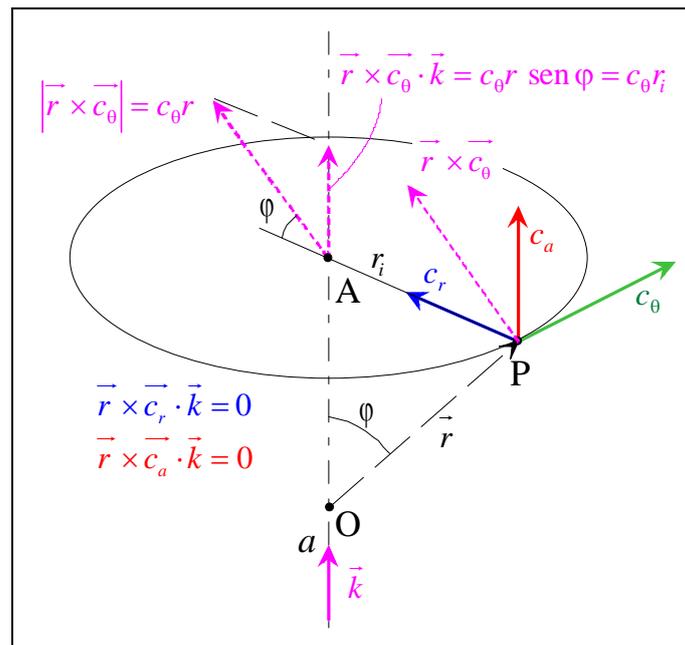
- Il sistema ha un solo ingresso ed una sola uscita, ed essendo a regime, la portata massica è costante.

In tale ipotesi l'equazione si può scrivere come

$$M_e = G(r_u c_{\theta,u} - r_i c_{\theta,i}) \quad (14.9)$$

dove  $r_i$  rappresenta la distanza della sezione di ingresso (o più precisamente, anche se non esattamente, quella del suo baricentro) dall'asse di rotazione e  $c_\theta$  rappresenta la componente di velocità tangenziale, ovvero perpendicolare al piano  $OAP$  (v. Fig.14-8): infatti, come risulta dalla figura suddetta, le componenti di velocità radiale ed assiale non danno momento angolare nella direzione dell'asse di rotazione (si ricorda che componente del momento angolare lungo l'asse  $a$ , di versore  $\vec{k}$ , è data dal prodotto misto  $\vec{r} \times \vec{c} \cdot \vec{k}$ , e che tale prodotto è nullo quando i tre vettori sono complanari).

Bisogna notare il perfetto parallelo tra l'Eq.(14.9) ed i bilanci di massa ed energia introdotti nel cap.4: anche in questo caso, essendo il sistema a regime, la variazione di momento angolare nel tempo è nulla, e quindi il flusso di momento angolare introdotto od estratto dal sistema dalle forze esterne (primo membro) eguaglia quello dovuto all'introduzione o estrazione di massa (secondo membro).

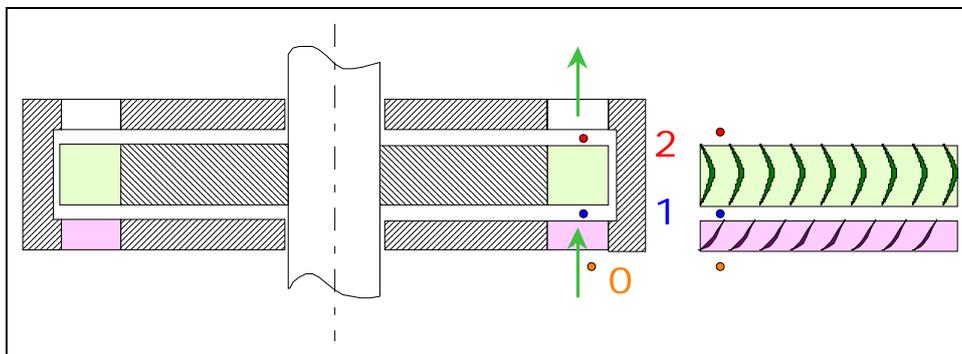


**Figura 14-8:** Componente assiale del momento angolare per unità di massa del fluido, che possiede una velocità  $\vec{c}$  di componenti radiale, tangenziale ed assiale rispettivamente  $c_r, c_a, c_\theta$ .

L'espressione del momento angolare trasportato dalla massa si spiega facilmente notando che il prodotto  $r_i c_{\theta}$  rappresenta il momento angolare per unità di massa rispetto all'asse di rotazione: moltiplicando tale quantità per il flusso di massa nell'unità di tempo, ovvero la portata  $G$ , si ottiene il flusso di momento angolare per unità di tempo.

L'Eq.(14.9) mostra che nelle macchine dinamiche (al contrario di quelle statiche) il momento applicato all'albero è proporzionale alla portata di fluido.

Oltre al bilancio di momento di quantità di moto, sarebbe ovviamente possibile scrivere un *bilancio di quantità di moto*, generalizzando la prima equazione cardinale della dinamica ai sistemi fluidi aperti. Tale equazione (anch'essa vettoriale) costituisce la base della *fluidodinamica* ed è utilizzata per spiegare una varietà di fenomeni che vanno dalla teoria della lubrificazione, alla resistenza sui corpi in moto in un fluido, al volo degli aerei, alle spinte sui condotti percorsi da un fluido. Il bilancio di quantità di moto per un fluido newtoniano incomprimibile (costituito da una equazione vettoriale, ovvero tre scalari) prende il nome di *equazioni di Navier-Stokes*. Per la brevità del corso cui si riferiscono queste note, essa viene (a malincuore) tralasciata. Nell'ambito delle turbomacchine, tale bilancio sarebbe necessario per determinare le spinte assiali sui rotori delle turbine.



**Figura 14-9:** Schematizzazione di un singolo stadio di turbomacchina assiale, con la palettatura fissa del distributore (in basso) e quella mobile del rotore (al centro).

### Bilancio di energia in una turbomacchina

Nel seguito, faremo riferimento ad uno stadio di turbomacchina (vedi Fig. 14-9) costituito da uno statore (o distributore), seguito da un rotore e denoteremo con l'indice 0 la sezione di ingresso nello statore della macchina, con l'indice 2 la sezione di uscita dal rotore e con l'indice 1 la sezione di confine tra statore e rotore. Supponendo la macchina a regime ed adiabatica, il bilancio di energia per l'intero sistema è dato da

$$W'_m = G \left[ \left( h_0 + \frac{c_0^2}{2} \right) - \left( h_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) \right] = G (h_{r,0} - h_{r,2}) \quad (14.10)$$

dove *non* si sono trascurate le energie cinetiche in ingresso ed uscita; con  $h_r$  si indica il valore della cosiddetta *entalpia di ristagno* (talvolta anche *entalpia totale*) che include l'energia cinetica

$$h_r = h + \frac{c^2}{2} \quad (14.11)$$

Per contrapposizione, l'entalpia  $h$  viene detta *entalpia statica*, in quanto non include il contributo dell'energia cinetica. Ovviamente l'entalpia statica è sempre minore od uguale all'entalpia di ristagno, e per un fluido in quiete esse coincidono.

Per lo statore (supposto adiabatico e rigido) si ha, analogamente agli ugelli visti nel cap.5

$$h_0 + \frac{c_0^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2}, \text{ ovvero } h_{r,0} = h_{r,1} \quad (14.12)$$

L'equazione precedente ci dice che nello statore l'entalpia del fluido si converte in energia cinetica o viceversa, ma l'entalpia di ristagno si mantiene costante.

Infine per il rotore possiamo adottare due diversi punti di vista: adottiamo il sistema di riferimento fisso, rispetto al quale il rotore il rotore ruota e bisogna usare le velocità assolute

$$W'_m = G \left[ \left( h_1 + \frac{c_1^2}{2} \right) - \left( h_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) \right] = G (h_{r,1} - h_{r,2}) \quad (14.13)$$

Ovviamente, le tre equazioni suddette non sono indipendenti fra loro, la (14.10) è la somma della (14.12) e della (14.13).

Nelle macchine operatrici, in cui lo statore segue il rotore, gli indici delle equazioni precedenti vanno adattati in maniera banale.

**Potenza erogata od assorbita da una turbomacchina. Equazione di Eulero.**

Riprendiamo la Eq. (14.9) e deriviamo da essa l'espressione della potenza moltiplicando ambo i membri per la velocità angolare del rotore,  $\omega$

$$W'_m = -M_e \omega = G \omega (r_i c_{\theta,i} - r_u c_{\theta,u}) \quad (14.14)$$

Il segno negativo deriva dal fatto che, conformemente alla notazione tradizionalmente adottata in termodinamica si considera *positivo* il lavoro (e quindi anche la potenza) *ceduta al sistema* (caso delle macchine operatrici) e *negativo* quello *ceduto all'esterno* (caso delle macchine motrici).

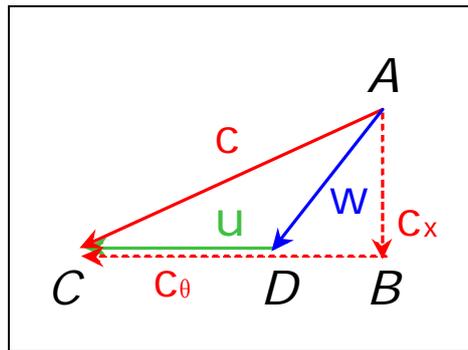
Si può sfruttare il fatto che la velocità di trascinamento è data da  $u = \omega r$  per riformulare la precedente come

$$W'_m = G (u_i c_{\theta,i} - u_u c_{\theta,u}) \quad (14.15)$$

Oppure, in termini di lavoro per unità di massa

$$\frac{W'_m}{G} = l' = (u_i c_{\theta,i} - u_u c_{\theta,u}) \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (14.16)$$

La Eq.(14.16) è stata derivata per la prima volta da Leonhard Euler nel 1754 e prende il nome di *equazione di Eulero delle turbomacchine*. In altri testi, il nome "equazione di Eulero" è riferito alla Eq.(14.9).



**Figura 14-10:** Componenti della velocità in una turbomacchina: la componente  $c_x$  può essere radiale, assiale o in entrambe le direzioni.

La (14.15) può essere ancora rielaborata in termini di velocità totali anziché di componenti tangenziali. A tal fine, facciamo riferimento alla Fig.14-10, in cui con  $c_\theta$  si indica la componente tangenziale (ovvero, parallela ad  $\vec{u}$ ) della velocità assoluta e con  $c_x$  si indica la rimanente componente di  $\vec{c}$ , che può essere diretta radialmente, assialmente o in entrambe le direzioni. Si ha ovviamente

$$c^2 = c_\theta^2 + c_x^2 \quad (14.17)$$

Dal triangolo ABD di Fig.14-10 si ha anche

$$(c_\theta - u)^2 = w^2 - c_x^2 \quad (14.18)$$

e sostituendo il valore di  $c_x$  dato dalla (14.17) si ha con semplici passaggi

$$u c_\theta = \frac{c^2 + u^2 - w^2}{2} \quad (14.19)$$

Sostituendo nella (14.15) si ha infine

$$l' = \frac{W'_m}{G} = \frac{(c_1^2 - c_2^2) + (u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}{2} \quad (14.20)$$

La (14.20) mostra che il fluido compie lavoro positivo (quindi ceduto all'esterno) secondo tre meccanismi: riducendo la sua energia cinetica assoluta (primo termine), spostandosi dalla periferia al centro del rotore (secondo termine) ed espandendosi nel rotore (terzo termine).

E' opportuno notare due importantissime implicazioni della (14.20).

La prima è che il lavoro per unità di massa (e quindi, finché si rimane sulla terra, anche quello per unità di peso, ovvero la prevalenza) scambiato in una turbomacchina *dipende solo dai triangoli di velocità* (e quindi dalla forma dei condotti) e *non dalla natura del fluido* che vi scorre. Questo spiega perché tali macchine, ad es. le pompe centrifughe, vengono caratterizzate dalla prevalenza, che rimane invariata indipendentemente dal fluido che trattano.

In realtà, un'analisi più dettagliata mostra che la natura del fluido (ad es. la sua viscosità) influenza le perdite che hanno luogo nelle palettature, e quindi che fluidi diversi danno luogo a prestazioni (sia pur lievemente) diverse.

La seconda implicazione della (14.20) riguarda le macchine radiali e miste: è evidente che il secondo termine è *positivo* caso di flusso centripeto ( $u_1 > u_2$ ) e *negativo* in caso di flusso centrifugo (nel caso di macchine assiali, esso è invece nullo). Quindi per sfruttare al meglio tale termine, conviene che le macchine operatrici, ovvero le pompe, che scambiano lavoro negativo, siano *centrifughe*, mentre quelle motrici, che scambiano lavoro positivo, siano *centripete*. Naturalmente è possibile anche fare una scelta opposta, ma questo ha come conseguenza che, per compensare l'effetto sfavorevole del secondo termine, gli altri due termini devono essere aumentati. Questo implica l'incremento della velocità di attraversamento dei condotti della macchina, con conseguenze negative per le perdite per attrito, che aumentano al crescere di tale velocità.

### Grado di reazione

Si definisce *grado di reazione* il rapporto tra salto entalpico nel rotore e salto entalpico totale

$$R = \frac{h_1 - h_2}{h_{r,0} - h_{r,2}} \quad (14.21)$$

Il grado di reazione rappresenta l'energia ceduta per effetto dell'espansione nel rotore in rapporto all'energia ceduta totale. Il grado di reazione è compreso tra 0 ed 1.

Bisogna notare che al numeratore compare l'entalpia statica, e *non* l'entalpia di ristagno. In altri termini, al numeratore non si considera l'energia ceduta nel rotore per effetto di variazioni di energia cinetica del fluido ma solo quella dovuta alla pura espansione.

Se una macchina ha  $R = 0$  l'espansione del fluido avviene esclusivamente nello statore; tale tipo di macchina si dice *ad azione*. Viceversa, se  $R \neq 0$  la macchina è detta *a reazione* e l'espansione del fluido prosegue anche nei condotti rotorici.

Confrontando la (14.20) con la (14.13) si ottiene

$$h_1 - h_2 = \frac{(u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}{2} \quad (14.22)$$

mentre dalla (14.10) e dalla (14.20) si ha

$$h_{r,0} - h_{r,2} = \frac{(c_1^2 - c_2^2) + (u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}{2} \quad (14.23)$$

Combinando le (14.21), (14.22), (14.23) si ha un'ulteriore espressione del grado di reazione  $R$

$$R = \frac{(u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}{(c_1^2 - c_2^2) + (u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)} \quad (14.24)$$

### 14.5 Turbine assiali monostadio ad azione e reazione.

Nel seguito di questo paragrafo faremo riferimento a turbine *assiali*, ovvero quelle in cui il moto del fluido è parallelo all'asse della macchina. Di conseguenza, la velocità periferica non cambia, ovvero

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u} \quad (14.25)$$

Considereremo inoltre, per semplicità, solo il caso di espansione ideale (isoentropica) del fluido. Analizzeremo in successione le turbine a singolo stadio ad azione e a reazione, e infine quelle multistadio.

Il bilancio di energia per il rotore, Eq.(14.13) può in questo caso essere scritto anche in un sistema di riferimento solidale con il rotore stesso, nel quale non viene erogato lavoro (essendo il rotore per definizione fermo in tale sistema) ma bisogna far riferimento alle velocità relative

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \quad (14.26)$$

### ***Turbine ad azione***

Nelle turbine ad azione si ha grado di reazione  $R = 0$ . Di conseguenza, l'espansione del fluido avviene completamente nello statore: il rotore ha il ruolo di convertire l'energia cinetica che il fluido ha acquisito in energia meccanica.

Nel campo delle macchine a vapore, tale turbina fu inventata da De Laval nel 1883.

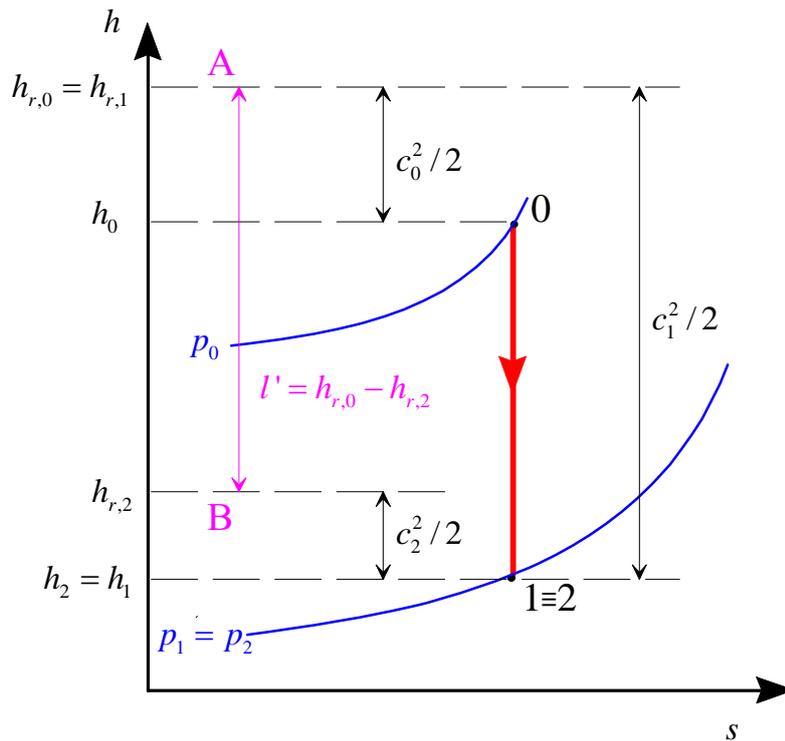
Da  $R = 0$ , v. Eq.(14.21), segue  $h_1 = h_2$  e conseguentemente, dalla (14.26) per tali turbine

$$w_1 = w_2 \quad (14.27)$$

ovvero le velocità *relative* in ingresso e in uscita al rotore sono uguali *in modulo*. Un'altra importante conseguenza della mancata espansione nel rotore è che (trascurando le perdite) la pressione a monte e a valle del rotore è uguale,  $p_1 = p_2$ . Non essendovi espansione, i vani tra le palette rotoriche hanno sezione costante e, in forza dei triangoli di velocità riportati in Fig.14-12, la faccia anteriore e posteriore della girante sono simmetriche.

Le trasformazioni ideali (e quindi isoentropiche) subite dal fluido in tale turbina sono illustrate nel diagramma  $h-s$  di Fig.14-11. Non essendovi salto di pressione attraverso il rotore, le isobare 1 e 2 coincidono. Il fluido in ingresso (sezione 0) ha entalpia  $h_0$  ed entalpia di ristagno  $h_{r,0} = h_0 + c_0^2/2$ . All'uscita dello statore (punto 1) il salto entalpico  $h_{r,0} - h_1$  si è trasformato in energia cinetica,  $c_1^2/2$ . All'interno del rotore non si ha salto entalpico, per cui  $h_1 = h_2$ . All'uscita del rotore, abbiamo una energia cinetica  $c_2^2/2$  che non può essere nulla, altrimenti il fluido non potrebbe uscire dalla macchina. Il lavoro erogato per unità di massa, conformemente alla (14.10) è dato dalla differenza delle entalpie di ristagno, ovvero dall'altezza del tratto AB.

Il lettore può, giustificatamente, sentirsi confuso dal fatto che nell'analisi delle turbine condotta nel Cap.5, l'energia cinetica del vapore era stata trascurata. In realtà, in tale situazione il bilancio energetico veniva applicato tra le tubazioni di adduzione ed estrazione del fluido dalla cassa della turbina, dove la velocità è di circa 10 m/s, quindi l'energia cinetica (e a maggior ragione la differenza tra la energia cinetica in ingresso e quella in uscita) è trascurabile rispetto all'entalpia. Invece nel caso presente, il bilancio si applica tra l'estremità dei condotti statorici e rotorici, dove le velocità hanno un valore notevolmente più elevato. Ancora una volta, si evince che la corretta identificazione dei confini del sistema è indispensabile per una corretta applicazione dei bilanci.



**Figura 14-11:** Diagramma entalpico per uno stadio ad azione (trasformazioni ideali).

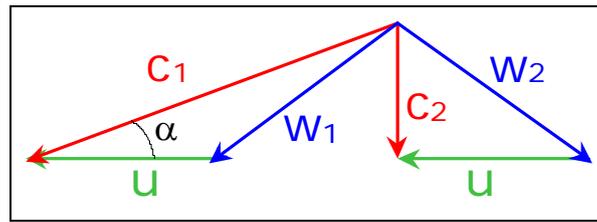
Vale anche la pena di ricordare che, quando il fluido scorre stazionariamente in un condotto rigido ed adiabatico (v. la trattazione degli ugelli nel Cap.5) *l'entropia di ristagno si mantiene costante*: nel caso presente, questo è illustrato dalla (14.12).

Vediamo adesso di determinare il valore delle velocità nelle varie sezioni della turbina: tali valori vengono tradizionalmente riportati in diagrammi che prendono il nome di *triangoli delle velocità*. Vediamo quali sono i requisiti cui debbono conformarsi le velocità in una turbina ad azione:

- le velocità relative in ingresso ed uscita rotore (in assenza di perdite) devono essere uguali in modulo, conformemente alla (14.27);
- la velocità assoluta di uscita  $c_2$  deve essere diretta perpendicolarmente alla sezione di uscita: infatti una componente tangenziale di velocità accrescerebbe inutilmente il modulo di  $c_2$ , riducendo il lavoro utile senza dare alcun contributo alla portata in uscita (questa condizione non è necessaria per turbine multistadio, dove l'energia cinetica in uscita può essere recuperata nello stadio successivo).

I triangoli di velocità risultanti sono riportati in fig.14-12, dove si è fatto uso della regola di composizione vettoriale delle velocità, Eq.(14.6). Si può partire a costruire il triangolo all'uscita 2, imponendo che  $c_2$  sia assiale. Dalla composizione di velocità si ricava la velocità relativa in uscita  $w_2$

$$\vec{w}_2 = \vec{c}_2 - \vec{u}_2 \quad (14.28)$$



**Figura 14-12:** Triangoli di velocità per uno stadio di turbina assiale ad azione (caso ideale).

Si impone quindi l'uguaglianza dei moduli delle velocità relative  $w$ . Ovviamente le due velocità  $w_1$  e  $w_2$  non possono avere la stessa direzione, altrimenti non vi sarebbe spinta sulle palette<sup>2</sup>, per cui in una turbina assiale l'unica soluzione è che la  $w_1$  sia orientata in maniera simmetrica rispetto all'asse.

Dalla (14.20) risulta per una turbina ad azione, essendo  $w_1 = w_2$ ,  $u_1 = u_2$

$$l' = \frac{W'_m}{G} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \quad (14.29)$$

d'altra parte dall'analisi dei triangoli di velocità, Fig.14-12, risulta che  $w_2$  ed  $u$  non sono indipendenti, e valgono le relazioni

$$u = c_1 \frac{\cos \alpha_1}{2} \quad (14.30)$$

$$c_2 = c_1 \sin \alpha_1 \quad (14.31)$$

$$w_1 = w_2 = \frac{c_1}{2} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha_1} \quad (14.32)$$

Dove abbiamo introdotto il parametro  $\alpha_1$ , ovvero l'angolo di efflusso dalla paletta fissa (v. Fig.14-12).

Definiamo *rendimento dello stadio* (o *rendimento interno* della turbina)  $\eta_t$  il rapporto tra il lavoro ottenuto dallo stadio e quello massimo disponibile, dato dal massimo salto di entalpia  $h_{r,0} - h_2$

$$\eta_t = \frac{l'}{h_{r,0} - h_2} \quad (14.33)$$

nel caso della turbina ad azione, v. Fig.14-11 si ha

$$h_{r,0} - h_2 = \frac{c_1^2}{2} \quad (14.34)$$

tenendo conto delle (14.29) (14.30) e (14.34), si ha quindi

<sup>2</sup> In forza della prima equazione cardinale della dinamica, ponendosi in un sistema solidale con il rotore, se si vuole che il fluido eserciti una spinta sulle palette esso deve variare la sua quantità di moto, che è una grandezza vettoriale: avendo imposto costante il modulo della velocità, ne deve quindi variare la direzione.

$$\eta_t = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2} = \cos^2 \alpha_1 \quad (14.35)$$

Infine, dalla (14.34) si ricava

$$c_1 = \sqrt{2(h_{r,0} - h_2)} = \sqrt{2 \Delta h} \quad (14.36)$$

e quindi per la (14.30)

$$u = \cos \alpha_1 \sqrt{\frac{\Delta h}{2}} \quad (14.37)$$

Bisogna fare attenzione alla distinzione tra il  $\Delta h$  introdotto nella (14.36) e il lavoro per unità di massa (corrispondente a  $h_{r,0} - h_{r,2}$ ) definito dalla (14.20). La differenza consiste nell'energia cinetica allo scarico, ovvero nella differenza tra  $h_2$  e  $h_{r,2}$  v. eq.(14.11). Il  $\Delta h$  è utile nella definizione di  $h_2$ , ovvero nella determinazione delle condizioni di pressione e temperatura all'uscita dello stadio. Al contrario  $l' = h_{r,0} - h_{r,2}$  definisce il lavoro per unità di massa erogato nella turbina ed è utile per il calcolo della potenza erogata. Queste differenze sono evidenziate nell'esempio 14-4.

Vediamo adesso alcune importanti implicazioni delle (14.30), (14.35) e (14.36).

Dalla (14.35) si deduce che il rendimento aumenta al decrescere dell'angolo di efflusso dalle palettature fisse,  $\alpha_1$ . Questo è ovvio in quanto dalla (14.31) in questo modo si riduce  $c_2$  e quindi la perdita in uscita. Tuttavia, a parità di  $c_1$ , una riduzione di  $\alpha_1$  implica un aumento della velocità periferica  $u$  e quindi delle sollecitazioni meccaniche sulle palette (in genere il valore di  $u$  è limitato a circa 300 m/s, principalmente a causa della forza centrifuga). Una eccessiva riduzione dell'angolo  $\alpha_1$  implica anche una diminuzione di  $w_1$  e quindi, a parità di portata, un aumento di altezza delle palette (indicativamente, il rapporto altezza delle pale/diametro della ruota,  $t/D_m$ , è compreso tra 0.05 e 0.4). Nella pratica,  $\alpha_1$  è compreso tra  $14^\circ$  e  $20^\circ$ .

Inoltre, la (14.37) mostra che a parità di altri fattori, il  $\Delta h$  smaltibile cresce con il quadrato della velocità periferica. L'esempio 14-2 chiarisce quantitativamente che le turbine monostadio *non possono smaltire elevati salti entalpici* ed è quindi necessario far ricorso a turbine multistadio.

Vale la pena di ricordare che le turbine multistadio presentano anche altri vantaggi, tra cui la possibilità di recuperare l'energia cinetica allo scarico negli stadi successivi e la possibilità di costruire casse di diversa resistenza meccanica per gli stadi di alta e bassa pressione.

### **Turbine a reazione**

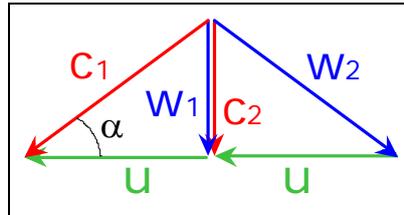
Nelle turbine a reazione si ha grado di reazione  $1 > R > 0$  e l'espansione del fluido prosegue anche nel rotore. Di conseguenza, la velocità relativa del fluido aumenta nel condotto rotorico, che non può quindi essere a sezione costante (la sezione è decrescente dato che esso costituisce un ugello subsonico); la girante è quindi asimmetrica. Inoltre, la pressione ai due lati della girante è diversa, il che (unito alle variazioni di quantità di moto del fluido che la percorre) genera una spinta assiale sulla girante stessa.

L'eolipila di Erone, che risale a circa il 100 a.c., costituisce il prototipo della turbina a reazione, ed ha un grado di reazione unitario.

Generalmente per le turbine a vapore si adotta un grado di reazione  $R = 0.5$ . In questo caso, mantenendo la  $c_2$  in direzione assiale per minimizzare le perdite allo scarico, si ha

$$\vec{w}_1 = \vec{c}_2 \quad (14.38)$$

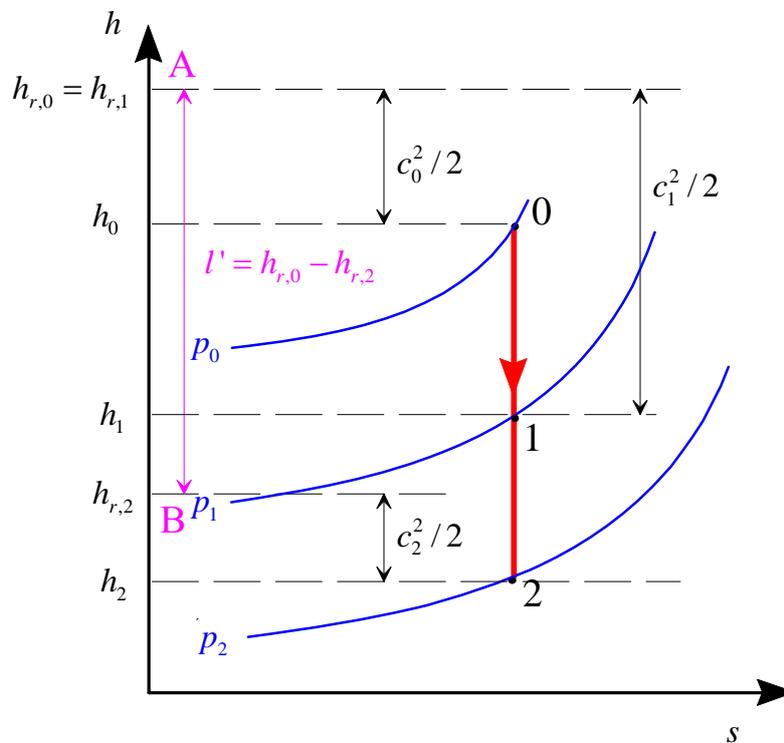
$$\vec{w}_2 = \vec{c}_1 \quad (14.39)$$



**Figura 14-13:** Triangoli di velocità per uno stadio di turbina assiale a reazione con grado di reazione  $R = 0.5$  (caso ideale).

I triangoli di velocità sono rappresentati in Fig.14-13. E' immediato verificare che il grado di reazione vale 0.5. Infatti, dalla (14.24) per  $u_1 = u_2$

$$R = \frac{(w_2^2 - w_1^2)}{(c_1^2 - c_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)} = \frac{u^2}{2u^2} = 0.5 \quad (14.40)$$



**Figura 14-14:** Diagramma entalpico per uno stadio di turbina assiale a reazione (caso ideale).

Le trasformazioni subite dal fluido in una turbina a reazione sono illustrate nel diagramma  $h-s$  di Fig.14-14. Il fluido in ingresso (sezione 0) ha entalpia statica  $h_0$  ed entalpia di ristagno  $h_{r,0} = h_0 + c_0^2/2$  (punto A). All'uscita dello statore (punto 1) il salto entalpico  $h_{r,0} - h_1$  si è trasformato in energia cinetica,  $c_1^2/2$ . Al contrario delle turbine ad azione, in questo caso anche all'interno del rotore si ha un salto entalpico  $h_1 - h_2$ : da questo consegue, come detto in precedenza che alle facce del rotore si ha anche un salto di pressione  $p_1 - p_2$ . All'uscita del rotore, abbiamo una energia cinetica  $c_2^2/2$ , che sommato ad  $h_2$  dà l'entalpia di ristagno in uscita  $h_{r,2}$ , (punto B). Il lavoro erogato per unità di massa, conformemente alla (14.10) è dato dalla differenza delle entalpie di ristagno, ovvero dall'altezza del tratto AB.

La relazione che lega la velocità periferica a quella di trascinamento in questo caso è data da (v. Fig.14-13)

$$\boxed{u = c_1 \cos \alpha_1} \quad (14.41)$$

Inoltre vale la relazione

$$\boxed{c_2 = w_1 = c_1 \sin \alpha_1} \quad (14.42)$$

il rendimento dello stadio anche in questo caso è dato da

$$\eta_r = \frac{l'}{h_{r,0} - h_2} \quad (14.43)$$

nel caso della turbina a reazione, si ha, tenendo conto della (14.12) e (14.26)

$$h_{r,0} - h_2 = h_{r,0} - h_1 + (h_1 - h_2) = \frac{c_1^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (14.44)$$

tenendo conto delle (14.44) e (14.20), e dei triangoli di velocità, si ha quindi

$$\boxed{\eta_r = \frac{c_1^2 - c_2^2 + (w_2^2 - w_1^2)}{c_1^2 + (w_2^2 - w_1^2)} = \frac{2u^2}{\frac{u^2}{\cos^2 \alpha_1} + u^2} = \frac{2 \cos^2 \alpha_1}{1 + \cos^2 \alpha_1}} \quad (14.45)$$

Dalla (14.45) si deduce che anche in questo caso il rendimento aumenta al decrescere di  $\alpha_1$ , e, a parità di  $\alpha_1$ , è maggiore di quello delle turbine ad azione.

Infine, dalla (14.12), tenendo conto della (14.21), per  $R = 0.5$  si ricava (trascurando  $c_2$ )

$$c_1 = \sqrt{2(h_{r,0} - h_1)} \quad ; \quad h_{r,0} - h_1 = h_{r,0} - h_2 - (h_1 - h_2) \approx 0.5(h_{r,0} - h_2) = 0.5\Delta h$$

$$\boxed{c_1 = \sqrt{2 \frac{\Delta h}{2}} = \sqrt{\Delta h}} \quad (14.46)$$

e quindi per la (14.41)

$$\boxed{u = \cos \alpha_1 \sqrt{\Delta h}} \quad (14.47)$$

La tabella A-1 in appendice 14-1 riassume in un sinottico le principali caratteristiche delle turbine ad azione e reazione qui illustrate.

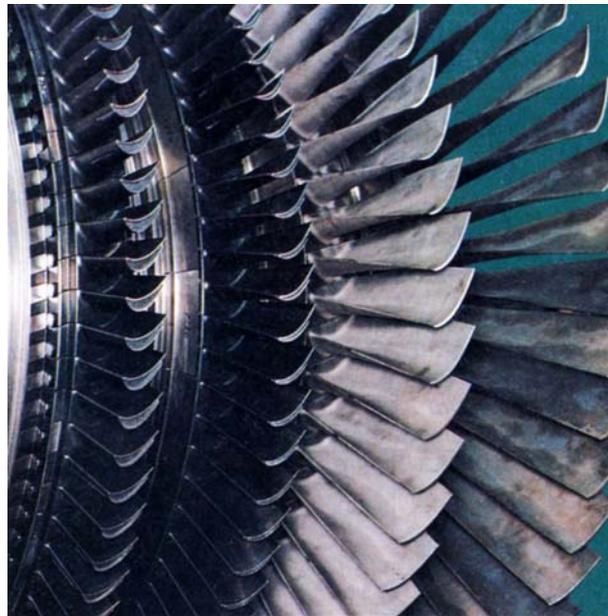
**Cenno allo svergolamento delle pale**

La velocità periferica delle pale di un rotore è data da  $u = \omega r$ , per cui non è uguale per tutte le sezioni radiali della pala ed aumenta all'allontanarsi dall'asse di rotazione. Quindi il triangolo delle velocità, fissato l'angolo  $\alpha_1$ , risulterà variare a seconda della sezione radiale presa in esame. Per le sezioni più lontane dall'asse di rotazione del rotore avremo che  $u$  è maggiore, per cui a parità di  $c_1$  il bordo di attacco della pala dovrà essere ruotato in direzione antioraria nella vista di Fig.14-13. In altre parole si deve effettuare uno *svergolamento* della pala, in maniera tale che per ogni sua sezione sia rispettata la condizione di tangenza del bordo di attacco con il vettore  $w_1$ . Lo svergolamento delle pale è evidente in Fig. 14-15. Naturalmente si può agire anche sul distributore, cambiando anche  $c_1$ .

Un tipo di svergolamento molto utilizzato è quello cosiddetto a *vortice libero*, dato dalla condizione  $r c_1 = costante$ . Si potrebbe verificare dalla (14.14) che in tali condizioni il lavoro scambiato tra fluido e pala è costante al variare della sezione considerata.

E' necessario realizzare lo svergolamento solo per le pale delle turbine in bassa pressione, dal momento che queste presentano maggiore sviluppo in altezza rispetto al diametro. Poiché le turbine di alta e media pressione hanno pale di altezza ridotta, generalmente è inutile ricorrere allo svergolamento anche per esse.

Si potrebbe anche verificare che adottando lo svergolamento a vortice libero il grado di reazione varia con l'altezza, ed assume il valore minimo alla radice della pala: per gli stadi di bassa pressione, quindi, il grado di reazione non ha un valore univoco. Si deve comunque tenere presente che in ogni sezione radiale il grado di reazione deve sempre essere maggiore o uguale a zero, altrimenti in tale sezione il rotore opererebbe da compressore.



**Figura 14-15:** Svergolamento delle palettaure in una turbina a gas multistadio (molto evidente sulla destra).

**Confronto tra le prestazioni delle turbine ad azione e reazione**

Dalle relazioni precedenti risulta che

- A parità di angolo  $\alpha_1$  la turbina a reazione ha rendimento di stadio maggiore: v. Eqq.(14.47) e (14.35).
- A parità di salto entalpico totale e di angolo  $\alpha_1$ , la turbina a reazione gira ad una velocità periferica superiore, v. Eqq. (14.37) e (14.47).
- A parità di velocità periferica e di angolo  $\alpha_1$ , in forza delle stesse equazioni del punto precedente, la turbina ad azione consente di smaltire un salto entalpico doppio di quella a reazione.

**ESEMPIO 14-2 – Salto entalpico in una turbina monostadio**

Si consideri una turbina assiale monostadio con angolo di uscita dalla distributore  $\alpha = 15^\circ$  e velocità periferica di rotazione  $u = 300$  m/s. Determinare la velocità assoluta di ingresso nel rotore,  $c_1$ , ed il salto entalpico nella turbina a) nel caso la turbina sia ad azione b) nel caso la turbina sia a reazione con grado di reazione  $R = 0.5$ .

*Caso a) – turbina ad azione*

Con i valori assegnati di  $\alpha_1$  ed  $u$ , ricaviamo il valore massimo di  $c_1$  invertendo la (14.30)

$$c_1 = \frac{2 u}{\cos \alpha_1} = \frac{600}{0.97} = 621 \text{ m/s}$$

In base alla (14.36), questo corrisponde ad un  $\Delta h$  smaltibile di

$$\Delta h = h_{r,0} - h_2 = \frac{c_1^2}{2} = 193 \text{ kJ/kg,}$$

*Caso b) – turbina a reazione*

In questo caso, ricaviamo il valore massimo di  $c_1$  invertendo la (14.41)

$$c_1 = \frac{u}{\cos \alpha_1} = \frac{300}{0.97} = 311 \text{ m/s}$$

In base alla (14.46), questo corrisponde ad un  $\Delta h$  smaltibile di

$$\Delta h = h_{r,0} - h_2 = c_1^2 = 96 \text{ kJ/kg,}$$

In entrambi i casi, il  $\Delta h$  smaltibile è molto inferiore al salto entalpico che si ha normalmente in una turbina a vapore (oltre 2000 kJ/kg). Si comprende quindi la necessità di costruire turbine multistadio (v. anche il successivo esempio 14-5). Inoltre, nella turbina a reazione si ha un  $\Delta h$  che è la metà di quello della corrispondente turbina ad azione.

□

**ESEMPIO 14-3 – Dimensionamento indicativo di uno stadio di turbina a reazione**

Si consideri una turbina assiale monostadio a reazione (grado di reazione  $R = 0.5$ ) con angolo di uscita dalla distributore  $\alpha = 20^\circ$ . Il vapore in ingresso alla ruota ha una pressione  $p_1 = 350$  kPa e temperatura  $T_1 = 250$  °C. La portata vale  $G = 210$  kg/s, la velocità angolare di rotazione  $n'' = 100$  giri/s e il diametro medio della ruota  $D_m = 1$  m. Nel caso di espansione ideale (isoentropica) determinare le velocità assolute e relative del fluido,  $c_1, w_1, c_2, w_2$ , il

salto entalpico  $\Delta h$ , la pressione in ingresso al distributore, la potenza della turbina e l'altezza media delle palette nella sezione di ingresso del rotore e le condizioni di uscita del vapore.

La velocità periferica è data da

$$u = \omega \frac{D}{2} = 2\pi n \frac{D}{2} = \pi \cdot 100 \cdot 1 = 314 \text{ m/s}$$

Possiamo ricavare ora le velocità dalle (14.41) e (14.42)

$$c_1 = w_2 = \frac{u}{\cos \alpha_1} = 334 \text{ m/s}$$

$$c_2 = w_1 = c_1 \sin \alpha_1 = 114 \text{ m/s}$$

Si ricava quindi  $\Delta h$  dalla (14.47)

$$\Delta h = \frac{u^2}{\cos \alpha_1} = 104 \text{ kJ/kg}$$

L'entalpia in uscita vale quindi, per il bilancio di energia nel rotore nel sistema di riferimento del rotore, eq.(14.26), tenuto conto dei triangoli di velocità di Fig. 14-13

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \rightarrow h_2 = h_1 + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} = h_1 - \frac{u^2}{2} = 2966000 - \frac{314^2}{2} = 2917 \text{ kJ/kg}$$

Le condizioni del vapore in ingresso ed uscita ruota possono ora essere ricavate dalle tabelle termodinamiche, tenuto conto che la trasformazione è ritenuta ideale e quindi isoentropica.

punto	$T, ^\circ\text{C}$	$p, \text{bar}$	$h, \text{kJ/kg}$	$s, \text{kJ/kg K}$	$\rho, \text{kg/m}^3$
0	279	4.5	3021	7.43	1.78
1	250	3.5	2966	7.43	1.47
2	225	2.84	2917	7.43	1.25

Per determinare la pressione in ingresso al distributore è necessario preventivamente determinare l'entalpia in ingresso,  $h_0$ . Dalla definizione di grado di reazione si ha

$$R = \frac{h_1 - h_2}{h_{r,0} - h_{r,2}} = 0.5 \rightarrow h_{r,0} - h_{r,2} = 2(h_1 - h_2)$$

e, trascurando il valore di  $c_0$

$$h_0 \approx h_{r,0} = h_{r,2} + 2(h_1 - h_2) = h_2 + \frac{c_2^2}{2} + 2(h_1 - h_2) = 2h_1 - h_2 + \frac{c_2^2}{2} = 3021 \text{ kJ/kg}$$

Da cui nota anche l'entropia, si ricava  $p_0 = \text{bar}$  dalle tabelle termodinamiche.

Il lavoro erogato dalla turbina per unità di massa può essere ricavato direttamente dalla equazione di Eulero, (14.20), sfruttando i triangoli di velocità di Fig. 14-13

$$l' = \frac{W'_m}{G} = \frac{(c_1^2 - c_2^2) + (w_2^2 - w_1^2)}{2} = u^2 = 98.6 \text{ kJ/kg}$$

Si osservi, come notato in precedenza, che il lavoro erogato  $l' = h_{r,0} - h_{r,2}$  è minore del  $\Delta h = h_{r,0} - h_2$  per il contributo (non trascurabile) dell'energia cinetica allo scarico. Si ricava quindi la potenza erogata

$$W'_m = G l' = 210 \cdot 98.6 = 20.7 \text{ MW}$$

L'altezza delle palette in ingresso al rotore,  $t$ , si ricava dalla espressione della portata,  $G = \rho c_x A$ , dove bisogna considerare la velocità del vapore in direzione normale alla sezione  $A$  considerata, vale a dire quella assiale. In questo caso, essa corrisponde a  $c_2$ . Si ha quindi

$$A = \frac{G}{\rho_1 c_2} = \frac{210}{1.47 \cdot 114} = 1.26 \text{ m}^2$$

L'area di una corona circolare, per  $t \ll D_m$  (condizione da verificare a posteriori) si può approssimare con  $A = \xi \pi D_m t$ , dove il coefficiente  $\xi$  tiene conto dello spessore delle palette, che riduce la sezione di passaggio utile. Si può assumere  $\xi = 0.96$ , pertanto l'altezza delle palette vale

$$t = \frac{A}{\xi \pi D_m} = 0.41 \text{ m} = 410 \text{ mm}$$

Si osserva che in questo caso la condizione  $t \ll D_m$  non è propriamente verificata, per cui questa valutazione deve essere ritenuta solo una prima approssimazione. Nella turbina a reazione la densità all'uscita del rotore decresce ulteriormente a causa dell'espansione nel rotore stesso, quindi la sezione di passaggio dovrebbe aumentare procedendo in senso assiale.

□

#### **ESEMPIO 14-4 – Dimensionamento indicativo di uno stadio di turbina ad azione**

Si consideri una turbina assiale monostadio ad azione con angolo di uscita dal distributore  $\alpha = 18^\circ$ . Il vapore in ingresso alla turbina ha una pressione  $p_0 = 17 \text{ MPa}$  e temperatura  $T_0 = 450 \text{ }^\circ\text{C}$  e si espande fino a  $p_2 = 10 \text{ MPa}$ . La portata vale  $G = 150 \text{ kg/s}$ , la velocità angolare di rotazione  $n = 3000 \text{ rpm}$  e la velocità del vapore all'ingresso distributore,  $c_0$ , è trascurabile. Nel caso di espansione ideale (isoentropica) determinare il diametro medio della ruota,  $D_m$ , le velocità assolute e relative del fluido,  $c_1, w_1, c_2, w_2$ , la potenza della turbina e l'altezza media delle palette nella sezione di ingresso del rotore.

Le condizioni del vapore in ingresso ed in uscita dal distributore si ricavano dalle tabelle termodinamiche, tenuto conto che essendo la turbina ad azione si ha  $p_2 = p_1$  e  $h_2 = h_1$

punto	$T, \text{ }^\circ\text{C}$	$p, \text{ bar}$	$h, \text{ kJ/kg}$	$s, \text{ kJ/kg K}$	$\rho, \text{ kg/m}^3$
0	450	170	3119	6.042	63.5
1, 2i	366	100	2985	6.042	41.9

si ha quindi, essendo  $c_0$  trascurabile

$$\Delta h = h_{r,0} - h_2 = h_0 - h_2 = 134 \text{ kJ/kg},$$

Si ricava quindi  $u$  dalla (14.37)

$$u = \cos \alpha_1 \sqrt{\frac{\Delta h}{2}} = 0.95 \sqrt{\frac{134000}{2}} = 246 \text{ m/s}$$

ed il diametro medio della ruota vale

$$D = 2 \frac{u}{\omega} = \frac{u}{\pi n / 60} = 1.56 \text{ m}$$

Con i valori assegnati di  $\alpha_1$  ed  $u$ , ricaviamo le altre velocità dalle (14.30), (14.31), (14.32)

$$c_1 = \frac{2u}{\cos \alpha_1} = 517 \text{ m/s}$$

$$c_2 = c_1 \sin \alpha_1 = 160 \text{ m/s}$$

$$w_1 = w_2 = \frac{c_1}{2} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha_1} = 293 \text{ m/s}$$

il lavoro erogato dalla turbina per unità di massa può essere ricavato direttamente dalla equazione di Eulero, (14.20), sfruttando i triangoli di velocità di Fig. 14-12

$$l' = \frac{W'_m}{G} = \frac{(c_1^2 - c_2^2)}{2} = 2u^2 = 121 \text{ kJ/kg}$$

si ricava quindi la potenza erogata

$$W'_m = G l' = 121 \cdot 150 = 18 \text{ MW}$$

L'altezza delle palette in ingresso,  $t$ , si ricava dalla espressione della portata,  $G = \rho c_x A$ , dove bisogna considerare la velocità del vapore in direzione normale alla sezione  $A$  considerata, vale a dire quella assiale. Anche in questo caso, essa corrisponde a  $c_2$ . Si ha quindi

$$A = \frac{G}{\rho_1 c_2} = \frac{150}{41 \cdot 160} = 0.023 \text{ m}^2$$

Come visto nell'esempio precedente, l'area di una corona circolare, per  $t \ll D_m$  (condizione verificabile a posteriori) si può approssimare con  $A = \xi \pi D_m t$ , dove il coefficiente  $\xi$  tiene conto dello spessore delle palette, che riduce la sezione di passaggio utile. Si può assumere  $\xi = 0.96$ , pertanto l'altezza delle palette vale

$$t = \frac{A}{\xi \pi D_m} = 0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm}$$

Nel caso ideale considerato, non essendovi espansione nel rotore, la sezione della palettatura si mantiene costante. Tuttavia l'altezza delle palette è troppo piccola rispetto al diametro (abbiamo visto in precedenza che indicativamente il valore minimo di  $t/D_m$  è 0.05, qui invece abbiamo 0.0032): è quindi necessario *parzializzare* l'ammissione in turbina, ovvero consentire l'ingresso del vapore solo attraverso un settore dell'intera corona circolare, come verrà chiarito nel successivo paragrafo 14.7).  $\square$

## 14.6 Turbine multistadio.

### **Massimo salto entalpico smaltibile in uno stadio**

Il coefficiente adimensionale  $\Delta h / (u^2/2)$  indica la caduta di entalpia che può essere trattata da uno stadio. Si ha indicativamente

per stadi ad azione ( $R=0$ )	$\Delta h / (u^2/2) = 4.5 - 5.5$
per stadi a reazione con ( $0 < R < 0.5$ )	$\Delta h / (u^2/2) = 2.6 - 4.5$
per stadi a reazione con ( $R = 0.5$ )	$\Delta h / (u^2/2) = 2.2 - 2.6$

La tabella precedente permette di selezionare il tipo di turbina più adatto in base al valore di  $\Delta h$  e della velocità periferica, o di determinare il numero approssimativo di stadi richiesti come risulta dall'esempio seguente.

### **Turbine multistadio a salti di pressione**

Nei paragrafi precedenti, si è visto che la caduta di entalpia disponibile per un fluido in una turbina (che generalmente supera i 1000 kJ/kg) non può essere realizzata in un singolo stadio dato che si otterrebbero valori inaccettabili della velocità periferica delle pale. Un metodo intuitivo per frazionare il salto entalpico del fluido consiste nel suddividerlo tra più sistemi distributore-girante disposti in serie: si ottiene così una turbina multistadio; dato che il salto entalpico si suddivide tra le varie turbine, il vapore subirà successive espansioni (e quindi successive diminuzioni di pressione) nei vari stadi, per cui questo sistema prende il nome di *turbina multistadio a salti di pressione*.

Questa metodologia è applicabile indifferentemente a turbine ad azione o reazione: la corrispondente turbina prende il nome di *turbina Rateau* (sebbene alcuni limitino questa denominazione alla turbina multistadio a salti di pressione *ad azione*). Generalmente, tutte le ruote sono calettate sullo stesso albero: dato che la pressione diminuisce da uno stadio all'altro, è necessario realizzare sull'albero stesso *tenute rotanti* per evitare fughe di vapore. Nel caso di stadi a reazione, tali tenute dovrebbero essere realizzate anche tra l'esterno delle ruote e la cassa, per evitare che il fluido trafile attraverso tali spazi senza compiere lavoro; nel caso di turbine ad azione invece, non essendovi salto di pressione attraverso la ruota, queste ultime tenute non sono necessarie.

Un ulteriore vantaggio delle turbine multistadio consiste nel fatto che l'energia cinetica allo scarico di uno stadio viene recuperata nello stadio successivo: la perdita è quindi limitata all'energia cinetica in uscita dall'ultimo stadio, che è notevolmente inferiore rispetto a quella che si avrebbe in una ipotetica turbina monostadio.

### **ESEMPIO 14-5 – Stima del numero di stadi di una turbina**

La turbina a vapore di media-bassa pressione studiata nell'esempio 5-2 opera nelle seguenti condizioni

- ingresso:  $p_0 = 60$  bar,  $T_0 = 600$  °C;
- uscita:  $p_2 = 0.1$  bar,  $x_2 = 0.9$ .

Stimare approssimativamente il numero di stadi in cui deve essere suddivisa, ipotizzando di adottare stadi a reazione con grado di reazione  $R = 0.5$  e di assumendo una velocità periferica di 250 m/s.

Le condizioni del vapore in ingresso e in uscita sono riportate nella tabella seguente

punto	T, °C	p, bar	h, kJ/kg	s, kJ/kg K	x
0	600	60	3658	7.1676	=
2	45.8	0.1	2345	7.40	0.9

Da cui, trascurando l'energia cinetica in ingresso, risulta un salto entalpico totale  $\Delta h_{tot}$  di 1313 kJ/kg. Per il salto entalpico smaltibile in uno stadio a reazione,  $\Delta h_{st}$ , assumiamo in media

$$\frac{\Delta h_{st}}{u^2/2} = 2.4 \quad \rightarrow \quad \Delta h_{st} = 2.4 \frac{u^2}{2} = 75 \text{ kJ/kg}$$

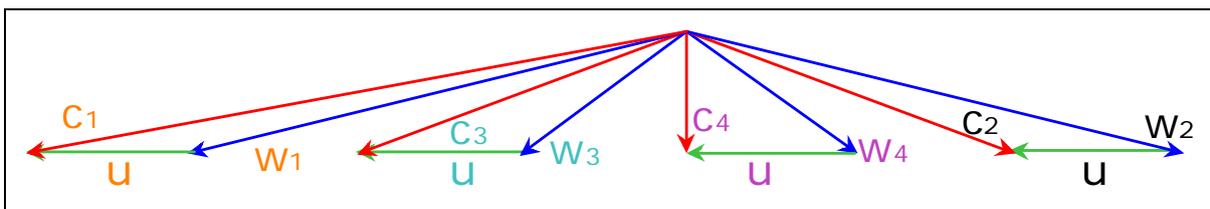
Per cui il numero di stadi è dato da

$$N = \frac{\Delta h_{tot}}{\Delta h_{st}} = 17.5, \text{ che viene arrotondato a } 18$$

□

#### **Turbine multistadio a salti di velocità**

Le turbine ad azione offrono un'ulteriore possibilità di ridurre la velocità periferica in presenza di un elevato salto entalpico, senza frazionarne l'espansione. Il vapore si espande completamente nel primo distributore, utilizzando tutto il salto entalpico disponibile ed uscendone quindi a velocità notevolmente elevata. L'energia cinetica del vapore viene quindi utilizzata in più ruote ad azione successive, inframmezzate da palettature fisse dette *raddrizzatori* che hanno il solo scopo di raccogliere il vapore allo scarico della ruota precedente e reindirizzarlo, con direzione opportuna, alla ruota successiva. I triangoli di velocità sono riportati in Fig. 14-16. E' evidente che in questo caso si hanno elevate velocità di attraversamento nei primi stadi, con conseguente aumento delle perdite, per cui il numero di stadi che è possibile mettere in serie è limitato.



**Figura 14-16:** Triangoli di velocità per una turbina ad azione a due stadi a salti di velocità.

Questo sistema prende il nome di *turbina multistadio a salti di velocità* (o *turbina Curtis*) ed è ovviamente applicabile solo alle turbine ad azione. Il nome deriva dal fatto che, come risulta dalla Fig. 14-16, la velocità decresce progressivamente via via che si attraversano successivi stadi. Come si è detto, la turbina a salti di velocità è caratterizzata da un basso rendimento ed il suo vantaggio principale consiste nel poter trattare elevati salti entalpici con modesti valori della velocità periferica, ridotto ingombro in senso assiale della macchina e una costruzione relativamente semplice (non essendovi cadute di pressione tra gli stadi, non sono necessarie tenute rotanti né sull'albero né sulle ruote all'interno della cassa).

Secondo alcuni testi, la turbina Curtis, essendo caratterizzata da una sola espansione, è una turbina *multiruota*, ma non propriamente una turbina *multistadio*.

### ***Disposizioni multistadio nelle turbine a gas e a vapore per generazione termoelettrica***

Nelle turbine a vapore, per centrali termoelettriche si ha un salto entalpico che supera i 2000 kJ/kg; generalmente, la turbina consiste di uno o due stadi ad azione (a salti di velocità) seguiti da numerosi (20 o più) stadi a reazione. Questa disposizione consente di eseguire la regolazione per parzializzazione sulla turbina ad azione (vedi paragrafo successivo) ed inoltre di smaltire un salto entalpico relativamente elevato (e quindi ridurre temperatura e pressione del vapore) nei primi stadi riducendo le sollecitazioni sulla macchina. Successivamente si adottano stadi a reazione con  $R = 0.5$  che trattano cadute entalpiche accettabili con un rendimento alto. Lo svantaggio degli stadi a reazione consiste nel fatto che smaltiscono un salto entalpico minore e quindi le dimensioni della turbina, soprattutto la lunghezza, aumentano.

A causa della pressione notevolmente diversa tra ingresso ed uscita, le varie ruote sono contenute in più casse diverse (cassa, o corpo, di alta, media e bassa pressione) le cui caratteristiche costruttive variano a seconda della sollecitazione. Generalmente tutte le ruote sono calettate su di un unico asse (disposizione *tandem compound*, v. Fig. 14-5). Ad una estremità dell'asse viene calettato l'alternatore. Quando le dimensioni assiali diventano eccessive, i vari corpi vengono disposti su due assi paralleli (*cross compound*): in questo caso sono richiesti due alternatori, uno per asse.

Le turbine a gas sono costituite da pochi stadi (tre-quattro) a reazione. Talvolta la costruzione è *bialbero*, il che permette alle prime ruote fornire semplicemente la potenza necessaria al compressore (senza erogare lavoro utile) girando a velocità costante: l'insieme del compressore, delle ruote che lo alimentano e della camera di combustione viene detto *generatore di gas*. Le ultime ruote (dette *ruote di potenza*) erogano la potenza meccanica all'esterno e possono ruotare ad una velocità diversa dalle prime, ed anche, se necessario, variabile nel tempo (v. Fig. 14-7). Nelle costruzioni più sofisticate, gli ugelli del distributore della ruota di potenza sono *orientabili* in modo da poter adattare i triangoli di velocità alla condizione di funzionamento. Se prevale il criterio di ridurre il numero degli stadi, come nelle turbine aeronautiche, si adottano stadi a reazione con  $R < 0.5$ .

### ***Cenni alle perdite nelle turbomacchine***

Fino a questo punto, abbiamo considerato ideali le trasformazioni del fluido. Nel seguito, vengono riassunte sinteticamente le principali perdite che si verificano in uno stadio di una turbomacchina.

***Energia cinetica allo scarico:*** come già accennato, queste perdite consistono nell'energia cinetica posseduta dal fluido allo scarico,  $c_2^2 / 2$ . Tale energia può essere riutilizzata solo se vi è un ulteriore stadio di espansione a valle, altrimenti viene perduta.

***Attrito nei condotti fissi e mobili:*** sono le perdite distribuite nei condotti, dove il vapore fluisce ad alta velocità. Essendo il moto turbolento, come esposto nel Cap.6 queste perdite sono approssimativamente proporzionali al quadrato della velocità di attraversamento. Di tali perdite si tiene conto introducendo due coefficienti di riduzione delle velocità ideali  $\phi$  e  $\psi$ , rispettivamente nello statore e nel rotore

$$\varphi = \frac{\text{vel. reale di efflusso dal cond. fisso}}{\text{vel. ideale (isoentropica) di efflusso dal cond. fisso}} = \frac{c_1}{c_{1,id}} \leq 1 \quad (14.48)$$

$$\psi = \frac{\text{vel. relat. reale di efflusso dal cond. mobile}}{\text{vel. relat. ideale (isoentropica) di efflusso dal cond. mobile}} = \frac{w_2}{w_{2,id}} \leq 1 \quad (14.49)$$

indicativamente si ha  $\varphi = 0.9-0.95$  e  $\psi = 0.8-0.95$ .

**Urti:** sono le perdite dovute alla resistenza incontrata dal fluido nel passaggio dai condotti fissi a quelli mobili e viceversa, dovute principalmente allo spessore finito delle palette. Tali perdite vengono conglobate nei coefficienti menzionati al punto precedente, ed insieme alle perdite per attrito fanno sì che l'espansione del fluido non sia isoentropica.

**Ventilazione dei dischi e delle pale:** il disco su cui sono fissate le pale, in moto relativo rispetto al vapore che riempie la cassa della turbina, incontra una resistenza per attrito che determina un momento resistente all'asse, e quindi la riduzione del lavoro raccolto. Nel caso poi di turbine parzializzate (v. paragrafo 14.7) anche le palette oziose incontrano tale resistenza.

**Fughe:** parte del fluido di lavoro sfugge all'esterno attraverso le tenute esterne oppure passa da uno stadio all'altro attraverso le tenute sull'albero o sull'esterno del disco, senza compiere quindi lavoro utile. Adottando tenute appropriate, queste perdite possono essere ridotte al minimo e trascurate.

## 14.7 Regolazione delle turbine

In molti casi c'è la necessità di regolare una turbina a vapore per uguagliare, istante per istante, il valore della potenza erogata alla richiesta di carico dell'utenza. Faremo riferimento unicamente a impianti collegati ad alternatori, per cui, per mantenere invariata la frequenza di rete, la velocità angolare è costante: è quindi necessario variare la coppia motrice in modo tale che si abbia uguaglianza tra potenza erogata e potenza richiesta.

Come è noto, la potenza meccanica erogata dalla turbina può essere espressa come

$$W_{el} = G \Delta h_{id} \eta_{is} \eta_{me} \quad (14.50)$$

dove  $G$  è la portata massica di fluido in turbina,  $\Delta h_{id}$  il salto entalpico ideale (isoentropico) ai suoi capi,  $\eta_{is}$  il rendimento isoentropico e  $\eta_{me}$  il rendimento meccanico/elettrico. La potenza in principio può essere regolata agendo su uno qualsiasi dei termini della relazione precedente. Il termine principale su cui si agisce per variare la potenza è la portata massica che può essere scritta come

$$G = \rho c_x A = \rho c_x \pi D_m t = \rho c_x \pi D_m^2 \left( \frac{t}{D_m} \right) \quad (14.51)$$

Dove  $c_x$  è la componente assiale della velocità di attraversamento del fluido,  $\rho$  la sua densità,  $D_m$  il diametro medio della palettatura e  $t$  l'altezza delle palette. Motivi costruttivi impongono che il rapporto  $t/D_m$  sia compreso tra 0.05 e 0.4. I metodi di regolazione che in genere vengono usati sono due: *il metodo della parzializzazione* e *il metodo della laminazione*. Di solito i due metodi vengono applicati insieme.

**Regolazione per parzializzazione**

La tecnica di *parzializzazione* consiste nel dividere la sezione di ingresso del vapore in turbina in più camere (in genere 7 o 8) ciascuna controllata da una valvola di intercettazione: il vapore ha accesso ad una singola camera solo se la valvola corrispondente risulta aperta. Quindi chiudendo un certo numero di valvole si regola la portata di vapore in ingresso alla turbina, che risulterà uguale a:

$$G = \rho c_x \pi D_m^2 \left( \frac{t}{D_m} \right) (1 - p) \quad (14.52)$$

Dove  $p$  è detto grado di parzializzazione ( $p = 0$  implica nessuna parzializzazione). Mediante la parzializzazione non si ottiene una regolazione continua, ma discreta. Inoltre, per evitare che il vapore uscente dalla sezione parzializzata tenda a percorrere anche le sezioni di palettatura inattive, occorre che la pressione a monte e a valle della ruota sia costante: quindi *la parzializzazione è possibile solo nelle turbine ad azione*.

La (14.52) e l'esempio 14-5 mostrano che in alcuni casi, si può ricorrere alla parzializzazione anche a pieno regime, per evitare di avere una turbina con un rapporto tra altezza delle pale e diametro troppo basso.

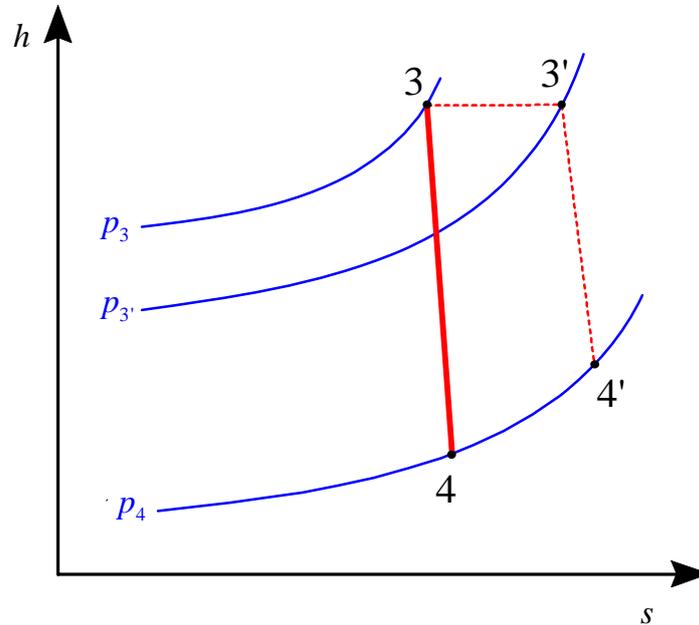
La diminuzione di portata massica conseguente alla parzializzazione implica una diminuzione delle velocità  $c_1$  nelle ruote successive alla prima e, dal momento che la velocità periferica  $u$  rimane costante, si ha una variazione del rapporto  $u/c_1$ . Di conseguenza il rendimento della turbina diminuisce.

**Regolazione per laminazione**

Questo metodo consiste nel porre una valvola di regolazione sulla tubazione di ammissione del vapore alla turbina, in modo da variare con continuità la portata massica di fluido in ingresso in turbina. Il vapore proveniente dalla caldaia nell'attraversamento della valvola subisce una laminazione, ovvero una trasformazione isoentalpica che riduce in modo più o meno marcato, a seconda che la valvola sia più o meno chiusa, la pressione del vapore entrante in turbina. Come si vede dal diagramma  $h-s$  di Fig. 14-17. nella valvola si realizza la trasformazione  $3-3'$ : in turbina non avviene più la trasformazione  $3-4$ , bensì la trasformazione  $3'-4'$ , cui corrisponde un salto entalpico minore della precedente. Quindi il ricorso alla laminazione implica anche una riduzione del salto entalpico disponibile ai capi della turbina, e una dissipazione maggiore in irreversibilità: in fin dei conti è come se nella turbina avvenisse la trasformazione  $3-4'$ , con diminuzione del rendimento isoentropico. Inoltre, a causa della riduzione di portata, si riduce la velocità di efflusso  $c_1$  del vapore dai singoli distributori, quindi il rapporto  $u/c_1$  delle velocità in ciascuno stadio assumerà valori diversi da quelli di progetto. Un confronto tra i due metodi di regolazione mostra che la parzializzazione è sicuramente migliore, non introducendo irreversibilità nel sistema, ma che essa deve sempre essere accompagnata da laminazione per poter ottenere una regolazione con continuità. Da quanto visto, si deduce inoltre che è conveniente ridurre al minimo la regolazione della turbina, perché oltre a diminuirne la potenza se ne diminuisce comunque anche il rendimento, alterando la forma dei triangoli di velocità.

Quindi, supponendo di avere 10 camere di parzializzazione in ingresso, se vogliamo diminuire la portata di vapore in ingresso del 22% dovremo chiudere due valvole di parzializzazione e chiudere di poco la valvola di laminazione in modo da ottenere la portata

massica voluta. Con questa soluzione limitiamo al massimo la regolazione mediante laminazione e quindi il rendimento della turbina diminuirà meno di quanto non farebbe ricorrendo integralmente alla laminazione.



**Figura 14-17:** Trasformazione termodinamica del vapore in una turbina regolata per laminazione.

### Bibliografia

- R. Della Volpe, *Macchine*, Liguori, Cap.4.
- E. Funaioli, *Meccanica Applicata alle Macchine*, Patron, Capp. I-6 e II-5.
- B.R. Munson, D.F. Young e T.H. Okihishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4<sup>th</sup> ed., Wiley, 2002, Cap.12 (presente solo nella versione su CD).
- G. Cornetti, *Macchine a Fluido*, Il Capitello, capp. 21-22-23.

### APPENDICE 14.1: Principali caratteristiche delle turbine assiali ad azione e reazione

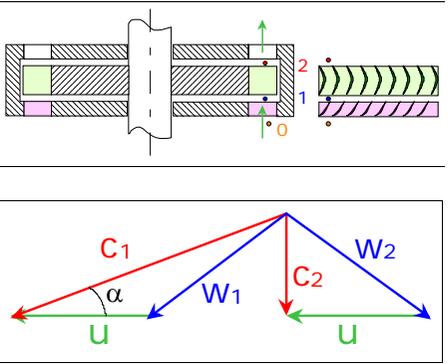
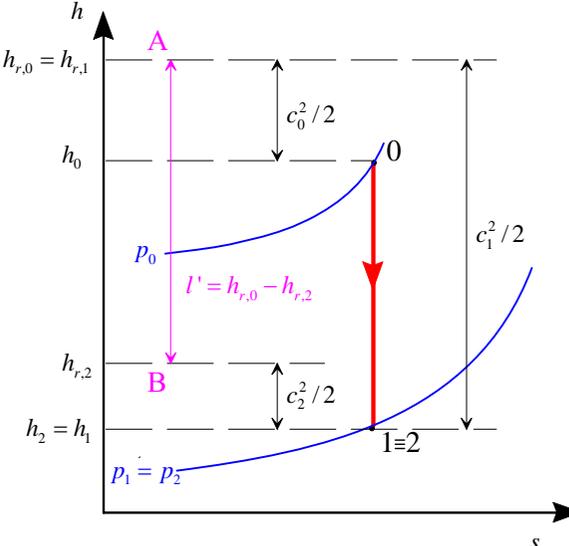
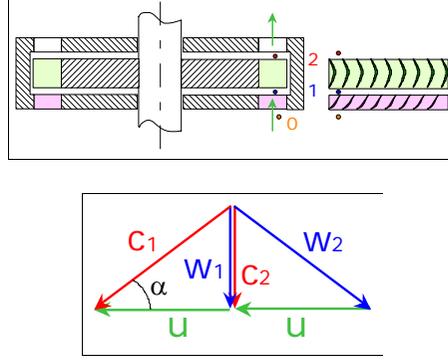
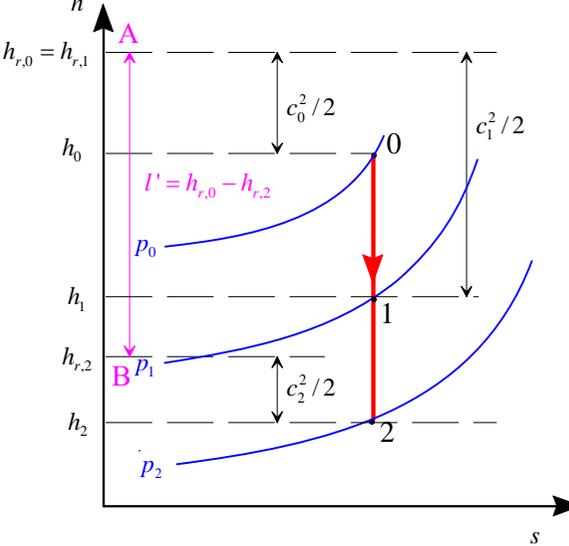
Tipo Turbina	Triangoli di velocità	Legami tra velocità	Rendimento e salto entalpico	Diagramma entalpico
Azione		$u = c_1 \frac{\cos \alpha_1}{2}$ $c_2 = c_1 \sin \alpha_1$ $w_1 = w_2 = \frac{c_1}{2} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha_1}$	$\eta_t = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2} = \cos^2 \alpha_1$ $u = \cos \alpha_1 \sqrt{\frac{\Delta h}{2}}$	
Reazione (grado reazione 0.5)		$u = c_1 \cos \alpha_1$ $w_2 = c_1$ $c_2 = w_1 = c_1 \sin \alpha_1$	$\eta_t = \frac{2 \cos^2 \alpha_1}{1 + \cos^2 \alpha_1}$ $u = \cos \alpha_1 \sqrt{\Delta h}$	

Tabella A-1 Riepilogo delle relazioni utili per turbine assiali ad azione e reazione.

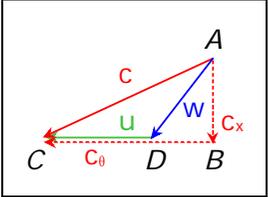
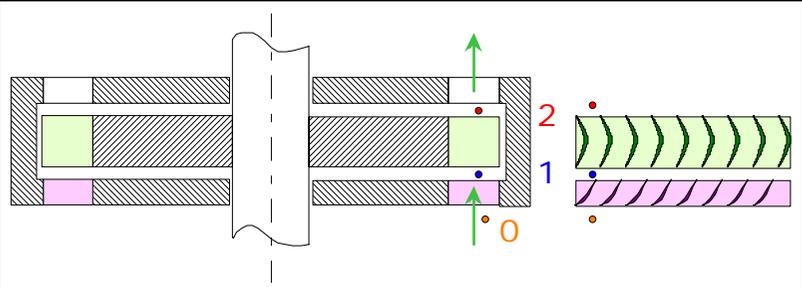
BILANCIO DI MOMENTO DI QUANTITÀ DI MOTO	BILANCIO DI ENERGIA	GRADO DI REAZIONE
<p>Equazioni di Eulero</p> $M_e = G(r_u c_{\theta,u} - r_i c_{\theta,i})$ $l' = \frac{W'_m}{G} = (u_i c_{\theta,i} - u_u c_{\theta,u}) =$ $= \frac{(c_1^2 - c_2^2) + (u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}{2} = h_{r,0} - h_{r,2}$	<p>Intero sistema</p> $W'_m = G \left[ \left( h_0 + \frac{c_0^2}{2} \right) - \left( h_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) \right] = G(h_{r,0} - h_{r,2})$ <p>Statore (distributore)</p> $h_0 + \frac{c_0^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2}, \text{ ovvero } h_{r,0} = h_{r,1}$	$R = \frac{h_1 - h_2}{h_{r,0} - h_{r,2}}$ $R = \frac{(u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}{(c_1^2 - c_2^2) + (u_1^2 - u_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)}$ <p><math>R = 0</math> turbina ad azione  <math>0 &lt; R \leq 1</math> turbina a reazione</p>
<p><math>\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}</math> composizione dei moti</p> <p><math>h_r = h + \frac{c^2}{2}</math> entalpia di ristagno</p> <p><math>\Delta h = h_{r,0} - h_2</math> massimo salto entalpico</p>  	<p>Rotore (girante)</p> <p>Nel riferimento assoluto</p> $W'_m = G \left[ \left( h_1 + \frac{c_1^2}{2} \right) - \left( h_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) \right] = G(h_{r,1} - h_{r,2})$ <p>Nel riferimento relativo (solo per macchine assiali)</p> $h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}$	

Tabella A-2 Riepilogo dei bilanci di momento di quantità di moto ed energia per le macchine dinamiche.

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Appendici 1-5

*Paolo Di Marco*

Versione 2006.00 – 10.10.05.

1. Equazioni di stato per i gas ideali e per i liquidi incomprimibili
2. Trasformazioni reversibili per i gas ideali con calori specifici costanti
3. Proprietà termodinamiche dei fluidi.
4. Unità di misura del Sistema Internazionale e fattori di conversione
5. Metodologia per la soluzione di problemi in termodinamica

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

**APPENDICE 1 - Equazioni di stato per i gas ideali, fluidi reali, e i liquidi incomprimibili**

**TABELLA RIASSUNTIVA**

<b>Gas ideale</b>	<b>Fluido reale monofase</b>	<b>Liquido incomprimibile</b>
$pV = n_M \mathfrak{R}T$ $pV = MRT$ $pv = RT$	$T = f(p, v)$ $\frac{dv}{v} = \beta dT - \kappa dp$	$v = cost.$
$R = c_p - c_v$ , $k = \frac{c_p}{c_v}$ $c_p = \frac{Rk}{k-1} = f(T)$ $c_v = \frac{R}{k-1} = f(T)$	$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ $\kappa = - \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$ $c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$	$c_p = c_v = c$
$du = c_v(T) dT$	$du = c_v(v, T) dT + B_u(T, v) dv$	$du = c(T) dT$
$dh = c_p(T) dT$	$dh = c_p(p, T) dT + B_h(T, p) dp$	$dh = c(T) dT + v dp$
$ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$ $ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$	$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{B_u + p}{T} dv$ $ds = \frac{c_p}{T} dT + \frac{B_h - v}{T} dp$	$ds = c(T) \frac{dT}{T}$
$\beta = \frac{1}{T}$ $\kappa = \frac{1}{p}$ $B_u = B_h = 0$	$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_p - \frac{T \beta^2 v}{\kappa}$ $B_u = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \frac{\beta T}{\kappa} - p$ $B_h = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = (1 - \beta T) v$	$\beta = \kappa = 0$ $B_u = 0$ $B_h = v$

Un fluido reale è completamente caratterizzato una volta noti i coefficienti  $c_p$ ,  $\beta$  e  $\kappa$ .  
 Un gas ideale è caratterizzato una volta noti due coefficienti a scelta tra  $c_p$ ,  $c_v$ ,  $k$  o  $R$ .  
 Un liquido incomprimibile è completamente caratterizzato dai valori di  $c$  e  $v$ .

**NOTA**

Le relazioni di Gibbs

$$du = T ds - p dv \quad , \quad dh = T ds + v dp$$

sono valide per qualunque fluido, purchè la trasformazione avvenga tra due stati di equilibrio.

**APPENDICE 2 - Trasformazioni reversibili per i gas ideali con calori specifici costanti: lavoro e calore scambiati**

(N.B.: le variazioni dei termini di energia cinetica e potenziale vengono considerate trascurabili)

**LAVORO DI DILATAZIONE REVERSIBILE (gas ideale)**

$$l_{12} = \int_1^2 p \, dv \quad , \quad r_v = v_2 / v_1, \quad r_p = p_2 / p_1$$

Trasformazione	$v_2$	$T_2$	$p_2$	$l_{12}$	$q_{12}$
ISOTERMA $T = cost$	$\frac{v_1}{r_p}$	$T_1$	$\frac{p_1}{r_v}$	$-RT \ln r_p =$ $= RT \ln r_v$	$q_{12} = l_{12}$
POLITROPICA $pv^n = cost$	$v_1 \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{n-1}}$	$T_1 r_v^{1-n}$	$p_1 r_v^{-n}$	$\frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{n-1} =$ $= \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2) =$ $= \frac{RT_1}{n-1} (1 - r_v^{1-n})$	$\left( c_v - \frac{R}{n-1} \right) (T_2 - T_1)$
ISOCORA $v = cost$	$v_1$	$T_1 r_p$	$p_1 \frac{T_2}{T_1}$	0	$c_v (T_2 - T_1)$

**LAVORO DI COMPRESSIONE/ESPANSIONE REVERSIBILE IN SISTEMI APERTI A REGIME (gas ideale)**

$$l'_{12} = - \int_1^2 v \, dp \quad , \quad r_v = v_2 / v_1, \quad r_p = p_2 / p_1$$

$$a = \frac{n-1}{n}$$

$$a = \frac{k-1}{k} = \frac{R}{c_p} \quad \text{per trasformazione adiabatica}$$

Trasformazione	$v_2$	$T_2$	$p_2$	$l'_{12}$	$q_{12}$
ISOTERMA $T = cost$	$\frac{v_1}{r_p}$	$T_1$	$\frac{p_1}{r_v}$	$-RT \ln r_p =$ $= RT \ln r_v$	$q_{12} = l_{12}$
POLITROPICA $pv^n = cost$	$v_1 r_p^{-\frac{1}{n}}$	$T_1 r_p^a$	$p_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{a}}$	$\frac{n}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) =$ $= \frac{Rn}{n-1} (T_1 - T_2) =$ $= - \frac{Rn}{n-1} T_1 (r_p^a - 1)$	$\left( c_p - \frac{Rn}{n-1} \right) (T_2 - T_1)$
ISOCORA $v = cost$	$v_1$	$T_1 r_p$	$p_1 \frac{T_2}{T_1}$	$v_1 (p_2 - p_1) =$ $= R (T_1 - T_2)$	$c_v (T_2 - T_1)$

**APPENDICE 3 – Proprietà termodinamiche dei fluidi.**

Le tabelle che seguono contengono le proprietà di alcuni fluidi, e precisamente: acqua, ammoniaca (R717), R134a e isobutano (R600a).

Le tabelle sono così organizzate: dapprima le proprietà del liquido e del vapore *in condizioni di saturazione* sono riportate in due tabelle, rispettivamente in funzione della temperatura e della pressione. Seguono poi le tabelle del fluido a pressione costante *al di fuori delle condizioni di saturazione*: le proprietà ( $v$ ,  $u$ ,  $h$  ed  $s$ ) sono espresse in funzione della temperatura, per il valore della pressione riportato in testa alla tabella. Ovviamente, il fluido si trova allo stato liquido per temperature inferiori a quella di saturazione ed allo stato di vapore surriscaldato o gas per temperature superiori a quest'ultima: la transizione risulta evidente da una brusca discontinuità nel valore delle proprietà stesse.

E' importante ricordare che *tutte le proprietà di stato sono definite a meno di una costante arbitraria*: non bisogna pertanto stupirsi se alcuni diagrammi o programmi di calcolo (es. CATT) forniscono valori diversi per alcuni dei fluidi considerati: le variazioni delle proprietà tra due stati rimangono però quasi identiche in tutti i casi. Inoltre i valori delle proprietà possono anche variare leggermente da un manuale ad un altro a seconda dei diversi modelli adottati.

**Acqua**  
**Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della temperatura**

Temp.	Press.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
T [C]	p [MPa]	$v_f$ [m³/kg]	$v_g$ [m³/kg]	$u_f$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_f$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
0	0.001	1.000E-03	206.676	-0.04	2375.32	-0.04	2501.34	0.000	9.157
5	0.001	1.000E-03	147.401	20.97	2382.25	20.98	2510.55	0.076	9.027
10	0.001	1.000E-03	106.586	41.99	2389.16	41.99	2519.75	0.151	8.902
15	0.002	1.001E-03	78.084	62.98	2396.05	62.98	2528.92	0.224	8.782
20	0.002	1.002E-03	57.912	83.94	2402.92	83.94	2538.07	0.297	8.668
25	0.003	1.003E-03	43.454	104.86	2409.77	104.87	2547.18	0.367	8.559
30	0.004	1.004E-03	32.966	125.77	2416.59	125.77	2556.25	0.437	8.454
35	0.006	1.006E-03	25.273	146.66	2423.37	146.66	2565.29	0.505	8.354
40	0.007	1.008E-03	19.567	167.54	2430.12	167.54	2574.27	0.572	8.258
45	0.010	1.010E-03	15.292	188.42	2436.82	188.43	2583.20	0.639	8.166
50	0.012	1.012E-03	12.058	209.30	2443.48	209.31	2592.07	0.704	8.077
55	0.016	1.015E-03	9.588	230.19	2450.09	230.20	2600.87	0.768	7.992
60	0.020	1.017E-03	7.686	251.09	2456.64	251.11	2609.60	0.831	7.910
65	0.025	1.020E-03	6.208	272.00	2463.13	272.03	2618.26	0.893	7.832
70	0.031	1.023E-03	5.051	292.93	2469.56	292.96	2626.82	0.955	7.756
75	0.039	1.026E-03	4.138	313.88	2475.92	313.91	2635.30	1.015	7.683
80	0.047	1.029E-03	3.413	334.84	2482.21	334.89	2643.67	1.075	7.613
85	0.058	1.032E-03	2.832	355.82	2488.41	355.88	2651.95	1.134	7.545
90	0.070	1.036E-03	2.364	376.83	2494.54	376.90	2660.11	1.192	7.480
95	0.084	1.040E-03	1.984	397.86	2500.57	397.95	2668.15	1.250	7.416
100	0.101	1.044E-03	1.675	418.92	2506.52	419.02	2676.07	1.307	7.355
105	0.121	1.047E-03	1.421	440.01	2512.36	440.13	2683.85	1.363	7.296
110	0.143	1.052E-03	1.211	461.13	2518.11	461.28	2691.50	1.418	7.239
115	0.169	1.056E-03	1.038	482.29	2523.74	482.46	2699.99	1.473	7.184
120	0.198	1.060E-03	0.893	503.48	2529.26	503.69	2706.33	1.528	7.130
125	0.232	1.065E-03	0.771	524.72	2534.66	524.97	2713.50	1.581	7.078
130	0.270	1.070E-03	0.669	546.01	2539.93	546.30	2720.49	1.634	7.027
135	0.313	1.075E-03	0.583	567.34	2545.06	567.68	2727.29	1.687	6.978
140	0.361	1.080E-03	0.509	588.73	2550.05	589.12	2733.90	1.739	6.930
145	0.415	1.085E-03	0.447	610.17	2554.89	610.62	2740.30	1.791	6.884
150	0.475	1.090E-03	0.393	631.67	2559.57	632.19	2746.49	1.842	6.838
155	0.543	1.096E-03	0.347	653.23	2564.08	653.83	2752.44	1.892	6.794
160	0.617	1.102E-03	0.307	674.86	2568.42	675.54	2758.14	1.943	6.751
165	0.700	1.108E-03	0.273	696.55	2572.56	697.33	2763.59	1.992	6.708
170	0.791	1.114E-03	0.243	718.32	2576.51	719.20	2768.76	2.042	6.667
175	0.891	1.121E-03	0.217	740.16	2580.25	741.16	2773.65	2.091	6.626
180	1.001	1.127E-03	0.194	762.08	2583.76	763.21	2778.24	2.140	6.586
185	1.122	1.134E-03	0.174	784.09	2587.05	785.36	2782.51	2.188	6.547
190	1.253	1.141E-03	0.157	806.18	2590.08	807.61	2786.46	2.236	6.508
195	1.397	1.149E-03	0.141	828.36	2592.86	829.97	2790.05	2.283	6.470
200	1.552	1.156E-03	0.127	850.64	2595.38	852.44	2793.29	2.331	6.433
205	1.721	1.164E-03	0.115	873.03	2597.60	875.03	2796.14	2.378	6.396
210	1.905	1.173E-03	0.105	895.52	2599.54	897.75	2798.60	2.425	6.359
215	2.102	1.181E-03	0.095	918.13	2601.16	920.61	2800.64	2.471	6.323
220	2.316	1.190E-03	0.086	940.86	2602.45	943.62	2802.25	2.518	6.287
225	2.546	1.199E-03	0.079	963.72	2603.41	966.78	2803.41	2.564	6.251
230	2.793	1.209E-03	0.072	986.73	2604.01	990.10	2804.10	2.610	6.215
235	3.058	1.219E-03	0.065	1009.89	2604.23	1013.61	2804.29	2.656	6.180
240	3.342	1.229E-03	0.060	1033.20	2604.07	1037.31	2803.97	2.701	6.144
245	3.646	1.240E-03	0.055	1056.70	2603.51	1061.22	2803.12	2.747	6.109
250	3.970	1.251E-03	0.050	1080.38	2602.51	1085.35	2801.70	2.793	6.073
260	4.686	1.276E-03	0.042	1128.38	2599.16	1134.36	2797.08	2.884	6.002
270	5.496	1.302E-03	0.036	1177.35	2593.82	1184.50	2789.86	2.975	5.931
280	6.408	1.332E-03	0.030	1227.45	2586.27	1235.98	2779.75	3.067	5.858
290	7.433	1.366E-03	0.026	1278.90	2576.18	1289.05	2766.37	3.159	5.783
300	8.577	1.404E-03	0.022	1331.99	2563.15	1344.03	2749.19	3.253	5.705
310	9.853	1.447E-03	0.018	1387.05	2546.60	1401.31	2727.52	3.349	5.623
320	11.270	1.499E-03	0.015	1444.57	2525.70	1461.47	2700.36	3.448	5.537
330	12.842	1.561E-03	0.013	1505.27	2499.16	1525.31	2666.17	3.551	5.442
340	14.581	1.638E-03	0.011	1570.31	2464.90	1594.19	2622.47	3.659	5.336
350	16.506	1.740E-03	0.009	1641.90	2419.07	1670.62	2564.77	3.778	5.213
360	18.640	1.893E-03	0.007	1725.43	2352.98	1760.72	2482.85	3.915	5.056
370	21.017	2.217E-03	0.005	1844.87	2232.27	1891.47	2336.60	4.112	4.804

**Acqua**  
**Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della pressione**

Press.	Temp.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
$p$ [MPa]	$T$ [C]	$v_f$ [m <sup>3</sup> /kg]	$v_g$ [m <sup>3</sup> /kg]	$u_f$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_f$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
0.00061	0.01	1.000E-03	206.58	-0.02	2375.33	-0.01	2501.35	0.000	9.157
0.0007	1.92	1.000E-03	181.27	8.00	2377.98	8.01	2504.87	0.029	9.107
0.0008	3.80	1.000E-03	159.69	15.91	2380.58	15.91	2508.33	0.058	9.058
0.0010	7.01	1.000E-03	129.22	29.41	2385.02	29.41	2514.24	0.106	8.976
0.0015	13.06	1.001E-03	87.99	54.83	2393.37	54.83	2525.36	0.196	8.828
0.0020	17.53	1.001E-03	67.01	73.60	2399.54	73.61	2533.56	0.261	8.724
0.0025	21.12	1.002E-03	54.26	88.61	2404.45	88.62	2540.10	0.312	8.643
0.0030	24.12	1.003E-03	45.67	101.18	2408.57	101.18	2545.58	0.355	8.578
0.0035	26.71	1.003E-03	39.48	112.03	2412.11	112.03	2550.29	0.391	8.523
0.0040	29.00	1.004E-03	34.80	121.60	2415.23	121.60	2554.45	0.423	8.475
0.0050	32.92	1.005E-03	28.20	137.96	2420.55	137.96	2561.53	0.477	8.395
0.0075	40.34	1.008E-03	19.24	168.94	2430.57	168.94	2574.87	0.577	8.252
0.010	45.85	1.010E-03	14.68	191.98	2437.96	191.99	2584.72	0.650	8.150
0.015	54.02	1.014E-03	10.02	226.08	2448.80	226.10	2599.15	0.755	8.009
0.020	60.11	1.017E-03	7.650	251.54	2456.78	251.56	2609.79	0.832	7.909
0.030	69.15	1.022E-03	5.230	289.35	2468.47	289.38	2625.36	0.944	7.769
0.040	75.91	1.026E-03	3.994	317.68	2477.07	317.72	2636.83	1.026	7.670
0.050	81.37	1.030E-03	3.241	340.58	2483.91	340.63	2645.95	1.091	7.594
0.060	85.98	1.033E-03	2.732	359.93	2489.62	359.99	2653.55	1.146	7.532
0.070	89.98	1.036E-03	2.365	376.76	2494.52	376.83	2660.08	1.192	7.480
0.080	93.54	1.039E-03	2.087	391.71	2498.82	391.79	2665.81	1.233	7.435
0.090	96.74	1.041E-03	1.870	405.18	2502.65	405.28	2670.92	1.270	7.395
0.100	99.66	1.043E-03	1.694	417.48	2506.12	417.58	2675.53	1.303	7.360
0.150	111.40	1.053E-03	1.159	467.06	2519.70	467.22	2693.61	1.434	7.223
0.200	120.26	1.061E-03	0.886	504.61	2529.55	504.82	2706.71	1.530	7.127
0.300	133.58	1.073E-03	0.606	561.27	2543.62	561.59	2725.38	1.672	6.992
0.400	143.67	1.084E-03	0.463	604.45	2553.62	604.88	2738.62	1.777	6.896
0.500	151.89	1.093E-03	0.375	639.82	2561.30	640.37	2748.77	1.861	6.821
0.600	158.89	1.101E-03	0.316	670.05	2567.47	670.71	2756.90	1.932	6.760
0.700	165.01	1.108E-03	0.273	696.60	2572.57	697.38	2763.60	1.993	6.708
0.800	170.47	1.115E-03	0.240	720.39	2576.87	721.28	2769.24	2.047	6.663
0.900	175.42	1.121E-03	0.215	742.00	2580.55	743.01	2774.05	2.095	6.623
1.000	179.95	1.127E-03	0.194	761.86	2583.73	762.99	2778.20	2.139	6.587
1.200	188.03	1.139E-03	0.163	797.47	2588.92	798.84	2784.95	2.217	6.524
1.400	195.12	1.149E-03	0.141	828.88	2592.93	830.49	2790.13	2.285	6.469
1.600	201.45	1.159E-03	0.124	857.13	2596.05	858.98	2794.16	2.345	6.422
1.800	207.19	1.168E-03	0.110	882.88	2598.49	884.99	2797.27	2.399	6.380
2.000	212.46	1.177E-03	0.100	906.63	2600.37	908.99	2799.66	2.448	6.341
2.500	224.04	1.197E-03	0.080	959.31	2603.25	962.30	2803.22	2.555	6.258
3.000	233.94	1.217E-03	0.067	1004.97	2604.22	1008.62	2804.29	2.646	6.187
3.500	242.65	1.235E-03	0.057	1045.61	2603.83	1049.93	2803.59	2.726	6.126
4.000	250.44	1.252E-03	0.050	1082.49	2602.40	1087.50	2801.55	2.797	6.070
4.500	257.52	1.269E-03	0.044	1116.42	2600.17	1122.13	2798.46	2.861	6.020
5.000	264.03	1.286E-03	0.039	1147.98	2597.26	1154.41	2794.50	2.920	5.974
5.500	270.05	1.302E-03	0.036	1177.60	2593.79	1184.77	2789.82	2.975	5.930
6.000	275.67	1.319E-03	0.032	1205.61	2589.83	1213.52	2784.51	3.027	5.889
7.000	285.91	1.351E-03	0.027	1257.70	2580.63	1267.16	2772.26	3.121	5.814
8.000	295.09	1.384E-03	0.024	1305.72	2569.94	1316.79	2758.13	3.207	5.743
9.000	303.43	1.418E-03	0.020	1350.64	2557.91	1363.40	2742.30	3.286	5.677
10.000	311.09	1.453E-03	0.018	1393.17	2544.56	1407.69	2724.86	3.360	5.614
11.000	318.17	1.489E-03	0.016	1433.84	2529.90	1450.21	2705.80	3.430	5.553
12.000	324.77	1.527E-03	0.014	1473.08	2513.85	1491.40	2685.04	3.496	5.493
13.000	330.95	1.567E-03	0.013	1511.26	2496.27	1531.63	2662.46	3.561	5.433
14.000	336.77	1.611E-03	0.011	1548.72	2476.99	1571.28	2637.84	3.623	5.372
15.000	342.26	1.658E-03	0.010	1585.82	2455.73	1610.70	2610.87	3.685	5.310
16.000	347.47	1.711E-03	0.009	1622.94	2432.11	1650.32	2581.11	3.746	5.246
17.000	352.41	1.771E-03	0.008	1660.58	2405.54	1690.68	2547.88	3.808	5.179
18.000	357.11	1.841E-03	0.008	1699.43	2375.13	1732.56	2510.15	3.872	5.106
19.000	361.59	1.926E-03	0.007	1740.66	2339.31	1777.26	2466.08	3.940	5.025
20.000	365.86	2.039E-03	0.006	1786.59	2294.93	1827.37	2412.02	4.016	4.930
21.000	369.93	2.213E-03	0.005	1843.67	2233.62	1890.14	2338.21	4.110	4.807
22.000	373.80	2.766E-03	0.004	1966.01	2094.87	2026.85	2174.63	4.318	4.547

**Acqua: Liquido compresso e vapore surriscaldato.**

H2O	$p = 0.01$	[MPa]	Tsat =	45.9 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	1.000E-03	-0.04	-0.03	0.000
25	1.003E-03	104.86	104.87	0.367
50	1.487E+01	2443.88	2592.57	8.175
75	1.603E+01	2479.62	2639.96	8.316
100	1.720E+01	2515.51	2687.46	8.448
120	1.812E+01	2544.35	2725.58	8.547
150	1.951E+01	2587.87	2782.99	8.688
170	2.044E+01	2617.09	2821.47	8.777
200	2.183E+01	2661.28	2879.53	8.904
250	2.414E+01	2735.96	2977.32	9.100
300	2.645E+01	2812.07	3076.52	9.281
350	2.875E+01	2889.69	3177.23	9.450
400	3.106E+01	2968.90	3279.52	9.608
450	3.337E+01	3049.75	3383.45	9.757
500	3.568E+01	3132.27	3489.06	9.898
550	3.799E+01	3216.50	3596.37	10.032
600	4.029E+01	3302.46	3705.41	10.161
650	4.260E+01	3390.17	3816.20	10.284
700	4.491E+01	3479.64	3928.75	10.403
800	4.953E+01	3663.86	4159.12	10.628

H2O	$p = 0.05$	[MPa]	Tsat =	81.4 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	1.000E-03	-0.04	0.01	0.000
25	1.003E-03	104.86	104.91	0.367
50	1.012E-03	209.29	209.34	0.704
75	1.026E-03	313.87	313.92	1.015
100	3.418E+00	2511.61	2682.53	7.695
120	3.608E+00	2541.24	2721.62	7.797
150	3.889E+00	2585.62	2780.08	7.940
170	4.076E+00	2615.24	2819.06	8.030
200	4.356E+00	2659.85	2877.65	8.158
250	4.820E+00	2734.98	2976.00	8.356
300	5.284E+00	2811.33	3075.53	8.537
350	5.747E+00	2889.12	3176.46	8.706
400	6.209E+00	2968.44	3278.90	8.864
450	6.672E+00	3049.37	3382.94	9.013
500	7.134E+00	3131.95	3488.63	9.155
550	7.596E+00	3216.23	3596.01	9.289
600	8.057E+00	3302.23	3705.11	9.418
650	8.519E+00	3389.98	3815.94	9.541
700	8.981E+00	3479.47	3928.52	9.660
800	9.904E+00	3663.72	4158.95	9.885

H2O	$p = 0.1$	[MPa]	Tsat =	99.7 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	1.000E-03	-0.04	0.06	0.000
25	1.003E-03	104.86	104.96	0.367
50	1.012E-03	209.29	209.39	0.704
75	1.026E-03	313.86	313.96	1.015
100	1.696E+00	2506.64	2676.22	7.361
120	1.793E+00	2537.29	2716.58	7.467
150	1.936E+00	2582.75	2776.39	7.613
170	2.031E+00	2612.89	2816.00	7.705
200	2.172E+00	2658.05	2875.28	7.834
250	2.406E+00	2733.74	2974.34	8.033
300	2.639E+00	2810.41	3074.29	8.216
350	2.871E+00	2888.40	3175.49	8.385
400	3.103E+00	2967.86	3278.12	8.543
450	3.334E+00	3048.89	3382.30	8.693
500	3.565E+00	3131.55	3488.10	8.834
550	3.797E+00	3215.90	3595.57	8.969
600	4.028E+00	3301.95	3704.73	9.098
650	4.259E+00	3389.73	3815.62	9.221
700	4.490E+00	3479.26	3928.24	9.340
800	4.952E+00	3663.55	4158.73	9.565

H2O	$p = 0.2$	[MPa]	Tsat =	120.3 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	1.000E-03	-0.04	0.16	0.000
25	1.003E-03	104.85	105.05	0.367
50	1.012E-03	209.27	209.47	0.704
75	1.026E-03	313.84	314.05	1.015
100	1.043E-03	418.89	419.10	1.307
120	1.060E-03	503.48	503.69	1.528
150	9.596E-01	2576.88	2768.81	7.279
170	1.008E+00	2608.09	2809.75	7.374
200	1.080E+00	2654.40	2870.47	7.507
250	1.199E+00	2731.23	2970.99	7.709
300	1.316E+00	2808.56	3071.80	7.893
350	1.433E+00	2886.96	3173.54	8.063
400	1.549E+00	2966.70	3276.56	8.222
450	1.665E+00	3047.94	3381.02	8.371
500	1.781E+00	3130.76	3487.04	8.513
550	1.897E+00	3215.23	3594.67	8.648
600	2.013E+00	3301.38	3703.97	8.777
650	2.129E+00	3389.24	3814.97	8.901
700	2.244E+00	3478.83	3927.68	9.019
800	2.475E+00	3663.21	4158.29	9.245

H2O	$p = 0.3$	[MPa]	Tsat =	133.6 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	1.000E-03	-0.04	0.26	0.000
25	1.003E-03	104.84	105.14	0.367
50	1.012E-03	209.25	209.56	0.704
75	1.026E-03	313.82	314.13	1.015
100	1.043E-03	418.86	419.17	1.307
120	1.060E-03	503.45	503.76	1.527
150	6.339E-01	2570.80	2760.96	7.078
170	6.673E-01	2603.14	2803.32	7.176
200	7.163E-01	2650.66	2865.55	7.312
250	7.964E-01	2728.69	2967.60	7.517
300	8.753E-01	2806.70	3069.28	7.702
350	9.536E-01	2885.51	3171.59	7.873
400	1.032E+00	2965.54	3274.99	8.033
450	1.109E+00	3046.98	3379.74	8.183
500	1.187E+00	3129.96	3485.97	8.325
550	1.264E+00	3214.55	3593.78	8.460
600	1.341E+00	3300.80	3703.21	8.589
650	1.419E+00	3388.74	3814.32	8.713
700	1.496E+00	3478.40	3927.12	8.832
800	1.650E+00	3662.87	4157.86	9.058

H2O	$p = 0.4$	[MPa]	Tsat =	143.7 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	1.000E-03	-0.04	0.36	0.000
25	1.003E-03	104.83	105.24	0.367
50	1.012E-03	209.24	209.64	0.704
75	1.026E-03	313.80	314.21	1.015
100	1.043E-03	418.83	419.25	1.307
120	1.060E-03	503.41	503.83	1.527
150	4.708E-01	2564.49	2752.82	6.930
170	4.966E-01	2598.05	2796.70	7.031
200	5.342E-01	2646.83	2860.52	7.171
250	5.951E-01	2726.12	2964.17	7.379
300	6.548E-01	2804.82	3066.75	7.566
350	7.139E-01	2884.06	3169.63	7.738
400	7.726E-01	2964.37	3273.42	7.898
450	8.311E-01	3046.02	3378.45	8.049
500	8.893E-01	3129.17	3484.90	8.191
550	9.475E-01	3213.88	3592.88	8.327
600	1.006E+00	3300.23	3702.45	8.456
650	1.064E+00	3388.25	3813.66	8.580
700	1.121E+00	3477.96	3926.55	8.699
800	1.237E+00	3662.53	4157.42	8.924

H2O		$p = 0.5$	[MPa]	Tsat =	151.9 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	1.000E-03	-0.04	0.46	0.000	
25	1.003E-03	104.83	105.33	0.367	
50	1.012E-03	209.22	209.73	0.703	
75	1.026E-03	313.77	314.29	1.015	
100	1.043E-03	418.80	419.32	1.306	
120	1.060E-03	503.38	503.91	1.527	
150	1.090E-03	631.66	632.20	1.842	
170	3.942E-01	2592.79	2789.87	6.916	
200	4.249E-01	2642.92	2855.38	7.059	
250	4.744E-01	2723.51	2960.69	7.271	
300	5.226E-01	2802.92	3064.20	7.460	
350	5.701E-01	2882.60	3167.65	7.633	
400	6.173E-01	2963.20	3271.84	7.794	
450	6.642E-01	3045.06	3377.16	7.945	
500	7.109E-01	3128.37	3483.83	8.087	
550	7.575E-01	3213.21	3591.98	8.223	
600	8.041E-01	3299.66	3701.69	8.352	
650	8.505E-01	3387.75	3813.01	8.476	
700	8.969E-01	3477.53	3925.99	8.595	
800	9.896E-01	3662.19	4156.98	8.821	

H2O		$p = 0.6$	[MPa]	Tsat =	158.9 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.999E-04	-0.03	0.57	0.000	
25	1.003E-03	104.82	105.42	0.367	
50	1.012E-03	209.21	209.82	0.703	
75	1.026E-03	313.75	314.37	1.015	
100	1.043E-03	418.77	419.40	1.306	
120	1.060E-03	503.34	503.98	1.527	
150	1.090E-03	631.61	632.26	1.842	
170	3.258E-01	2587.37	2782.83	6.819	
200	3.520E-01	2638.92	2850.13	6.966	
250	3.938E-01	2720.87	2957.17	7.182	
300	4.344E-01	2801.01	3061.64	7.372	
350	4.742E-01	2881.13	3165.67	7.546	
400	5.137E-01	2962.03	3270.26	7.708	
450	5.529E-01	3044.10	3375.87	7.859	
500	5.920E-01	3127.57	3482.76	8.002	
550	6.309E-01	3212.53	3591.08	8.138	
600	6.697E-01	3299.08	3700.93	8.267	
650	7.085E-01	3387.26	3812.36	8.391	
700	7.472E-01	3477.10	3925.42	8.511	
800	8.245E-01	3661.85	4156.55	8.737	

H2O		$p = 0.8$	[MPa]	Tsat =	170.5 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.998E-04	-0.03	0.77	0.000	
25	1.003E-03	104.80	105.61	0.367	
50	1.012E-03	209.18	209.99	0.703	
75	1.026E-03	313.71	314.53	1.015	
100	1.043E-03	418.71	419.55	1.306	
120	1.060E-03	503.27	504.12	1.527	
150	1.090E-03	631.51	632.39	1.841	
170	1.114E-03	718.31	719.21	2.042	
200	2.608E-01	2630.62	2839.26	6.816	
250	2.931E-01	2715.47	2949.98	7.038	
300	3.241E-01	2797.15	3056.44	7.233	
350	3.544E-01	2878.17	3161.69	7.409	
400	3.843E-01	2959.67	3267.08	7.572	
450	4.139E-01	3042.17	3373.28	7.724	
500	4.433E-01	3125.96	3480.61	7.867	
550	4.726E-01	3211.18	3589.28	8.003	
600	5.018E-01	3297.93	3699.40	8.133	
650	5.310E-01	3386.27	3811.05	8.258	
700	5.601E-01	3476.24	3924.29	8.377	
800	6.181E-01	3661.17	4155.67	8.603	

H2O		$p = 1.0$	[MPa]	Tsat =	180.0 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.997E-04	-0.03	0.97	0.000	
25	1.002E-03	104.79	105.79	0.367	
50	1.012E-03	209.15	210.16	0.703	
75	1.025E-03	313.67	314.69	1.015	
100	1.043E-03	418.66	419.70	1.306	
120	1.060E-03	503.20	504.26	1.527	
150	1.090E-03	631.42	632.51	1.841	
170	1.114E-03	718.20	719.31	2.042	
200	2.060E-01	2621.91	2827.86	6.694	
250	2.327E-01	2709.92	2942.60	6.925	
300	2.579E-01	2793.22	3051.16	7.123	
350	2.825E-01	2875.19	3157.66	7.301	
400	3.066E-01	2957.30	3263.89	7.465	
450	3.304E-01	3040.24	3370.67	7.618	
500	3.541E-01	3124.35	3478.46	7.762	
550	3.776E-01	3209.82	3587.47	7.899	
600	4.011E-01	3296.77	3697.87	8.029	
650	4.245E-01	3385.27	3809.74	8.154	
700	4.478E-01	3475.37	3923.16	8.273	
800	4.943E-01	3660.48	4154.80	8.500	

H2O		$p = 1.2$	[MPa]	Tsat =	188.0 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.996E-04	-0.02	1.17	0.000	
25	1.002E-03	104.77	105.98	0.367	
50	1.012E-03	209.12	210.33	0.703	
75	1.025E-03	313.62	314.85	1.015	
100	1.043E-03	418.60	419.85	1.306	
120	1.060E-03	503.13	504.40	1.527	
150	1.090E-03	631.33	632.63	1.841	
170	1.114E-03	718.09	719.42	2.041	
200	1.693E-01	2612.75	2815.91	6.590	
250	1.923E-01	2704.21	2935.02	6.829	
300	2.138E-01	2789.23	3045.81	7.032	
350	2.345E-01	2872.17	3153.60	7.212	
400	2.548E-01	2954.91	3260.67	7.377	
450	2.748E-01	3038.29	3368.06	7.531	
500	2.946E-01	3122.73	3476.29	7.676	
550	3.143E-01	3208.46	3585.66	7.813	
600	3.339E-01	3295.61	3696.33	7.943	
650	3.535E-01	3384.27	3808.43	8.068	
700	3.729E-01	3474.50	3922.02	8.188	
800	4.118E-01	3659.80	4153.92	8.415	

H2O		$p = 1.4$	[MPa]	Tsat =	195.1 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.995E-04	-0.02	1.38	0.000	
25	1.002E-03	104.76	106.16	0.367	
50	1.012E-03	209.09	210.51	0.703	
75	1.025E-03	313.58	315.01	1.015	
100	1.043E-03	418.54	420.00	1.306	
120	1.060E-03	503.06	504.54	1.526	
150	1.090E-03	631.23	632.76	1.841	
170	1.114E-03	717.97	719.53	2.041	
200	1.430E-01	2603.09	2803.33	6.498	
250	1.635E-01	2698.32	2927.23	6.747	
300	1.823E-01	2785.17	3040.36	6.953	
350	2.003E-01	2869.13	3149.50	7.136	
400	2.178E-01	2952.51	3257.44	7.303	
450	2.351E-01	3036.34	3365.43	7.457	
500	2.521E-01	3121.11	3474.12	7.603	
550	2.691E-01	3207.10	3583.84	7.740	
600	2.860E-01	3294.45	3694.79	7.871	
650	3.027E-01	3383.27	3807.11	7.996	
700	3.195E-01	3473.63	3920.89	8.116	
800	3.528E-01	3659.11	4153.05	8.343	

H2O		$p = 1.6$	[MPa]	Tsat =	201.5 °C
T	v	u	h	s	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.994E-04	-0.02	1.58	0.000	
25	1.002E-03	104.74	106.35	0.367	
50	1.011E-03	209.06	210.68	0.703	
75	1.025E-03	313.53	315.17	1.014	
100	1.043E-03	418.48	420.15	1.306	
120	1.060E-03	502.98	504.68	1.526	
150	1.090E-03	631.14	632.88	1.840	
170	1.114E-03	717.86	719.64	2.041	
200	1.156E-03	850.61	852.46	2.331	
250	1.418E-01	2692.27	2919.21	6.673	
300	1.586E-01	2781.04	3034.83	6.884	
350	1.746E-01	2866.06	3145.36	7.069	
400	1.901E-01	2950.10	3254.18	7.237	
450	2.053E-01	3034.38	3362.80	7.393	
500	2.203E-01	3119.48	3471.94	7.539	
550	2.352E-01	3205.73	3582.02	7.677	
600	2.500E-01	3293.29	3693.25	7.808	
650	2.647E-01	3382.27	3805.79	7.933	
700	2.794E-01	3472.76	3919.75	8.054	
800	3.086E-01	3658.42	4152.17	8.281	

H2O		$p = 1.8$	[MPa]	Tsat =	207.2 °C
T	v	u	h	s	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.993E-04	-0.02	1.78	0.000	
25	1.002E-03	104.73	106.53	0.367	
50	1.011E-03	209.03	210.85	0.703	
75	1.025E-03	313.49	315.34	1.014	
100	1.043E-03	418.42	420.30	1.305	
120	1.059E-03	502.91	504.82	1.526	
150	1.090E-03	631.04	633.00	1.840	
170	1.113E-03	717.75	719.75	2.041	
200	1.156E-03	850.46	852.54	2.330	
250	1.250E-01	2686.03	2910.97	6.607	
300	1.402E-01	2776.84	3029.22	6.823	
350	1.546E-01	2862.96	3141.19	7.010	
400	1.685E-01	2947.67	3250.91	7.179	
450	1.821E-01	3032.41	3360.15	7.336	
500	1.955E-01	3117.85	3469.76	7.482	
550	2.088E-01	3204.36	3580.19	7.621	
600	2.220E-01	3292.12	3691.70	7.752	
650	2.351E-01	3381.27	3804.47	7.878	
700	2.482E-01	3471.89	3918.61	7.998	
800	2.742E-01	3657.74	4151.29	8.226	

H2O		$p = 2.0$	[MPa]	Tsat =	212.5 °C
T	v	u	h	s	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.992E-04	-0.01	1.99	0.000	
25	1.002E-03	104.71	106.72	0.367	
50	1.011E-03	209.00	211.02	0.703	
75	1.025E-03	313.45	315.50	1.014	
100	1.043E-03	418.37	420.45	1.305	
120	1.059E-03	502.84	504.96	1.526	
150	1.089E-03	630.95	633.13	1.840	
170	1.113E-03	717.63	719.86	2.040	
200	1.156E-03	850.31	852.62	2.330	
250	1.114E-01	2679.59	2902.47	6.545	
300	1.255E-01	2772.57	3023.51	6.766	
350	1.386E-01	2859.82	3136.97	6.956	
400	1.512E-01	2945.22	3247.61	7.127	
450	1.635E-01	3030.43	3357.49	7.284	
500	1.757E-01	3116.21	3467.56	7.432	
550	1.877E-01	3202.98	3578.35	7.571	
600	1.996E-01	3290.95	3690.15	7.702	
650	2.114E-01	3380.26	3803.15	7.828	
700	2.232E-01	3471.01	3917.47	7.949	
800	2.467E-01	3657.05	4150.42	8.177	

H2O		$p = 2.5$	[MPa]	Tsat =	224.0 °C
T	v	u	h	s	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.990E-04	-0.01	2.49	0.000	
25	1.002E-03	104.67	107.18	0.367	
50	1.011E-03	208.92	211.45	0.703	
75	1.025E-03	313.34	315.90	1.014	
100	1.042E-03	418.22	420.83	1.305	
120	1.059E-03	502.67	505.31	1.525	
150	1.089E-03	630.72	633.44	1.839	
170	1.113E-03	717.35	720.14	2.040	
200	1.156E-03	849.94	852.82	2.329	
250	8.700E-02	2662.56	2880.07	6.408	
300	9.890E-02	2761.57	3008.82	6.644	
350	1.098E-01	2851.85	3126.25	6.840	
400	1.201E-01	2939.04	3239.29	7.015	
450	1.301E-01	3025.44	3350.79	7.175	
500	1.400E-01	3112.09	3462.05	7.323	
550	1.497E-01	3199.52	3573.75	7.463	
600	1.593E-01	3288.01	3686.26	7.596	
650	1.688E-01	3377.74	3799.83	7.722	
700	1.783E-01	3468.82	3914.61	7.844	
800	1.972E-01	3655.33	4148.22	8.072	

H2O		$p = 3.0$	[MPa]	Tsat =	234.0 °C
T	v	u	h	s	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.987E-04	0.00	3.00	0.000	
25	1.002E-03	104.64	107.64	0.367	
50	1.011E-03	208.85	211.88	0.702	
75	1.025E-03	313.23	316.30	1.014	
100	1.042E-03	418.08	421.20	1.305	
120	1.059E-03	502.49	505.67	1.525	
150	1.089E-03	630.48	633.75	1.839	
170	1.113E-03	717.07	720.41	2.039	
200	1.155E-03	849.56	853.03	2.329	
250	7.058E-02	2644.01	2855.76	6.287	
300	8.114E-02	2750.05	2993.49	6.539	
350	9.053E-02	2843.67	3115.26	6.743	
400	9.936E-02	2932.76	3230.84	6.921	
450	1.079E-01	3020.40	3344.01	7.083	
500	1.162E-01	3107.93	3456.49	7.234	
550	1.244E-01	3196.03	3569.11	7.375	
600	1.324E-01	3285.05	3682.35	7.508	
650	1.404E-01	3375.20	3796.49	7.636	
700	1.484E-01	3466.61	3911.74	7.757	
800	1.641E-01	3653.60	4146.02	7.986	

H2O		$p = 3.5$	[MPa]	Tsat =	242.7 °C
T	v	u	h	s	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.985E-04	0.01	3.50	0.000	
25	1.001E-03	104.60	108.10	0.366	
50	1.011E-03	208.77	212.31	0.702	
75	1.024E-03	313.12	316.71	1.013	
100	1.042E-03	417.94	421.58	1.304	
120	1.058E-03	502.31	506.02	1.525	
150	1.088E-03	630.25	634.06	1.838	
170	1.112E-03	716.79	720.68	2.038	
200	1.154E-03	849.19	853.23	2.328	
250	5.873E-02	2623.66	2829.20	6.175	
300	6.842E-02	2738.00	2977.47	6.446	
350	7.678E-02	2835.28	3104.00	6.658	
400	8.453E-02	2926.38	3222.25	6.840	
450	9.196E-02	3015.30	3337.16	7.005	
500	9.918E-02	3103.74	3450.88	7.157	
550	1.063E-01	3192.52	3564.44	7.299	
600	1.132E-01	3282.07	3678.42	7.434	
650	1.201E-01	3372.64	3793.14	7.562	
700	1.270E-01	3464.40	3908.85	7.684	
800	1.406E-01	3651.87	4143.82	7.914	

H2O	$p = 4.0$	[MPa]	Tsat =	250.4 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.982E-04	0.02	4.01	0.000
25	1.001E-03	104.56	108.56	0.366
50	1.010E-03	208.70	212.74	0.702
75	1.024E-03	313.01	317.11	1.013
100	1.042E-03	417.79	421.96	1.304
120	1.058E-03	502.14	506.37	1.524
150	1.088E-03	630.02	634.37	1.838
170	1.112E-03	716.51	720.96	2.038
200	1.154E-03	848.82	853.44	2.327
250	1.251E-03	1080.35	1085.35	2.793
300	5.884E-02	2725.34	2960.69	6.361
350	6.645E-02	2826.66	3092.44	6.582
400	7.341E-02	2919.89	3213.53	6.769
450	8.003E-02	3010.14	3330.24	6.936
500	8.643E-02	3099.51	3445.23	7.090
550	9.269E-02	3188.99	3559.74	7.234
600	9.885E-02	3279.08	3674.46	7.369
650	1.049E-01	3370.08	3789.78	7.497
700	1.109E-01	3462.17	3905.96	7.620
800	1.229E-01	3650.13	4141.62	7.850

H2O	$p = 4.5$	[MPa]	Tsat =	257.5 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.980E-04	0.02	4.51	0.000
25	1.001E-03	104.52	109.03	0.366
50	1.010E-03	208.63	213.17	0.702
75	1.024E-03	312.91	317.51	1.013
100	1.041E-03	417.65	422.33	1.303
120	1.058E-03	501.96	506.73	1.524
150	1.088E-03	629.78	634.68	1.837
170	1.111E-03	716.23	721.24	2.037
200	1.153E-03	848.46	853.65	2.326
250	1.250E-03	1079.71	1085.34	2.791
300	5.135E-02	2712.01	2943.08	6.283
350	5.840E-02	2817.80	3080.58	6.513
400	6.475E-02	2913.30	3204.66	6.705
450	7.074E-02	3004.93	3323.24	6.875
500	7.651E-02	3095.24	3439.53	7.030
550	8.213E-02	3185.42	3555.01	7.175
600	8.765E-02	3276.06	3670.48	7.311
650	9.309E-02	3367.49	3786.40	7.440
700	9.847E-02	3459.94	3903.06	7.563
800	1.091E-01	3648.39	4139.41	7.794

H2O	$p = 5.0$	[MPa]	Tsat =	264.0 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.977E-04	0.03	5.02	0.000
25	1.001E-03	104.48	109.49	0.366
50	1.010E-03	208.55	213.60	0.701
75	1.024E-03	312.80	317.92	1.012
100	1.041E-03	417.51	422.71	1.303
120	1.058E-03	501.79	507.08	1.523
150	1.087E-03	629.55	634.99	1.837
170	1.111E-03	715.96	721.51	2.037
200	1.153E-03	848.09	853.85	2.325
250	1.249E-03	1079.08	1085.33	2.790
300	4.532E-02	2697.95	2924.54	6.208
350	5.194E-02	2808.68	3068.40	6.449
400	5.781E-02	2906.59	3195.66	6.646
450	6.330E-02	2999.65	3316.16	6.819
500	6.857E-02	3090.94	3433.78	6.976
550	7.368E-02	3181.84	3550.25	7.122
600	7.869E-02	3273.03	3666.48	7.259
650	8.362E-02	3364.90	3783.00	7.389
700	8.849E-02	3457.69	3900.15	7.512
800	9.811E-02	3646.65	4137.20	7.744

H2O	$p = 6.0$	[MPa]	Tsat =	275.7 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.972E-04	0.04	6.03	0.000
25	1.000E-03	104.41	110.41	0.366
50	1.009E-03	208.40	214.46	0.701
75	1.023E-03	312.58	318.72	1.012
100	1.041E-03	417.22	423.47	1.302
120	1.057E-03	501.44	507.79	1.522
150	1.087E-03	629.09	635.61	1.836
170	1.110E-03	715.41	722.07	2.035
200	1.152E-03	847.36	854.27	2.324
250	1.248E-03	1077.84	1085.32	2.788
300	3.616E-02	2667.23	2884.21	6.067
350	4.223E-02	2789.63	3042.99	6.333
400	4.739E-02	2892.83	3177.19	6.541
450	5.214E-02	2988.92	3301.77	6.719
500	5.665E-02	3082.22	3422.14	6.880
550	6.101E-02	3174.59	3540.63	7.029
600	6.525E-02	3266.91	3658.42	7.168
650	6.942E-02	3359.67	3776.17	7.299
700	7.352E-02	3453.17	3894.30	7.423
800	8.160E-02	3643.15	4132.77	7.657

H2O	$p = 7.0$	[MPa]	Tsat =	285.9 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.967E-04	0.06	7.03	0.000
25	9.998E-04	104.33	111.33	0.366
50	1.009E-03	208.26	215.32	0.700
75	1.023E-03	312.37	319.53	1.011
100	1.040E-03	416.94	424.22	1.301
120	1.057E-03	501.10	508.49	1.521
150	1.086E-03	628.63	636.24	1.835
170	1.109E-03	714.86	722.62	2.034
200	1.151E-03	846.64	854.69	2.322
250	1.246E-03	1076.61	1085.33	2.785
300	2.947E-02	2632.15	2838.41	5.930
350	3.524E-02	2769.36	3016.03	6.228
400	3.993E-02	2878.57	3158.08	6.448
450	4.416E-02	2977.93	3287.06	6.633
500	4.814E-02	3073.35	3410.31	6.797
550	5.195E-02	3167.23	3530.89	6.949
600	5.565E-02	3260.71	3650.28	7.089
650	5.927E-02	3354.39	3769.28	7.222
700	6.283E-02	3448.62	3888.41	7.348
800	6.981E-02	3639.64	4128.32	7.582

H2O	$p = 8.0$	[MPa]	Tsat =	285.1 °C
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.962E-04	0.07	8.04	0.000
25	9.993E-04	104.26	112.25	0.365
50	1.009E-03	208.11	216.18	0.700
75	1.022E-03	312.16	320.34	1.010
100	1.040E-03	416.66	424.97	1.301
120	1.056E-03	500.75	509.20	1.521
150	1.085E-03	628.18	636.86	1.833
170	1.109E-03	714.31	723.18	2.033
200	1.150E-03	845.92	855.12	2.321
250	1.244E-03	1075.40	1085.35	2.783
300	2.426E-02	2590.94	2785.00	5.791
350	2.995E-02	2747.69	2987.32	6.130
400	3.432E-02	2863.77	3138.30	6.363
450	3.817E-02	2966.68	3272.01	6.555
500	4.175E-02	3064.32	3398.29	6.724
550	4.516E-02	3159.78	3521.03	6.878
600	4.845E-02	3254.45	3642.05	7.021
650	5.166E-02	3349.06	3762.34	7.155
700	5.481E-02	3444.03	3882.49	7.281
800	6.097E-02	3636.11	4123.87	7.517

H2O	$p = 10.0$	[MPa]	Tsat =	311.1 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.952E-04	0.09	10.05	0.000
25	9.984E-04	104.11	114.09	0.365
50	1.008E-03	207.82	217.89	0.699
75	1.021E-03	311.74	321.95	1.009
100	1.039E-03	416.10	426.48	1.299
120	1.055E-03	500.07	510.62	1.519
150	1.084E-03	627.28	638.12	1.831
170	1.107E-03	713.23	724.30	2.030
200	1.148E-03	844.50	855.98	2.318
250	1.240E-03	1073.01	1085.42	2.778
300	1.397E-03	1328.35	1342.32	3.247
350	2.242E-02	2699.17	2923.40	5.944
400	2.641E-02	2832.40	3096.48	6.212
450	2.975E-02	2943.34	3240.85	6.419
500	3.279E-02	3045.79	3373.65	6.597
550	3.564E-02	3144.56	3500.94	6.756
600	3.837E-02	3241.71	3625.36	6.903
650	4.101E-02	3338.24	3748.30	7.040
700	4.358E-02	3434.75	3870.54	7.169
800	4.859E-02	3629.00	4114.94	7.408

H2O	$p = 12.5$	[MPa]	Tsat =	327.9 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.940E-04	0.12	12.55	0.000
25	9.973E-04	103.92	116.39	0.364
50	1.007E-03	207.45	220.04	0.698
75	1.020E-03	311.21	323.97	1.008
100	1.037E-03	415.41	428.37	1.297
120	1.054E-03	499.23	512.39	1.517
150	1.083E-03	626.16	639.69	1.829
170	1.105E-03	711.90	725.71	2.027
200	1.146E-03	842.76	857.08	2.314
250	1.236E-03	1070.11	1085.56	2.773
300	1.387E-03	1322.28	1339.62	3.236
350	1.613E-02	2624.59	2826.17	5.712
400	2.000E-02	2789.27	3039.32	6.042
450	2.299E-02	2912.46	3199.80	6.272
500	2.560E-02	3021.70	3341.74	6.462
550	2.801E-02	3124.97	3475.15	6.629
600	3.029E-02	3225.40	3604.07	6.781
650	3.248E-02	3324.46	3730.46	6.922
700	3.460E-02	3422.96	3855.43	7.054
800	3.869E-02	3620.05	4103.72	7.297

H2O	$p = 1.50$	[MPa]	Tsat =	342.3 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.928E-04	0.15	15.04	0.000
25	9.963E-04	103.73	118.68	0.363
50	1.006E-03	207.09	222.18	0.697
75	1.019E-03	310.70	325.98	1.006
100	1.036E-03	414.72	430.26	1.295
120	1.052E-03	498.39	514.17	1.514
150	1.081E-03	625.06	641.28	1.826
170	1.103E-03	710.58	727.14	2.024
200	1.143E-03	841.04	858.19	2.310
250	1.232E-03	1067.29	1085.77	2.767
300	1.377E-03	1316.59	1337.24	3.226
350	1.147E-02	2520.38	2692.44	5.442
400	1.565E-02	2740.72	2975.46	5.881
450	1.845E-02	2879.50	3156.18	6.140
500	2.080E-02	2996.55	3308.55	6.344
550	2.293E-02	3104.73	3448.63	6.520
600	2.491E-02	3208.67	3582.33	6.678
650	2.680E-02	3310.40	3712.34	6.822
700	2.861E-02	3410.97	3840.15	6.957
800	3.210E-02	3611.03	4092.46	7.204

H2O	$p = 17.5$	[MPa]	Tsat =	354.8 °C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.916E-04	0.18	17.53	0.000
25	9.952E-04	103.55	120.96	0.363
50	1.005E-03	206.74	224.32	0.696
75	1.018E-03	310.18	328.00	1.005
100	1.035E-03	414.05	432.16	1.294
120	1.051E-03	497.57	515.96	1.512
150	1.079E-03	623.98	642.86	1.823
170	1.102E-03	709.29	728.57	2.021
200	1.141E-03	839.36	859.32	2.307
250	1.228E-03	1064.55	1086.04	2.762
300	1.368E-03	1311.21	1335.15	3.216
350	1.714E-03	1632.04	1662.03	3.761
400	1.245E-02	2685.01	2902.84	5.721
450	1.517E-02	2844.17	3109.71	6.018
500	1.736E-02	2970.28	3274.05	6.238
550	1.929E-02	3083.87	3421.40	6.423
600	2.106E-02	3191.54	3560.16	6.587
650	2.274E-02	3296.07	3693.96	6.736
700	2.434E-02	3398.82	3824.70	6.874
800	2.738E-02	3601.93	4081.16	7.125

H2O	$p = 20.0$	[MPa]	Tsat =	365.9 C
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.904E-04	0.20	20.00	0.000
25	9.941E-04	103.36	123.24	0.362
50	1.003E-03	206.38	226.45	0.694
75	1.017E-03	309.68	330.01	1.003
100	1.034E-03	413.38	434.05	1.292
120	1.050E-03	496.75	517.74	1.510
150	1.078E-03	622.90	644.46	1.821
170	1.100E-03	708.01	730.01	2.018
200	1.139E-03	837.70	860.48	2.303
250	1.224E-03	1061.87	1086.36	2.757
300	1.360E-03	1306.11	1333.30	3.207
350	1.664E-03	1612.29	1645.57	3.728
400	9.942E-03	2619.25	2818.10	5.554
450	1.270E-02	2806.18	3060.09	5.902
500	1.477E-02	2942.84	3238.21	6.140
550	1.656E-02	3062.37	3393.48	6.335
600	1.818E-02	3174.04	3537.59	6.505
650	1.969E-02	3281.49	3675.35	6.658
700	2.113E-02	3386.50	3809.12	6.799
800	2.385E-02	3592.78	4069.83	7.054

H2O	$p = 25.0$	[MPa]	Tsat =	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
0	9.880E-04	0.23	24.93	0.000
25	9.920E-04	102.99	127.79	0.361
50	1.001E-03	205.68	230.72	0.692
75	1.015E-03	308.68	334.05	1.000
100	1.031E-03	412.06	437.84	1.288
120	1.047E-03	495.15	521.32	1.506
150	1.075E-03	620.80	647.67	1.816
170	1.096E-03	705.51	732.93	2.012
200	1.134E-03	834.47	862.83	2.296
250	1.217E-03	1056.73	1087.16	2.747
300	1.344E-03	1296.61	1330.21	3.190
350	1.598E-03	1583.56	1623.51	3.680
400	6.004E-03	2430.08	2580.19	5.142
450	9.162E-03	2720.68	2949.73	5.674
500	1.112E-02	2884.33	3162.41	5.959
550	1.272E-02	3017.54	3335.65	6.176
600	1.414E-02	3137.95	3491.39	6.360
650	1.543E-02	3251.67	3637.49	6.523
700	1.665E-02	3361.43	3777.59	6.671
800	1.891E-02	3574.30	4047.11	6.935

H2O		$\rho = 30.0$	[MPa]		
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.856E-04	0.25	29.82	0.000	
25	9.899E-04	102.62	132.32	0.359	
50	9.994E-04	205.00	234.98	0.690	
75	1.013E-03	307.70	338.08	0.997	
100	1.029E-03	410.77	441.64	1.284	
120	1.044E-03	493.58	524.91	1.502	
150	1.072E-03	618.75	650.90	1.811	
170	1.093E-03	703.08	735.87	2.007	
200	1.130E-03	831.34	865.25	2.289	
250	1.210E-03	1051.82	1088.13	2.737	
300	1.330E-03	1287.90	1327.81	3.174	
350	1.552E-03	1561.87	1608.42	3.643	
400	2.790E-03	2067.38	2151.08	4.473	
450	6.735E-03	2619.33	2821.38	5.442	
500	8.679E-03	2820.71	3081.06	5.790	
550	1.017E-02	2970.35	3275.39	6.034	
600	1.145E-02	3100.57	3443.94	6.233	
650	1.260E-02	3221.08	3598.96	6.406	
700	1.366E-02	3335.88	3745.71	6.561	
800	1.562E-02	3555.65	4024.34	6.833	

H2O		$\rho = 35.0$	[MPa]		
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.833E-04	0.26	34.68	0.000	
25	9.879E-04	102.26	136.83	0.358	
50	9.973E-04	204.32	239.23	0.688	
75	1.010E-03	306.74	342.10	0.994	
100	1.027E-03	409.50	445.44	1.281	
120	1.042E-03	492.05	528.52	1.498	
150	1.069E-03	616.75	654.16	1.806	
170	1.090E-03	700.71	738.86	2.001	
200	1.126E-03	828.31	867.73	2.283	
250	1.204E-03	1047.14	1089.27	2.727	
300	1.318E-03	1279.84	1325.96	3.159	
350	1.516E-03	1544.04	1597.12	3.612	
400	2.100E-03	1914.05	1987.55	4.212	
450	4.962E-03	2498.74	2672.40	5.196	
500	6.927E-03	2751.91	2994.37	5.628	
550	8.345E-03	2920.98	3213.04	5.903	
600	9.527E-03	3062.07	3395.52	6.118	
650	1.057E-02	3189.84	3559.94	6.301	
700	1.153E-02	3309.93	3713.58	6.463	
800	1.328E-02	3536.86	4001.58	6.745	

H2O		$\rho = 40.0$	[MPa]		
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.811E-04	0.25	39.50	0.000	
25	9.858E-04	101.90	141.33	0.356	
50	9.953E-04	203.66	243.47	0.685	
75	1.008E-03	305.79	346.13	0.991	
100	1.024E-03	408.27	449.25	1.277	
120	1.040E-03	490.54	532.13	1.494	
150	1.066E-03	614.79	657.43	1.801	
170	1.087E-03	698.40	741.87	1.996	
200	1.122E-03	825.37	870.26	2.276	
250	1.198E-03	1042.65	1090.55	2.718	
300	1.306E-03	1272.33	1324.58	3.145	
350	1.487E-03	1528.75	1588.24	3.586	
400	1.908E-03	1854.54	1930.85	4.113	
450	3.693E-03	2365.11	2512.83	4.946	
500	5.622E-03	2678.40	2903.30	5.470	
550	6.984E-03	2869.73	3149.09	5.778	
600	8.094E-03	3022.65	3346.42	6.011	
650	9.063E-03	3158.08	3520.62	6.205	
700	9.941E-03	3283.68	3681.33	6.375	
800	1.152E-02	3517.94	3978.85	6.666	

H2O		$\rho = 50.0$	[MPa]		
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.766E-04	0.20	49.03	-0.001	
25	9.819E-04	101.18	150.27	0.353	
50	9.914E-04	202.36	251.94	0.681	
75	1.004E-03	303.96	354.18	0.985	
100	1.020E-03	405.86	456.87	1.270	
120	1.035E-03	487.63	539.38	1.486	
150	1.061E-03	611.01	664.04	1.791	
170	1.080E-03	693.95	747.98	1.985	
200	1.115E-03	819.73	875.46	2.263	
250	1.186E-03	1034.19	1093.50	2.701	
300	1.286E-03	1258.67	1322.96	3.120	
350	1.441E-03	1503.19	1575.24	3.542	
400	1.731E-03	1788.06	1874.61	4.003	
450	2.486E-03	2159.64	2283.95	4.588	
500	3.892E-03	2525.49	2720.12	5.173	
550	5.118E-03	2763.66	3019.56	5.549	
600	6.112E-03	2942.02	3247.64	5.818	
650	6.966E-03	3093.60	3441.89	6.034	
700	7.727E-03	3230.59	3616.95	6.219	
800	9.076E-03	3479.88	3933.67	6.529	

H2O		$\rho = 60.0$	[MPa]		
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.723E-04	0.10	58.44	-0.003	
25	9.780E-04	100.47	159.15	0.350	
50	9.876E-04	201.11	260.37	0.676	
75	1.000E-03	302.19	362.22	0.980	
100	1.016E-03	403.55	464.50	1.263	
120	1.030E-03	484.84	546.66	1.478	
150	1.055E-03	607.39	670.71	1.782	
170	1.075E-03	689.70	754.18	1.975	
200	1.108E-03	814.39	880.85	2.251	
250	1.176E-03	1026.35	1096.89	2.685	
300	1.268E-03	1246.47	1322.55	3.097	
350	1.405E-03	1482.12	1566.41	3.505	
400	1.633E-03	1745.36	1843.37	3.932	
450	2.085E-03	2053.89	2178.99	4.412	
500	2.956E-03	2390.58	2567.93	4.932	
550	3.957E-03	2658.81	2896.21	5.344	
600	4.835E-03	2861.19	3151.26	5.645	
650	5.595E-03	3028.88	3364.60	5.883	
700	6.272E-03	3177.30	3553.61	6.082	
800	7.459E-03	3441.66	3889.18	6.411	

H2O		$\rho = 70.0$	[MPa]		
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$	
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]	
0	9.682E-04	-0.05	67.72	-0.004	
25	9.742E-04	99.78	167.98	0.347	
50	9.839E-04	199.90	268.77	0.672	
75	9.965E-04	300.49	370.24	0.974	
100	1.012E-03	401.32	472.15	1.257	
120	1.026E-03	482.15	553.96	1.470	
150	1.050E-03	603.92	677.44	1.773	
170	1.069E-03	685.64	760.48	1.965	
200	1.101E-03	809.32	886.38	2.240	
250	1.166E-03	1019.02	1100.64	2.670	
300	1.252E-03	1235.44	1323.09	3.076	
350	1.375E-03	1464.12	1560.37	3.473	
400	1.566E-03	1713.14	1822.79	3.877	
450	1.893E-03	1990.15	2122.66	4.307	
500	2.466E-03	2290.58	2463.19	4.762	
550	3.227E-03	2563.90	2789.80	5.172	
600	3.976E-03	2783.45	3061.76	5.493	
650	4.650E-03	2965.40	3290.90	5.748	
700	5.256E-03	3124.59	3492.48	5.961	
800	6.318E-03	3403.51	3845.78	6.307	

**R717 – Ammoniaca**

**Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della temperatura**

Temp.	Press.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
T [C]	p [MPa]	$v_f$ [m³/kg]	$v_g$ [m³/kg]	$u_f$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_f$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
-75.00	0.00751	0.00137	12.82	-180.7	1201	-180.7	1297	-0.8265	6.634
-70.00	0.01094	0.00138	9.008	-159.6	1208	-159.6	1307	-0.7211	6.497
-65.00	0.01562	0.00139	6.452	-138.3	1215	-138.3	1316	-0.6175	6.369
-60.00	0.02189	0.00140	4.706	-116.9	1222	-116.8	1325	-0.5157	6.248
-55.00	0.03014	0.00141	3.490	-95.27	1229	-95.23	1334	-0.4157	6.135
-50.00	0.04084	0.00142	2.628	-73.55	1235	-73.49	1342	-0.3172	6.028
-45.00	0.05449	0.00144	2.007	-51.69	1241	-51.61	1351	-0.2203	5.927
-40.00	0.07169	0.00145	1.553	-29.70	1248	-29.59	1359	-0.1250	5.831
-35.00	0.09310	0.00146	1.217	-7.580	1254	-7.443	1367	-0.0311	5.740
-30.00	0.1194	0.00148	0.9640	14.66	1259	14.84	1375	0.06134	5.653
-25.00	0.1515	0.00149	0.7717	37.02	1265	37.25	1382	0.1524	5.571
-20.00	0.1901	0.00150	0.6237	59.50	1270	59.79	1389	0.2421	5.492
-15.00	0.2362	0.00152	0.5087	82.09	1275	82.45	1396	0.3304	5.417
-10.00	0.2907	0.00153	0.4183	104.8	1280	105.2	1402	0.4176	5.345
-5.000	0.3548	0.00155	0.3466	127.6	1285	128.2	1408	0.5035	5.276
0.0	0.4294	0.00157	0.2893	150.6	1289	151.2	1413	0.5883	5.209
5.000	0.5157	0.00158	0.2430	173.6	1293	174.4	1419	0.6720	5.145
10.00	0.6150	0.00160	0.2054	196.8	1297	197.8	1423	0.7547	5.083
15.00	0.7285	0.00162	0.1746	220.1	1300	221.3	1428	0.8364	5.023
20.00	0.8575	0.00164	0.1492	243.6	1303	245.0	1431	0.9172	4.964
25.00	1.003	0.00166	0.1281	267.2	1306	268.9	1435	0.9972	4.907
30.00	1.167	0.00168	0.1105	291.0	1308	293.0	1437	1.076	4.851
35.00	1.351	0.00170	0.09563	315.0	1310	317.3	1440	1.155	4.797
40.00	1.555	0.00173	0.08310	339.2	1312	341.9	1441	1.233	4.743
45.00	1.783	0.00175	0.07245	363.6	1313	366.7	1442	1.310	4.690
50.00	2.034	0.00178	0.06335	388.2	1313	391.9	1442	1.387	4.638
55.00	2.311	0.00180	0.05554	413.2	1313	417.3	1442	1.464	4.586
60.00	2.616	0.00183	0.04880	438.4	1313	443.2	1441	1.541	4.534
65.00	2.949	0.00187	0.04296	464.0	1312	469.5	1438	1.617	4.482
70.00	3.313	0.00190	0.03787	490.0	1310	496.3	1435	1.694	4.430
75.00	3.710	0.00194	0.03342	516.4	1307	523.6	1431	1.771	4.377
80.00	4.142	0.00198	0.02951	543.4	1303	551.6	1426	1.848	4.323
85.00	4.610	0.00202	0.02606	571.0	1299	580.3	1419	1.926	4.267
90.00	5.117	0.00207	0.02300	599.2	1293	609.8	1410	2.005	4.210
95.00	5.664	0.00213	0.02027	628.4	1285	640.4	1400	2.086	4.149
100.0	6.255	0.00219	0.01782	658.5	1276	672.2	1388	2.168	4.086
105.0	6.892	0.00226	0.01561	690.0	1265	705.6	1373	2.253	4.017
110.0	7.578	0.00235	0.01360	723.1	1251	740.9	1354	2.342	3.943
115.0	8.317	0.00246	0.01174	758.5	1234	779.0	1331	2.436	3.858
120.0	9.112	0.00259	0.00999	797.5	1210	821.2	1301	2.539	3.760
125.0	9.970	0.00279	0.00828	843.1	1178	870.9	1260	2.658	3.637
130.0	10.90	0.00320	0.00638	908.4	1121	943.3	1191	2.832	3.445

**R717 – Ammoniaca**  
**Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della pressione**

Press.	Temp.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
$p$ [MPa]	$T$ [C]	$v_l$ [m³/kg]	$v_g$ [m³/kg]	$u_l$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_l$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_l$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
0.030	-55.08	0.00141	3.505	-95.61	1229	-95.57	1334	-0.4172	6.137
0.040	-50.35	0.00142	2.679	-75.07	1235	-75.01	1342	-0.324	6.035
0.050	-46.52	0.00143	2.175	-58.34	1240	-58.27	1348	-0.2496	5.957
0.060	-43.27	0.00144	1.834	-44.11	1244	-44.02	1354	-0.1872	5.893
0.070	-40.45	0.00145	1.588	-31.66	1247	-31.56	1358	-0.1334	5.839
0.080	-37.93	0.00145	1.402	-20.56	1250	-20.44	1362	-0.08595	5.793
0.090	-35.66	0.00146	1.256	-10.51	1253	-10.38	1366	-0.04343	5.752
0.100	-33.59	0.00147	1.138	-1.312	1255	-1.166	1369	-0.00486	5.715
0.110	-31.68	0.00147	1.041	7.188	1258	7.35	1372	0.03049	5.682
0.120	-29.9	0.00148	0.9597	15.1	1260	15.28	1375	0.06314	5.652
0.130	-28.24	0.00148	0.8904	22.51	1261	22.7	1377	0.0935	5.624
0.140	-26.68	0.00148	0.8307	29.49	1263	29.69	1379	0.1219	5.598
0.150	-25.21	0.00149	0.7788	36.08	1265	36.3	1382	0.1486	5.574
0.160	-23.81	0.00149	0.7331	42.34	1266	42.58	1384	0.1738	5.552
0.170	-22.49	0.0015	0.6926	48.31	1268	48.56	1385	0.1976	5.531
0.180	-21.22	0.0015	0.6564	54	1269	54.27	1387	0.2203	5.511
0.190	-20.01	0.0015	0.624	59.46	1270	59.74	1389	0.2419	5.493
0.200	-18.85	0.00151	0.5946	64.7	1272	65	1390	0.2625	5.475
0.225	-16.13	0.00151	0.5324	76.95	1274	77.3	1394	0.3105	5.434
0.250	-13.65	0.00152	0.4822	88.2	1277	88.58	1397	0.3541	5.398
0.275	-11.36	0.00153	0.4408	98.62	1279	99.04	1400	0.394	5.364
0.300	-9.224	0.00154	0.4061	108.3	1281	108.8	1403	0.431	5.334
0.325	-7.226	0.00154	0.3765	117.4	1283	117.9	1405	0.4654	5.306
0.350	-5.346	0.00155	0.3511	126	1285	126.6	1408	0.4976	5.281
0.375	-3.568	0.00155	0.3289	134.2	1286	134.8	1410	0.5279	5.257
0.400	-1.881	0.00156	0.3094	141.9	1288	142.5	1411	0.5565	5.234
0.500	4.14	0.00158	0.2503	169.6	1293	170.4	1418	0.6577	5.156
0.600	9.285	0.0016	0.2104	193.5	1296	194.4	1423	0.7429	5.092
0.700	13.8	0.00161	0.1815	214.5	1300	215.7	1427	0.8169	5.037
0.800	17.85	0.00163	0.1596	233.5	1302	234.8	1430	0.8825	4.989
0.900	21.52	0.00164	0.1424	250.8	1304	252.3	1432	0.9416	4.947
1.000	24.9	0.00166	0.1285	266.7	1306	268.4	1435	0.9955	4.908
1.200	30.94	0.00168	0.1075	295.5	1309	297.5	1438	1.091	4.841
1.400	36.25	0.00171	0.0923	321	1311	323.4	1440	1.174	4.783
1.600	41.02	0.00173	0.08078	344.2	1312	346.9	1441	1.249	4.732
1.800	45.36	0.00175	0.07174	365.4	1313	368.5	1442	1.316	4.687
2.000	49.35	0.00177	0.06445	385	1313	388.6	1442	1.377	4.645
2.200	53.05	0.00179	0.05844	403.4	1314	407.4	1442	1.434	4.606
2.400	56.51	0.00181	0.0534	420.7	1313	425.1	1442	1.487	4.57
2.600	59.75	0.00183	0.04911	437.2	1313	441.9	1441	1.537	4.537
2.800	62.82	0.00185	0.0454	452.8	1312	458	1439	1.584	4.505
3.000	65.72	0.00187	0.04217	467.7	1311	473.3	1438	1.628	4.475
3.500	72.4	0.00192	0.03566	502.6	1308	509.3	1433	1.731	4.404
4.000	78.4	0.00196	0.03071	534.7	1305	542.6	1427	1.823	4.34
4.500	83.86	0.00201	0.02681	564.6	1300	573.7	1420	1.908	4.28
5.000	88.88	0.00206	0.02365	592.9	1294	603.2	1412	1.987	4.223
5.500	93.54	0.00211	0.02103	619.8	1288	631.4	1403	2.062	4.167
6.000	97.89	0.00216	0.01882	645.6	1280	658.6	1393	2.133	4.113
6.500	102	0.00222	0.01693	670.7	1272	685.1	1382	2.201	4.06
7.000	105.8	0.00228	0.01527	695.2	1263	711.2	1370	2.267	4.006
7.500	109.4	0.00234	0.01381	719.4	1253	736.9	1357	2.332	3.951
8.000	112.9	0.00241	0.0125	743.3	1242	762.6	1342	2.395	3.895
8.500	116.2	0.00249	0.01132	767.4	1229	788.5	1325	2.459	3.837
9.000	119.3	0.00257	0.01023	791.9	1214	815	1306	2.524	3.775
9.500	122.3	0.00268	0.00921	817.4	1197	842.8	1284	2.591	3.708
10.000	125.2	0.0028	0.00823	844.8	1176	872.8	1259	2.663	3.632
10.500	127.9	0.00298	0.00724	876.2	1150	907.5	1226	2.746	3.541

**R717 – Ammoniaca: Liquido compresso e vapore surriscaldato.**

R717	$p =$	0.06	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.56	-73.47	-0.3172
-40.00	1.863	1249	1361	5.924
-30.00	1.949	1266	1383	6.016
-20.00	2.034	1282	1404	6.103
-10.00	2.119	1299	1426	6.186
0.0	2.203	1315	1447	6.266
10.00	2.286	1331	1468	6.342
20.00	2.369	1348	1490	6.416
30.00	2.452	1364	1511	6.488
40.00	2.535	1380	1532	6.557
50.00	2.618	1397	1554	6.625
60.00	2.700	1414	1576	6.691
70.00	2.782	1430	1597	6.755
80.00	2.864	1447	1619	6.818
90.00	2.946	1465	1641	6.880
100.0	3.028	1482	1664	6.940
110.0	3.110	1499	1686	6.999
120.0	3.192	1517	1708	7.057
140.0	3.356	1553	1754	7.170
150.0	3.437	1571	1777	7.226
160.0	3.519	1589	1801	7.280
170.0	3.601	1608	1824	7.334
180.0	3.682	1627	1848	7.387
190.0	3.764	1646	1872	7.439
200.0	3.846	1665	1896	7.490

R717	$p =$	0.08	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.57	-73.46	-0.3173
-40.00	0.00145	-29.7	-29.59	-0.125
-30.00	1.454	1264	1380	5.867
-20.00	1.519	1281	1402	5.956
-10.00	1.583	1297	1424	6.04
0.0	1.647	1314	1445	6.12
10.00	1.71	1330	1467	6.198
20.00	1.773	1347	1488	6.272
30.00	1.836	1363	1510	6.344
40.00	1.898	1380	1531	6.414
50.00	1.96	1396	1553	6.482
60.00	2.022	1413	1575	6.548
70.00	2.084	1430	1597	6.613
80.00	2.146	1447	1619	6.676
90.00	2.208	1464	1641	6.738
100.0	2.269	1481	1663	6.798
110.0	2.331	1499	1685	6.858
120.0	2.392	1517	1708	6.916
140.0	2.515	1552	1754	7.029
150.0	2.577	1571	1777	7.084
160.0	2.638	1589	1800	7.139
170.0	2.699	1608	1824	7.193
180.0	2.761	1627	1847	7.246
190.0	2.822	1646	1871	7.298
200.0	2.883	1665	1895	7.349

R717	$p =$	0.1	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.58	-73.44	-0.3173
-40.00	0.00145	-29.72	-29.57	-0.125
-30.00	1.157	1262	1377	5.749
-20.00	1.21	1279	1400	5.84
-10.00	1.262	1296	1422	5.925
0.0	1.314	1312	1444	6.007
10.00	1.365	1329	1465	6.085
20.00	1.415	1346	1487	6.16
30.00	1.466	1362	1509	6.233
40.00	1.516	1379	1530	6.303
50.00	1.566	1396	1552	6.371
60.00	1.616	1412	1574	6.438
70.00	1.665	1429	1596	6.502
80.00	1.715	1446	1618	6.566
90.00	1.764	1464	1640	6.628
100.0	1.814	1481	1662	6.688
110.0	1.863	1498	1685	6.748
120.0	1.912	1516	1707	6.806
140.0	2.011	1552	1753	6.919
150.0	2.06	1570	1776	6.975
160.0	2.109	1589	1800	7.029
170.0	2.158	1607	1823	7.083
180.0	2.208	1626	1847	7.136
190.0	2.257	1645	1871	7.188
200.0	2.306	1665	1895	7.24

R717	$p =$	0.2	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.63	-73.35	-0.3176
-40.00	0.00145	-29.77	-29.48	-0.1253
-30.00	0.00148	14.61	14.9	0.06112
-20.00	0.0015	59.49	59.79	0.242
-10.00	0.6193	1288	1412	5.557
0.0	0.6465	1306	1435	5.644
10.00	0.6732	1323	1458	5.726
20.00	0.6995	1341	1481	5.805
30.00	0.7255	1358	1503	5.88
40.00	0.7512	1375	1525	5.952
50.00	0.7768	1392	1547	6.022
60.00	0.8022	1409	1570	6.09
70.00	0.8275	1427	1592	6.156
80.00	0.8527	1444	1614	6.22
90.00	0.8778	1461	1637	6.283
100.0	0.9028	1479	1659	6.344
110.0	0.9278	1496	1682	6.404
120.0	0.9527	1514	1705	6.463
140.0	1.002	1550	1751	6.577
150.0	1.027	1569	1774	6.633
160.0	1.052	1587	1798	6.688
170.0	1.077	1606	1821	6.742
180.0	1.101	1625	1845	6.795
190.0	1.126	1644	1869	6.847
200.0	1.151	1663	1894	6.899

R717	$p =$	0.4	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.74	-73.17	-0.3181
-40.00	0.00145	-29.89	-29.31	-0.1258
-30.00	0.00147	14.48	15.07	0.06057
-20.00	0.0015	59.34	59.95	0.2414
-10.00	0.00153	104.7	105.3	0.4172
0.0	0.3122	1291	1416	5.252
10.00	0.327	1311	1442	5.345
20.00	0.3412	1330	1467	5.43
30.00	0.3551	1349	1491	5.511
40.00	0.3688	1367	1515	5.588
50.00	0.3822	1385	1538	5.662
60.00	0.3955	1403	1561	5.732
70.00	0.4086	1421	1584	5.801
80.00	0.4216	1439	1607	5.867
90.00	0.4345	1456	1630	5.931
100.0	0.4473	1474	1653	5.994
110.0	0.4601	1492	1676	6.055
120.0	0.4728	1511	1700	6.115
140.0	0.4981	1547	1746	6.231
150.0	0.5107	1566	1770	6.287
160.0	0.5232	1584	1794	6.343
170.0	0.5358	1603	1818	6.397
180.0	0.5483	1622	1842	6.451
190.0	0.5607	1642	1866	6.504
200.0	0.5732	1661	1890	6.556

R717	$p =$	0.6	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.85	-72.99	-0.3185
-40.00	0.00145	-30.01	-29.14	-0.1263
-30.00	0.00147	14.34	15.23	0.06003
-20.00	0.0015	59.2	60.1	0.2409
-10.00	0.00153	104.5	105.5	0.4166
0.0	0.00157	150.4	151.3	0.5877
10.00	0.2111	1298	1425	5.099
20.00	0.2215	1319	1452	5.194
30.00	0.2315	1339	1478	5.281
40.00	0.2411	1359	1503	5.363
50.00	0.2505	1378	1528	5.441
60.00	0.2598	1396	1552	5.515
70.00	0.2689	1415	1576	5.585
80.00	0.2778	1433	1600	5.654
90.00	0.2867	1452	1624	5.72
100.0	0.2955	1470	1647	5.784
110.0	0.3042	1488	1671	5.846
120.0	0.3128	1507	1694	5.907
140.0	0.33	1544	1742	6.025
150.0	0.3385	1563	1766	6.082
160.0	0.347	1582	1790	6.138
170.0	0.3555	1601	1814	6.193
180.0	0.3639	1620	1838	6.247
190.0	0.3723	1639	1863	6.3
200.0	0.3807	1659	1887	6.353

R717	$p =$	0.8	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-73.95	-72.81	-0.319
-40.00	0.00145	-30.13	-28.97	-0.1268
-30.00	0.00147	14.21	15.39	0.05948
-20.00	0.0015	59.05	60.25	0.2403
-10.00	0.00153	104.4	105.6	0.416
0.0	0.00157	150.2	151.5	0.587
10.00	0.0016	196.6	197.9	0.754
20.00	0.1614	1307	1436	5.011
30.00	0.1694	1329	1465	5.107
40.00	0.1772	1350	1492	5.194
50.00	0.1846	1370	1518	5.276
60.00	0.1919	1390	1543	5.353
70.00	0.1989	1409	1568	5.427
80.00	0.2059	1428	1593	5.498
90.00	0.2127	1447	1617	5.565
100.0	0.2195	1465	1641	5.631
110.0	0.2262	1484	1665	5.695
120.0	0.2328	1503	1689	5.757
140.0	0.2459	1541	1737	5.876
150.0	0.2524	1560	1761	5.934
160.0	0.2589	1579	1786	5.991
170.0	0.2653	1598	1810	6.046
180.0	0.2717	1617	1835	6.101
190.0	0.2781	1637	1859	6.155
200.0	0.2844	1656	1884	6.208

R717	$p =$	1	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-74.06	-72.64	-0.3195
-40.00	0.00145	-30.25	-28.8	-0.1273
-30.00	0.00147	14.08	15.55	0.05894
-20.00	0.0015	58.9	60.41	0.2397
-10.00	0.00153	104.2	105.7	0.4154
0.0	0.00157	150	151.6	0.5864
10.00	0.0016	196.4	198	0.7533
20.00	0.00164	243.4	245.1	0.9166
30.00	0.132	1318	1450	4.96
40.00	0.1387	1341	1479	5.055
50.00	0.145	1362	1507	5.142
60.00	0.151	1383	1534	5.223
70.00	0.1569	1403	1560	5.3
80.00	0.1627	1422	1585	5.372
90.00	0.1683	1442	1610	5.442
100.0	0.1739	1461	1635	5.51
110.0	0.1794	1480	1659	5.575
120.0	0.1848	1499	1684	5.638
130.0	0.1901	1518	1708	5.699
140.0	0.1955	1537	1733	5.759
150.0	0.2007	1556	1757	5.818
160.0	0.206	1576	1782	5.875
170.0	0.2112	1595	1806	5.931
180.0	0.2164	1615	1831	5.986
190.0	0.2215	1634	1856	6.04
200.0	0.2267	1654	1881	6.094

R717	$p =$	2	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-74.59	-71.74	-0.3218
-40.00	0.00145	-30.84	-27.94	-0.1299
-30.00	0.00147	13.42	16.37	0.05623
-20.00	0.0015	58.17	61.17	0.2368
-10.00	0.00153	103.4	106.5	0.4122
0.0	0.00156	149.1	152.2	0.583
10.00	0.0016	195.4	198.6	0.7496
20.00	0.00164	242.3	245.6	0.9126
30.00	0.00168	289.9	293.3	1.073
40.00	0.00172	338.5	342	1.231
50.00	0.06473	1315	1445	4.652
60.00	0.06875	1343	1480	4.761
70.00	0.07246	1368	1513	4.858
80.00	0.07595	1392	1544	4.946
90.00	0.07928	1414	1573	5.028
100.0	0.08248	1436	1601	5.104
110.0	0.08558	1458	1629	5.177
120.0	0.08861	1479	1656	5.247
130.0	0.09157	1499	1682	5.313
140.0	0.09447	1520	1709	5.378
150.0	0.09733	1540	1735	5.44
160.0	0.1002	1561	1761	5.501
170.0	0.1029	1581	1787	5.56
180.0	0.1057	1601	1813	5.618
190.0	0.1084	1622	1839	5.675
200.0	0.1111	1642	1864	5.73

R717	$p =$	4	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-75.63	-69.95	-0.3265
-40.00	0.00145	-32	-26.22	-0.1349
-30.00	0.00147	12.12	18.01	0.05086
-20.00	0.0015	56.72	62.72	0.2311
-10.00	0.00153	101.8	107.9	0.4061
0.0	0.00156	147.3	153.6	0.5764
10.00	0.00159	193.4	199.7	0.7424
20.00	0.00163	240	246.5	0.9048
30.00	0.00167	287.3	294	1.064
40.00	0.00172	335.5	342.4	1.221
50.00	0.00177	384.8	391.8	1.376
60.00	0.00183	435.5	442.8	1.532
70.00	0.0019	488.2	495.8	1.688
80.00	0.03117	1311	1436	4.364
90.00	0.03379	1347	1482	4.493
100.0	0.03609	1378	1522	4.602
110.0	0.03818	1406	1559	4.699
120.0	0.04013	1432	1593	4.787
130.0	0.04198	1458	1625	4.869
140.0	0.04374	1482	1657	4.945
150.0	0.04544	1505	1687	5.017
160.0	0.04709	1528	1716	5.086
170.0	0.04869	1551	1745	5.153
180.0	0.05026	1573	1774	5.217
190.0	0.05179	1595	1802	5.278
200.0	0.0533	1617	1831	5.338

R717	$p =$	6	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-76.66	-68.14	-0.3312
-40.00	0.00144	-33.15	-24.49	-0.1399
-30.00	0.00147	10.84	19.66	0.04555
-20.00	0.0015	55.3	64.28	0.2254
-10.00	0.00153	100.2	109.4	0.4
0.0	0.00156	145.5	154.9	0.5698
10.00	0.00159	191.4	200.9	0.7353
20.00	0.00163	237.8	247.5	0.8971
30.00	0.00167	284.8	294.8	1.056
40.00	0.00171	332.6	342.8	1.212
50.00	0.00176	381.4	391.9	1.366
60.00	0.00182	431.5	442.3	1.519
70.00	0.00188	483.3	494.6	1.674
80.00	0.00196	537.6	549.3	1.831
90.00	0.00206	595.6	607.9	1.995
100.0	0.01938	1292	1408	4.153
110.0	0.02161	1338	1468	4.31
120.0	0.02346	1375	1516	4.434
130.0	0.02508	1408	1558	4.541
140.0	0.02656	1438	1597	4.636
150.0	0.02794	1465	1633	4.722
160.0	0.02924	1492	1668	4.803
170.0	0.03049	1518	1701	4.878
180.0	0.03168	1543	1733	4.95
190.0	0.03284	1567	1764	5.018
200.0	0.03396	1591	1795	5.084

R717	$p =$	8	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00142	-77.68	-66.34	-0.3358
-40.00	0.00144	-34.29	-22.76	-0.1448
-30.00	0.00147	9.579	21.31	0.04029
-20.00	0.00149	53.89	65.84	0.2198
-10.00	0.00152	98.64	110.8	0.394
0.0	0.00155	143.8	156.2	0.5634
10.00	0.00159	189.4	202.1	0.7284
20.00	0.00162	235.6	248.6	0.8895
30.00	0.00166	282.3	295.6	1.047
40.00	0.0017	329.7	343.4	1.202
50.00	0.00175	378.1	392.1	1.356
60.00	0.00181	427.6	442.1	1.508
70.00	0.00187	478.6	493.6	1.66
80.00	0.00194	531.8	547.3	1.814
90.00	0.00203	587.9	604.2	1.973
100.0	0.00215	648.9	666.1	2.141
110.0	0.00233	719.3	737.9	2.331
120.0	0.01432	1293	1407	4.064
130.0	0.01617	1344	1473	4.229
140.0	0.01767	1384	1525	4.358
150.0	0.01899	1419	1571	4.467
160.0	0.02018	1451	1613	4.564
170.0	0.02128	1481	1651	4.652
180.0	0.02232	1509	1688	4.733
190.0	0.0233	1536	1723	4.81
200.0	0.02425	1563	1757	4.882

**R134a –  
Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della temperatura**

Temp.	Press.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
T [C]	p [MPa]	$v_f$ [m³/kg]	$v_g$ [m³/kg]	$u_f$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_f$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
-50.0	0.02945	0.00069	0.6062	-30.16	184	-30.14	201.8	-0.128	0.9115
-47.5	0.03401	0.00069	0.5298	-27.06	185.4	-27.03	203.4	-0.1142	0.9071
-45.0	0.03912	0.0007	0.4647	-23.95	186.8	-23.92	205	-0.1005	0.9029
-42.5	0.04483	0.0007	0.409	-20.83	188.3	-20.8	206.6	-0.08693	0.899
-40.0	0.05121	0.00071	0.3611	-17.7	189.7	-17.67	208.2	-0.07344	0.8953
-37.5	0.05829	0.00071	0.3198	-14.56	191.1	-14.52	209.8	-0.06004	0.8918
-35.0	0.06614	0.00071	0.284	-11.41	192.6	-11.37	211.4	-0.04675	0.8885
-32.5	0.07482	0.00072	0.253	-8.251	194	-8.198	212.9	-0.03354	0.8854
-30.0	0.08438	0.00072	0.2259	-5.079	195.4	-5.018	214.5	-0.02042	0.8824
-27.5	0.09488	0.00072	0.2023	-1.895	196.9	-1.826	216.1	-0.00739	0.8797
-25.0	0.1064	0.00073	0.1816	1.3	198.3	1.378	217.6	0.00555	0.877
-22.5	0.119	0.00073	0.1634	4.508	199.7	4.595	219.2	0.01841	0.8746
-20.0	0.1327	0.00074	0.1474	7.728	201.2	7.826	220.7	0.0312	0.8723
-17.5	0.1477	0.00074	0.1332	10.96	202.6	11.07	222.3	0.04391	0.8701
-15.0	0.1639	0.00074	0.1207	14.21	204	14.33	223.8	0.05654	0.868
-12.5	0.1816	0.00075	0.1095	17.46	205.5	17.6	225.3	0.0691	0.8661
-10.0	0.2006	0.00075	0.09959	20.74	206.9	20.89	226.9	0.0816	0.8643
-7.5	0.2212	0.00076	0.09073	24.02	208.3	24.19	228.4	0.09403	0.8626
-5.0	0.2433	0.00076	0.0828	27.32	209.7	27.51	229.8	0.1064	0.861
-2.5	0.2672	0.00077	0.07569	30.63	211.1	30.84	231.3	0.1187	0.8595
0.0	0.2928	0.00077	0.06931	33.96	212.5	34.19	232.8	0.131	0.858
2.5	0.3203	0.00078	0.06356	37.31	213.9	37.56	234.2	0.1431	0.8567
5.0	0.3497	0.00078	0.05837	40.67	215.3	40.94	235.7	0.1553	0.8554
7.5	0.3811	0.00079	0.05369	44.04	216.6	44.35	237.1	0.1674	0.8542
10.0	0.4146	0.00079	0.04944	47.44	218	47.77	238.5	0.1794	0.8531
12.5	0.4503	0.0008	0.04559	50.85	219.4	51.21	239.9	0.1914	0.852
15.0	0.4884	0.0008	0.04209	54.28	220.7	54.67	241.3	0.2034	0.8509
17.5	0.5288	0.00081	0.0389	57.72	222	58.15	242.6	0.2153	0.8499
20.0	0.5717	0.00082	0.036	61.19	223.4	61.66	243.9	0.2272	0.849
22.5	0.6172	0.00082	0.03334	64.68	224.7	65.18	245.2	0.239	0.8481
25.0	0.6654	0.00083	0.03091	68.18	226	68.74	246.5	0.2509	0.8472
27.5	0.7163	0.00084	0.02869	71.71	227.2	72.31	247.8	0.2627	0.8463
30.0	0.7702	0.00084	0.02664	75.26	228.5	75.91	249	0.2745	0.8454
32.5	0.827	0.00085	0.02476	78.84	229.7	79.54	250.2	0.2862	0.8446
35.0	0.887	0.00086	0.02303	82.44	230.9	83.2	251.4	0.298	0.8437
37.5	0.9501	0.00086	0.02144	86.06	232.1	86.88	252.5	0.3097	0.8429
40.0	1.017	0.00087	0.01997	89.71	233.3	90.6	253.6	0.3214	0.842
42.5	1.086	0.00088	0.0186	93.39	234.5	94.35	254.7	0.3332	0.8411
45.0	1.16	0.00089	0.01734	97.1	235.6	98.13	255.7	0.3449	0.8402
47.5	1.237	0.0009	0.01617	100.8	236.7	102	256.7	0.3566	0.8392
50.0	1.318	0.00091	0.01509	104.6	237.7	105.8	257.6	0.3684	0.8382
52.5	1.403	0.00092	0.01408	108.4	238.8	109.7	258.5	0.3802	0.8371
55.0	1.492	0.00093	0.01314	112.3	239.7	113.7	259.3	0.392	0.836
57.5	1.584	0.00094	0.01226	116.2	240.7	117.7	260.1	0.4039	0.8347
60.0	1.682	0.00095	0.01144	120.1	241.6	121.7	260.8	0.4158	0.8334
62.5	1.784	0.00096	0.01068	124.1	242.4	125.8	261.5	0.4277	0.8319
65.0	1.89	0.00097	0.00996	128.1	243.2	130	262	0.4398	0.8303
67.5	2.001	0.00099	0.00929	132.2	243.9	134.2	262.5	0.4519	0.8285
70.0	2.117	0.001	0.00865	136.3	244.5	138.5	262.8	0.4641	0.8266
72.5	2.238	0.00102	0.00806	140.6	245.1	142.8	263.1	0.4765	0.8244
75.0	2.364	0.00104	0.00749	144.9	245.5	147.3	263.2	0.489	0.8219
77.5	2.496	0.00106	0.00696	149.3	245.8	151.9	263.2	0.5017	0.8191
80.0	2.633	0.00108	0.00645	153.7	246	156.6	263	0.5146	0.8159
82.5	2.776	0.0011	0.00596	158.4	246	161.4	262.6	0.5278	0.8123
85.0	2.926	0.00113	0.0055	163.1	245.9	166.4	261.9	0.5413	0.8081
87.5	3.082	0.00116	0.00505	168.1	245.4	171.6	261	0.5553	0.8031
90.0	3.244	0.00119	0.00461	173.2	244.6	177.1	259.6	0.57	0.7971
92.5	3.414	0.00124	0.00418	178.8	243.4	183	257.7	0.5855	0.7897
95.0	3.591	0.00129	0.00374	184.8	241.4	189.4	254.9	0.6025	0.7802
97.5	3.777	0.00138	0.00328	191.7	238.1	196.9	250.5	0.6221	0.7667
100.0	3.972	0.00154	0.00268	201.4	231.2	207.5	241.9	0.6497	0.7419

**R134a –  
Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della pressione**

Press.	Temp.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
$p$ [MPa]	$T$ [C]	$v_f$ [m³/kg]	$v_g$ [m³/kg]	$u_f$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_f$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
0.03	-49.68	0.00069	0.5958	-29.76	184.2	-29.74	202	-0.1263	0.911
0.04	-44.60	0.0007	0.4551	-23.45	187.1	-23.42	205.3	-0.09832	0.9023
0.05	-40.45	0.0007	0.3693	-18.27	189.4	-18.24	207.9	-0.07588	0.8959
0.06	-36.93	0.00071	0.3112	-13.85	191.5	-13.81	210.1	-0.05703	0.891
0.07	-33.86	0.00071	0.2693	-9.97	193.2	-9.92	212.1	-0.0407	0.887
0.08	-31.12	0.00072	0.2376	-6.496	194.8	-6.438	213.8	-0.02626	0.8837
0.09	-28.63	0.00072	0.2126	-3.34	196.2	-3.275	215.4	-0.01329	0.8809
0.10	-26.36	0.00073	0.1926	-0.4409	197.5	-0.3683	216.8	-0.00149	0.8784
0.11	-24.26	0.00073	0.176	2.245	198.7	2.326	218.1	0.00935	0.8763
0.12	-22.31	0.00073	0.1621	4.753	199.9	4.841	219.3	0.01939	0.8744
0.13	-20.48	0.00074	0.1503	7.108	200.9	7.203	220.4	0.02874	0.8727
0.14	-18.76	0.00074	0.1401	9.33	201.9	9.433	221.5	0.03751	0.8712
0.15	-17.13	0.00074	0.1313	11.44	202.8	11.55	222.5	0.04577	0.8698
0.16	-15.59	0.00074	0.1235	13.44	203.7	13.56	223.5	0.05358	0.8685
0.18	-12.71	0.00075	0.1104	17.19	205.3	17.32	225.2	0.06804	0.8663
0.20	-10.08	0.00075	0.09988	20.64	206.8	20.79	226.8	0.08122	0.8644
0.22	-7.64	0.00076	0.09119	23.84	208.2	24.01	228.3	0.09335	0.8627
0.24	-5.37	0.00076	0.08391	26.84	209.5	27.02	229.6	0.1046	0.8612
0.26	-3.24	0.00077	0.0777	29.66	210.7	29.86	230.9	0.1151	0.8599
0.28	-1.23	0.00077	0.07236	32.33	211.8	32.54	232.1	0.1249	0.8587
0.30	0.67	0.00077	0.0677	34.86	212.9	35.09	233.2	0.1342	0.8577
0.32	2.48	0.00078	0.06361	37.28	213.9	37.53	234.2	0.143	0.8567
0.34	4.20	0.00078	0.05998	39.59	214.8	39.85	235.2	0.1514	0.8558
0.36	5.84	0.00078	0.05674	41.8	215.7	42.08	236.2	0.1594	0.855
0.40	8.93	0.00079	0.05121	45.98	217.4	46.3	237.9	0.1743	0.8535
0.45	12.48	0.0008	0.04562	50.82	219.4	51.18	239.9	0.1913	0.852
0.50	15.73	0.00081	0.04112	55.29	221.1	55.69	241.7	0.2069	0.8506
0.55	18.75	0.00081	0.03741	59.46	222.7	59.91	243.3	0.2213	0.8495
0.60	21.57	0.00082	0.0343	63.38	224.2	63.87	244.8	0.2346	0.8484
0.65	24.22	0.00083	0.03165	67.08	225.6	67.62	246.1	0.2472	0.8475
0.70	26.71	0.00083	0.02937	70.6	226.8	71.18	247.4	0.259	0.8466
0.80	31.33	0.00085	0.02562	77.16	229.1	77.84	249.6	0.2807	0.845
0.90	35.53	0.00086	0.02269	83.2	231.2	83.97	251.6	0.3004	0.8436
1.00	39.39	0.00087	0.02032	88.82	233	89.69	253.4	0.3186	0.8422
1.10	42.97	0.00088	0.01836	94.09	234.7	95.06	254.9	0.3354	0.8409
1.20	46.31	0.00089	0.01672	99.06	236.2	100.1	256.2	0.3511	0.8397
1.30	49.46	0.00091	0.01532	103.8	237.5	105	257.4	0.3658	0.8384
1.40	52.42	0.00092	0.01411	108.3	238.7	109.6	258.5	0.3798	0.8372
1.50	55.23	0.00093	0.01306	112.6	239.8	114	259.4	0.3931	0.8359
1.60	57.91	0.00094	0.01213	116.8	240.8	118.3	260.2	0.4058	0.8345
1.70	60.46	0.00095	0.0113	120.8	241.7	122.4	260.9	0.4179	0.8331
1.80	62.90	0.00096	0.01056	124.7	242.5	126.4	261.5	0.4296	0.8317
1.90	65.23	0.00098	0.0099	128.5	243.3	130.3	262.1	0.4409	0.8301
2.00	67.48	0.00099	0.00929	132.2	243.9	134.1	262.5	0.4518	0.8285
2.10	69.64	0.001	0.00874	135.8	244.4	137.9	262.8	0.4624	0.8268
2.20	71.73	0.00101	0.00824	139.3	244.9	141.5	263	0.4727	0.8251
2.30	73.74	0.00103	0.00777	142.7	245.3	145.1	263.2	0.4827	0.8232
2.40	75.69	0.00104	0.00734	146.1	245.6	148.6	263.2	0.4925	0.8212
2.50	77.58	0.00106	0.00694	149.4	245.8	152	263.2	0.5021	0.819
2.60	79.41	0.00107	0.00657	152.7	246	155.5	263.1	0.5115	0.8167
2.70	81.18	0.00109	0.00622	155.9	246.1	158.8	262.8	0.5208	0.8143
2.80	82.90	0.00111	0.00589	159.1	246	162.2	262.5	0.5299	0.8117
2.90	84.58	0.00112	0.00558	162.3	245.9	165.6	262.1	0.539	0.8088
3.00	86.20	0.00114	0.00528	165.5	245.7	168.9	261.5	0.548	0.8058
3.10	87.79	0.00116	0.005	168.6	245.3	172.2	260.8	0.557	0.8025
3.20	89.33	0.00118	0.00473	171.8	244.9	175.6	260	0.566	0.7988
3.30	90.83	0.00121	0.00447	175	244.3	179	259	0.5751	0.7949
3.40	92.30	0.00123	0.00422	178.3	243.5	182.5	257.8	0.5842	0.7904
3.50	93.73	0.00126	0.00397	181.6	242.5	186.1	256.4	0.5936	0.7854
3.60	95.12	0.0013	0.00372	185.1	241.3	189.8	254.7	0.6034	0.7797
3.80	97.80	0.00139	0.00321	192.7	237.6	198	249.8	0.6248	0.7646
4.00	100.3	0.00158	0.00256	203.4	229.3	209.8	239.6	0.6557	0.7355

**R134a – Liquido compresso e vapore surriscaldato.**

R134a	$p =$	0.03	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.16	-30.14	-0.128
-40.0	0.6235	190.4	209.1	0.9417
-30.0	0.6519	196.9	216.5	0.9728
-20.0	0.68	203.6	224	1.003
-10.0	0.7079	210.5	231.7	1.033
0.0	0.7358	217.5	239.6	1.062
10.0	0.7635	224.7	247.6	1.091
20.0	0.7912	232.1	255.8	1.12
30.0	0.8188	239.7	264.2	1.148
40.0	0.8463	247.4	272.8	1.176
50.0	0.8738	255.3	281.5	1.203
60.0	0.9013	263.4	290.4	1.23
70.0	0.9287	271.6	299.5	1.257
80.0	0.9562	280	308.7	1.283
90.0	0.9835	288.6	318.1	1.31
110.0	1.038	306.2	337.3	1.361
120.0	1.066	315.2	347.2	1.387
130.0	1.093	324.5	357.2	1.412
140.0	1.12	333.8	367.4	1.437
150.0	1.147	343.4	377.8	1.462
160.0	1.175	353	388.3	1.486
170.0	1.202	362.9	398.9	1.511
180.0	1.229	372.9	409.7	1.535
190.0	1.257	383	420.7	1.559
200.0	1.284	393.3	431.8	1.582

R134a	$p =$	0.04	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.16	-30.13	-0.1281
-40.0	0.4651	190.1	208.7	0.917
-30.0	0.4867	196.6	216.1	0.9483
-20.0	0.5081	203.4	223.7	0.9788
-10.0	0.5292	210.3	231.4	1.009
0.0	0.5503	217.3	239.3	1.038
10.0	0.5712	224.6	247.4	1.067
20.0	0.5921	232	255.7	1.096
30.0	0.6129	239.5	264.1	1.124
40.0	0.6337	247.3	272.6	1.152
50.0	0.6544	255.2	281.4	1.179
60.0	0.6751	263.3	290.3	1.206
70.0	0.6957	271.5	299.3	1.233
80.0	0.7163	279.9	308.6	1.26
90.0	0.7369	288.5	318	1.286
110.0	0.7781	306.1	337.2	1.338
120.0	0.7986	315.2	347.1	1.363
130.0	0.8191	324.4	357.2	1.388
140.0	0.8396	333.8	367.4	1.413
150.0	0.8601	343.3	377.7	1.438
160.0	0.8806	353	388.2	1.463
170.0	0.9011	362.8	398.9	1.487
180.0	0.9216	372.8	409.7	1.511
190.0	0.942	383	420.7	1.535
200.0	0.9625	393.3	431.8	1.559

R134a	$p =$	0.05	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.16	-30.13	-0.1281
-40.0	0.3701	189.7	208.2	0.8974
-30.0	0.3876	196.4	215.8	0.929
-20.0	0.4049	203.2	223.4	0.9598
-10.0	0.422	210.1	231.2	0.9899
0.0	0.439	217.2	239.1	1.019
10.0	0.4559	224.4	247.2	1.049
20.0	0.4727	231.8	255.5	1.077
30.0	0.4894	239.4	263.9	1.105
40.0	0.5061	247.2	272.5	1.133
50.0	0.5227	255.1	281.2	1.161
60.0	0.5393	263.2	290.1	1.188
70.0	0.5559	271.4	299.2	1.215
80.0	0.5724	279.8	308.5	1.241
90.0	0.589	288.4	317.9	1.268
110.0	0.6219	306.1	337.2	1.319
120.0	0.6384	315.1	347	1.345
130.0	0.6549	324.3	357.1	1.37
140.0	0.6713	333.7	367.3	1.395
150.0	0.6877	343.3	377.6	1.42
160.0	0.7041	352.9	388.1	1.444
170.0	0.7205	362.8	398.8	1.469
180.0	0.7369	372.8	409.6	1.493
190.0	0.7533	382.9	420.6	1.517
200.0	0.7697	393.2	431.7	1.541

R134a	$p =$	0.06	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.17	-30.12	-0.1281
-40.0	0.00071	-17.71	-17.66	-0.07345
-30.0	0.3215	196.1	215.4	0.913
-20.0	0.3361	202.9	223.1	0.944
-10.0	0.3505	209.9	230.9	0.9743
0.0	0.3648	217	238.9	1.004
10.0	0.3789	224.3	247	1.033
20.0	0.393	231.7	255.3	1.062
30.0	0.4071	239.3	263.7	1.09
40.0	0.421	247	272.3	1.118
50.0	0.4349	255	281.1	1.146
60.0	0.4488	263.1	290	1.173
70.0	0.4627	271.3	299.1	1.2
80.0	0.4765	279.7	308.3	1.226
90.0	0.4903	288.3	317.8	1.253
110.0	0.5179	306	337.1	1.304
120.0	0.5316	315.1	347	1.33
130.0	0.5453	324.3	357	1.355
140.0	0.5591	333.7	367.2	1.38
150.0	0.5728	343.2	377.6	1.405
160.0	0.5865	352.9	388.1	1.429
170.0	0.6002	362.7	398.7	1.454
180.0	0.6139	372.7	409.6	1.478
190.0	0.6275	382.9	420.5	1.502
200.0	0.6412	393.2	431.7	1.526

<b>R134a</b>	<b><math>p =</math></b>	<b>0.08</b>	<b>[MPa]</b>	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.17	-30.12	-0.1281
-40.0	0.00071	-17.71	-17.66	-0.07348
-30.0	0.2388	195.6	214.7	0.8873
-20.0	0.2501	202.5	222.5	0.9187
-10.0	0.2611	209.5	230.4	0.9493
0.0	0.272	216.6	238.4	0.9793
10.0	0.2828	223.9	246.6	1.009
20.0	0.2935	231.4	254.9	1.038
30.0	0.3041	239	263.4	1.066
40.0	0.3147	246.8	272	1.094
50.0	0.3252	254.8	280.8	1.122
60.0	0.3357	262.9	289.7	1.149
70.0	0.3462	271.1	298.8	1.176
80.0	0.3566	279.6	308.1	1.202
90.0	0.367	288.2	317.5	1.229
110.0	0.3878	305.9	336.9	1.281
120.0	0.3981	314.9	346.8	1.306
130.0	0.4085	324.2	356.8	1.331
140.0	0.4188	333.5	367.1	1.356
150.0	0.4291	343.1	377.4	1.381
160.0	0.4394	352.8	387.9	1.406
170.0	0.4497	362.6	398.6	1.43
180.0	0.46	372.6	409.4	1.454
190.0	0.4703	382.8	420.4	1.478
200.0	0.4806	393.1	431.5	1.502

<b>R134a</b>	<b><math>p =</math></b>	<b>0.1</b>	<b>[MPa]</b>	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.18	-30.11	-0.1281
-40.0	0.00071	-17.72	-17.65	-0.07351
-30.0	0.00072	-5.085	-5.013	-0.02045
-20.0	0.1984	202	221.8	0.8986
-10.0	0.2074	209.1	229.8	0.9296
0.0	0.2163	216.3	237.9	0.9598
10.0	0.2251	223.6	246.1	0.9893
20.0	0.2337	231.1	254.5	1.018
30.0	0.2423	238.8	263	1.047
40.0	0.2509	246.6	271.7	1.075
50.0	0.2594	254.6	280.5	1.103
60.0	0.2678	262.7	289.5	1.13
70.0	0.2763	271	298.6	1.157
80.0	0.2847	279.4	307.9	1.184
90.0	0.293	288	317.3	1.21
110.0	0.3097	305.7	336.7	1.262
120.0	0.318	314.8	346.6	1.288
130.0	0.3263	324	356.7	1.313
140.0	0.3346	333.4	366.9	1.338
150.0	0.3429	343	377.3	1.363
160.0	0.3512	352.7	387.8	1.387
170.0	0.3594	362.5	398.5	1.412
180.0	0.3677	372.6	409.3	1.436
190.0	0.3759	382.7	420.3	1.46
200.0	0.3842	393	431.4	1.484

<b>R134a</b>	<b><math>p =</math></b>	<b>0.15</b>	<b>[MPa]</b>	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.19	-30.09	-0.1282
-40.0	0.00071	-17.74	-17.63	-0.07358
-30.0	0.00072	-5.104	-4.996	-0.02052
-20.0	0.00074	7.721	7.831	0.03117
-10.0	0.1358	208	228.4	0.8925
0.0	0.142	215.4	236.7	0.9234
10.0	0.1481	222.8	245	0.9534
20.0	0.1541	230.4	253.5	0.9829
30.0	0.16	238.1	262.1	1.012
40.0	0.1658	246	270.9	1.04
50.0	0.1716	254	279.8	1.068
60.0	0.1773	262.2	288.8	1.096
70.0	0.183	270.5	298	1.123
80.0	0.1887	279	307.3	1.15
90.0	0.1944	287.6	316.8	1.176
110.0	0.2056	305.4	336.2	1.228
120.0	0.2112	314.5	346.2	1.254
130.0	0.2168	323.7	356.3	1.279
140.0	0.2224	333.2	366.5	1.304
150.0	0.228	342.7	376.9	1.329
160.0	0.2335	352.4	387.5	1.354
170.0	0.2391	362.3	398.2	1.378
180.0	0.2446	372.3	409	1.402
190.0	0.2501	382.5	420	1.426
200.0	0.2556	392.8	431.2	1.45

<b>R134a</b>	<b><math>p =</math></b>	<b>0.20</b>	<b>[MPa]</b>	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00069	-30.21	-30.07	-0.1283
-40.0	0.00071	-17.75	-17.61	-0.07365
-30.0	0.00072	-5.122	-4.978	-0.0206
-20.0	0.00074	7.699	7.847	0.03108
-10.0	0.09991	206.9	226.9	0.8646
0.0	0.1048	214.4	235.4	0.8964
10.0	0.1096	222	243.9	0.927
20.0	0.1142	229.7	252.5	0.9569
30.0	0.1187	237.5	261.2	0.9861
40.0	0.1232	245.4	270.1	1.015
50.0	0.1277	253.5	279	1.043
60.0	0.1321	261.7	288.1	1.071
70.0	0.1364	270.1	297.4	1.098
80.0	0.1407	278.6	306.7	1.125
90.0	0.145	287.3	316.3	1.152
110.0	0.1536	305	335.8	1.204
120.0	0.1578	314.2	345.7	1.229
130.0	0.1621	323.4	355.9	1.255
140.0	0.1663	332.9	366.1	1.28
150.0	0.1705	342.5	376.6	1.305
160.0	0.1747	352.2	387.1	1.33
170.0	0.1789	362.1	397.8	1.354
180.0	0.183	372.1	408.7	1.378
190.0	0.1872	382.3	419.7	1.402
200.0	0.1914	392.6	430.9	1.426

R134a	$p =$	0.30	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.24	-30.03	-0.1284
-40.00	0.00071	-17.79	-17.57	-0.0738
-30.00	0.00072	-5.16	-4.944	-0.02076
-20.00	0.00074	7.657	7.878	0.03092
-10.00	0.00075	20.69	20.91	0.08142
0.0	0.00077	33.96	34.19	0.1309
10.00	0.07093	220.2	241.5	0.8876
20.00	0.07425	228.2	250.4	0.9185
30.00	0.07748	236.1	259.4	0.9485
40.00	0.08063	244.2	268.4	0.9778
50.00	0.08372	252.4	277.5	1.006
60.00	0.08677	260.7	286.7	1.035
70.00	0.08978	269.1	296.1	1.062
80.00	0.09276	277.7	305.6	1.089
90.00	0.0957	286.5	315.2	1.116
110.0	0.1015	304.4	334.8	1.169
120.0	0.1044	313.5	344.9	1.195
130.0	0.1073	322.8	355	1.22
140.0	0.1102	332.3	365.4	1.246
150.0	0.113	341.9	375.8	1.271
160.0	0.1158	351.7	386.4	1.295
170.0	0.1187	361.6	397.2	1.32
180.0	0.1215	371.6	408.1	1.344
190.0	0.1243	381.8	419.1	1.368
200.0	0.1271	392.2	430.3	1.392

R134a	$p =$	0.35	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.25	-30.01	-0.1285
-40.00	0.00071	-17.8	-17.56	-0.07387
-30.00	0.00072	-5.179	-4.927	-0.02083
-20.00	0.00074	7.636	7.894	0.03084
-10.00	0.00075	20.66	20.93	0.08133
0.0	0.00077	33.93	34.2	0.1308
10.00	0.05985	219.3	240.3	0.8716
20.00	0.06281	227.3	249.3	0.9031
30.00	0.06567	235.4	258.4	0.9336
40.00	0.06844	243.6	267.5	0.9631
50.00	0.07116	251.8	276.7	0.9921
60.00	0.07382	260.2	286	1.02
70.00	0.07645	268.7	295.4	1.048
80.00	0.07904	277.3	305	1.076
90.00	0.0816	286.1	314.6	1.103
110.0	0.08666	304	334.3	1.155
120.0	0.08916	313.2	344.4	1.181
130.0	0.09165	322.5	354.6	1.207
140.0	0.09412	332	365	1.232
150.0	0.09659	341.7	375.5	1.257
160.0	0.09904	351.4	386.1	1.282
170.0	0.1015	361.4	396.9	1.307
180.0	0.1039	371.4	407.8	1.331
190.0	0.1063	381.6	418.9	1.355
200.0	0.1088	392	430.1	1.379

R134a	$p =$	0.40	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.27	-29.99	-0.1285
-40.00	0.0007	-17.82	-17.54	-0.07394
-30.00	0.00072	-5.197	-4.909	-0.02091
-20.00	0.00074	7.615	7.91	0.03075
-10.00	0.00075	20.64	20.94	0.08124
0.0	0.00077	33.91	34.21	0.1307
10.00	0.05151	218.3	238.9	0.8571
20.00	0.05421	226.5	248.2	0.8893
30.00	0.0568	234.7	257.4	0.9202
40.00	0.05929	242.9	266.6	0.9502
50.00	0.06172	251.2	275.9	0.9794
60.00	0.0641	259.7	285.3	1.008
70.00	0.06644	268.2	294.8	1.036
80.00	0.06875	276.9	304.4	1.063
90.00	0.07102	285.7	314.1	1.091
100.0	0.07327	294.6	323.9	1.117
110.0	0.07551	303.7	333.9	1.144
120.0	0.07772	312.9	344	1.17
130.0	0.07991	322.2	354.2	1.195
140.0	0.0821	331.7	364.6	1.221
150.0	0.08427	341.4	375.1	1.246
160.0	0.08643	351.2	385.7	1.271
170.0	0.08858	361.1	396.5	1.295
180.0	0.09072	371.2	407.5	1.32
190.0	0.09286	381.4	418.6	1.344
200.0	0.09499	391.8	429.8	1.368

R134a	$p =$	0.50	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.3	-29.95	-0.1287
-40.00	0.0007	-17.85	-17.5	-0.07408
-30.00	0.00072	-5.235	-4.875	-0.02106
-20.00	0.00074	7.573	7.941	0.03059
-10.00	0.00075	20.59	20.97	0.08106
0.0	0.00077	33.85	34.24	0.1305
10.00	0.00079	47.38	47.78	0.1792
20.00	0.04212	224.7	245.8	0.8649
30.00	0.04434	233.2	255.3	0.8969
40.00	0.04646	241.6	264.8	0.9276
50.00	0.0485	250.1	274.3	0.9574
60.00	0.05049	258.6	283.8	0.9865
70.00	0.05243	267.2	293.4	1.015
80.00	0.05433	276	303.1	1.043
90.00	0.05621	284.8	312.9	1.07
100.0	0.05805	293.8	322.9	1.097
110.0	0.05988	303	332.9	1.124
120.0	0.06169	312.2	343.1	1.15
130.0	0.06348	321.6	353.4	1.176
140.0	0.06526	331.2	363.8	1.201
150.0	0.06702	340.8	374.4	1.226
160.0	0.06878	350.7	385.1	1.251
170.0	0.07052	360.6	395.9	1.276
180.0	0.07226	370.7	406.9	1.301
190.0	0.07398	381	418	1.325
200.0	0.07571	391.4	429.2	1.349

R134a	$p =$	0.60	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.33	-29.91	-0.1288
-40.00	0.0007	-17.89	-17.46	-0.07423
-30.00	0.00072	-5.272	-4.84	-0.02122
-20.00	0.00074	7.532	7.973	0.03042
-10.00	0.00075	20.55	21	0.08088
0.0	0.00077	33.8	34.26	0.1303
10.00	0.00079	47.32	47.8	0.179
20.00	0.00082	61.17	61.66	0.2271
30.00	0.03598	231.6	253.2	0.8765
40.00	0.03787	240.2	262.9	0.9082
50.00	0.03966	248.8	272.6	0.9387
60.00	0.04139	257.5	282.3	0.9682
70.00	0.04307	266.2	292.1	0.9971
80.00	0.04471	275.1	301.9	1.025
90.00	0.04632	284	311.8	1.053
100.0	0.0479	293.1	321.8	1.08
110.0	0.04946	302.3	331.9	1.107
120.0	0.051	311.6	342.2	1.133
130.0	0.05252	321	352.5	1.159
140.0	0.05403	330.6	363	1.185
150.0	0.05552	340.3	373.6	1.21
160.0	0.05701	350.1	384.4	1.235
170.0	0.05848	360.1	395.2	1.26
180.0	0.05995	370.3	406.2	1.285
190.0	0.0614	380.5	417.4	1.309
200.0	0.06285	390.9	428.7	1.333

R134a	$p =$	0.80	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.39	-29.84	-0.1291
-40.00	0.0007	-17.95	-17.39	-0.07451
-30.00	0.00072	-5.346	-4.771	-0.02152
-20.00	0.00074	7.448	8.036	0.03009
-10.00	0.00075	20.45	21.05	0.08052
0.0	0.00077	33.69	34.31	0.1299
10.00	0.00079	47.2	47.83	0.1786
20.00	0.00082	61.02	61.68	0.2266
30.00	0.00084	75.24	75.91	0.2744
40.00	0.02704	237.2	258.8	0.8746
50.00	0.02855	246.2	269	0.9068
60.00	0.02997	255.2	279.1	0.9376
70.00	0.03134	264.1	289.2	0.9674
80.00	0.03266	273.2	299.3	0.9964
90.00	0.03394	282.3	309.4	1.025
100.0	0.03519	291.5	319.6	1.052
110.0	0.03642	300.8	329.9	1.08
120.0	0.03763	310.2	340.3	1.106
130.0	0.03881	319.7	350.8	1.133
140.0	0.03999	329.4	361.4	1.159
150.0	0.04114	339.2	372.1	1.184
160.0	0.04229	349.1	382.9	1.21
170.0	0.04343	359.1	393.9	1.235
180.0	0.04455	369.3	405	1.259
190.0	0.04567	379.6	416.2	1.284
200.0	0.04679	390.1	427.5	1.308

R134a	$p =$	1.00	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.45	-29.76	-0.1293
-40.00	0.0007	-18.02	-17.31	-0.0748
-30.00	0.00072	-5.42	-4.701	-0.02183
-20.00	0.00073	7.365	8.1	0.02976
-10.00	0.00075	20.36	21.11	0.08016
0.0	0.00077	33.58	34.35	0.1296
10.00	0.00079	47.07	47.87	0.1781
20.00	0.00081	60.88	61.69	0.2261
30.00	0.00084	75.06	75.91	0.2738
40.00	0.02041	233.6	254	0.8444
50.00	0.0218	243.3	265.1	0.8791
60.00	0.02307	252.7	275.7	0.9116
70.00	0.02426	261.9	286.2	0.9425
80.00	0.0254	271.2	296.6	0.9724
90.00	0.02649	280.5	307	1.001
100.0	0.02755	289.8	317.4	1.03
110.0	0.02858	299.3	327.9	1.057
120.0	0.02959	308.8	338.4	1.085
130.0	0.03058	318.4	349	1.111
140.0	0.03155	328.2	359.7	1.137
150.0	0.03251	338	370.6	1.163
160.0	0.03346	348	381.5	1.189
170.0	0.03439	358.1	392.5	1.214
180.0	0.03532	368.4	403.7	1.239
190.0	0.03623	378.7	415	1.264
200.0	0.03714	389.2	426.4	1.288

R134a	$p =$	1.50	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.6	-29.56	-0.13
-40.00	0.0007	-18.18	-17.13	-0.07551
-30.00	0.00072	-5.604	-4.527	-0.02259
-20.00	0.00073	7.159	8.26	0.02894
-10.00	0.00075	20.12	21.25	0.07927
0.0	0.00077	33.32	34.47	0.1286
10.00	0.00079	46.77	47.95	0.1771
20.00	0.00081	60.52	61.74	0.2249
30.00	0.00084	74.64	75.9	0.2724
40.00	0.00087	89.21	90.51	0.3198
50.00	0.00091	104.4	105.7	0.3677
60.00	0.01361	245.1	265.5	0.8543
70.00	0.01466	255.6	277.6	0.8899
80.00	0.01561	265.7	289.1	0.923
90.00	0.01648	275.6	300.3	0.9543
100.0	0.01731	285.4	311.4	0.9844
110.0	0.01809	295.3	322.4	1.014
120.0	0.01885	305.1	333.4	1.042
130.0	0.01958	315	344.4	1.07
140.0	0.02029	325	355.5	1.097
150.0	0.02099	335.1	366.6	1.123
160.0	0.02167	345.3	377.8	1.149
170.0	0.02234	355.6	389.1	1.175
180.0	0.023	365.9	400.4	1.201
190.0	0.02365	376.4	411.9	1.226
200.0	0.02429	387.1	423.5	1.25

R134a	p =	2.00	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.74	-29.37	-0.1307
-40.00	0.0007	-18.35	-16.94	-0.07622
-30.00	0.00072	-5.786	-4.351	-0.02334
-20.00	0.00073	6.955	8.421	0.02813
-10.00	0.00075	19.89	21.39	0.07839
0.0	0.00077	33.06	34.59	0.1276
10.00	0.00079	46.47	48.05	0.176
20.00	0.00081	60.17	61.8	0.2237
30.00	0.00084	74.23	75.9	0.271
40.00	0.00087	88.71	90.44	0.3182
50.00	0.0009	103.7	105.5	0.3657
60.00	0.00095	119.6	121.4	0.4141
70.00	0.00957	247.1	266.2	0.8396
80.00	0.01054	258.9	280	0.879
90.00	0.01136	269.8	292.6	0.9142
100.0	0.0121	280.4	304.6	0.947
110.0	0.01279	290.8	316.4	0.9781
120.0	0.01344	301.1	328	1.008
130.0	0.01405	311.4	339.5	1.037
140.0	0.01464	321.7	351	1.065
150.0	0.01521	332	362.4	1.092
160.0	0.01576	342.4	373.9	1.119
170.0	0.0163	352.9	385.5	1.146
180.0	0.01683	363.4	397.1	1.171
190.0	0.01735	374.1	408.8	1.197
200.0	0.01786	384.8	420.5	1.222

R134a	p =	2.50	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-30.89	-29.17	-0.1313
-40.00	0.0007	-18.51	-16.75	-0.07692
-30.00	0.00072	-5.967	-4.175	-0.02409
-20.00	0.00073	6.753	8.584	0.02733
-10.00	0.00075	19.67	21.54	0.07752
0.0	0.00077	32.8	34.72	0.1267
10.00	0.00079	46.17	48.14	0.1749
20.00	0.00081	59.83	61.86	0.2225
30.00	0.00083	73.82	75.91	0.2697
40.00	0.00086	88.22	90.38	0.3166
50.00	0.0009	103.1	105.4	0.3637
60.00	0.00094	118.8	121.1	0.4117
70.00	0.001	135.5	137.9	0.4615
80.00	0.00722	249.5	267.6	0.8314
90.00	0.00815	262.8	283.1	0.8749
100.0	0.0089	274.6	296.8	0.9121
110.0	0.00955	285.8	309.7	0.9461
120.0	0.01015	296.7	322.1	0.9781
130.0	0.0107	307.4	334.2	1.009
140.0	0.01123	318.1	346.2	1.038
150.0	0.01173	328.7	358.1	1.066
160.0	0.01221	339.4	369.9	1.094
170.0	0.01267	350.1	381.7	1.121
180.0	0.01313	360.8	393.6	1.147
190.0	0.01357	371.6	405.5	1.173
200.0	0.014	382.5	417.5	1.199

R134a	p =	3.00	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-31.04	-28.97	-0.132
-40.00	0.0007	-18.67	-16.56	-0.07762
-30.00	0.00072	-6.146	-3.997	-0.02484
-20.00	0.00073	6.552	8.748	0.02653
-10.00	0.00075	19.44	21.69	0.07665
0.0	0.00077	32.54	34.84	0.1257
10.00	0.00079	45.88	48.24	0.1739
20.00	0.00081	59.5	61.92	0.2214
30.00	0.00083	73.43	75.92	0.2683
40.00	0.00086	87.74	90.32	0.3151
50.00	0.00089	102.5	105.2	0.3619
60.00	0.00093	118	120.8	0.4093
70.00	0.00099	134.4	137.3	0.4583
80.00	0.00106	152.4	155.6	0.5108
90.00	0.00575	252.7	270	0.8292
100.0	0.00664	267.4	287.3	0.8762
110.0	0.00733	280	302	0.915
120.0	0.00792	291.8	315.5	0.9499
130.0	0.00845	303.1	328.5	0.9825
140.0	0.00894	314.2	341	1.013
150.0	0.0094	325.2	353.4	1.043
160.0	0.00983	336.2	365.7	1.072
170.0	0.01025	347.1	377.9	1.099
180.0	0.01065	358.1	390	1.127
190.0	0.01104	369.1	402.2	1.153
200.0	0.01142	380.1	414.4	1.179

R134a	p =	3.50	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00069	-31.18	-28.77	-0.1327
-40.00	0.0007	-18.83	-16.38	-0.07831
-30.00	0.00072	-6.324	-3.819	-0.02558
-20.00	0.00073	6.354	8.913	0.02573
-10.00	0.00075	19.22	21.84	0.0758
0.0	0.00077	32.29	34.97	0.1248
10.00	0.00078	45.6	48.34	0.1729
20.00	0.00081	59.17	61.99	0.2202
30.00	0.00083	73.04	75.95	0.267
40.00	0.00086	87.28	90.29	0.3136
50.00	0.00089	102	105.1	0.3601
60.00	0.00093	117.3	120.5	0.4071
70.00	0.00098	133.4	136.8	0.4553
80.00	0.00105	150.9	154.5	0.5062
90.00	0.00117	171.4	175.5	0.5647
100.0	0.00483	257.2	274.2	0.8334
110.0	0.00565	272.9	292.7	0.8823
120.0	0.00628	286.1	308	0.922
130.0	0.00681	298.3	322.1	0.9574
140.0	0.00728	310.1	335.5	0.9902
150.0	0.00772	321.5	348.5	1.021
160.0	0.00813	332.8	361.3	1.051
170.0	0.00851	344	373.8	1.08
180.0	0.00888	355.2	386.3	1.108
190.0	0.00924	366.4	398.8	1.135
200.0	0.00958	377.7	411.2	1.161

**R600a – Isobutano**

**Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della temperatura**

Temp.	Press.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
T [C]	p [MPa]	$v_f$ [m³/kg]	$v_g$ [m³/kg]	$u_f$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_f$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_f$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
-50	0.01651	0.00158	1.911	-82.8	285.1	-82.78	316.7	-0.3413	1.449
-45	0.02177	0.00159	1.477	-72.41	290.9	-72.37	323	-0.2953	1.438
-40	0.02832	0.0016	1.157	-61.91	296.7	-61.86	329.4	-0.2498	1.429
-35	0.03637	0.00162	0.9173	-51.3	302.5	-51.24	335.9	-0.2047	1.421
-30	0.04616	0.00163	0.7352	-40.58	308.5	-40.51	342.4	-0.1602	1.415
-25	0.05793	0.00164	0.5953	-29.75	314.5	-29.66	349	-0.1161	1.41
-20	0.07195	0.00166	0.4866	-18.81	320.5	-18.69	355.6	-0.07242	1.406
-15	0.08851	0.00167	0.4013	-7.741	326.7	-7.593	362.2	-0.02914	1.403
-10	0.1079	0.00169	0.3336	3.444	332.8	3.627	368.8	0.01378	1.402
-5	0.1304	0.00171	0.2794	14.75	339	14.98	375.5	0.05636	1.401
0	0.1564	0.00172	0.2357	26.19	345.3	26.46	382.2	0.09863	1.401
5	0.1862	0.00174	0.2001	37.76	351.6	38.08	388.9	0.1406	1.402
10	0.2201	0.00176	0.1709	49.46	358	49.85	395.6	0.1823	1.403
15	0.2585	0.00178	0.1467	61.3	364.4	61.76	402.3	0.2238	1.406
20	0.3018	0.0018	0.1266	73.29	370.8	73.83	409.1	0.265	1.409
25	0.3503	0.00182	0.1098	85.41	377.3	86.05	415.8	0.3061	1.412
30	0.4043	0.00184	0.09562	97.69	383.8	98.44	422.5	0.347	1.416
35	0.4644	0.00186	0.08359	110.1	390.3	111	429.2	0.3877	1.42
40	0.5308	0.00188	0.07334	122.7	396.9	123.7	435.8	0.4283	1.425
45	0.604	0.00191	0.06455	135.5	403.4	136.6	442.4	0.4688	1.43
50	0.6843	0.00193	0.05698	148.4	409.9	149.8	448.9	0.5092	1.435
55	0.7723	0.00196	0.05043	161.6	416.5	163.1	455.4	0.5495	1.44
60	0.8683	0.00199	0.04472	174.9	422.9	176.6	461.8	0.5899	1.446
65	0.9728	0.00202	0.03973	188.4	429.4	190.4	468	0.6303	1.451
70	1.086	0.00205	0.03535	202.1	435.8	204.4	474.2	0.6707	1.457
75	1.209	0.00209	0.03149	216.1	442	218.6	480.1	0.7112	1.462
80	1.342	0.00213	0.02807	230.3	448.2	233.2	485.9	0.7519	1.467
85	1.485	0.00217	0.02502	244.8	454.2	248	491.4	0.7927	1.472
90	1.639	0.00222	0.02229	259.6	460	263.2	496.6	0.8339	1.477
95	1.805	0.00227	0.01984	274.7	465.6	278.8	501.4	0.8755	1.48
100	1.984	0.00233	0.01762	290.2	470.8	294.8	505.7	0.9175	1.483
105	2.175	0.00239	0.01561	306.1	475.5	311.3	509.5	0.9603	1.484
110	2.381	0.00247	0.01376	322.6	479.7	328.4	512.4	1.004	1.484
115	2.601	0.00257	0.01205	339.7	483	346.4	514.3	1.049	1.482
120	2.837	0.00268	0.01044	357.9	485	365.5	514.7	1.096	1.476
125	3.091	0.00285	0.00888	377.6	485.1	386.4	512.6	1.147	1.464
130	3.364	0.00311	0.00725	400.6	481.1	411	505.5	1.207	1.441

**R600a – Isobutano**

**Proprietà del liquido e del vapore saturo in funzione della pressione**

Press.	Temp.	Vol. Spec. (L)	Vol. Spec. (V)	E.Interna (L)	E.Interna (V)	Entalpia (L)	Entalpia (V)	Entropia (L)	Entropia (V)
$p$ [MPa]	$T$ [C]	$v_l$ [m <sup>3</sup> /kg]	$v_g$ [m <sup>3</sup> /kg]	$u_l$ [kJ/kg]	$u_g$ [kJ/kg]	$h_l$ [kJ/kg]	$h_g$ [kJ/kg]	$s_l$ [kJ/kg K]	$s_g$ [kJ/kg K]
0.01	-58.44	0.00156	3.046	-100.1	275.6	-100.1	306	-0.4204	1.471
0.02	-46.56	0.00159	1.599	-75.67	289.1	-75.64	321	-0.3096	1.441
0.03	-38.87	0.00161	1.097	-59.53	298	-59.48	330.9	-0.2396	1.427
0.04	-33.03	0.00162	0.8398	-47.1	304.9	-47.03	338.5	-0.1872	1.418
0.05	-28.27	0.00163	0.6826	-36.84	310.6	-36.76	344.7	-0.1449	1.413
0.06	-24.2	0.00165	0.5762	-28.02	315.4	-27.92	350	-0.1091	1.409
0.07	-20.65	0.00166	0.4992	-20.23	319.8	-20.11	354.7	-0.07805	1.406
0.08	-17.47	0.00167	0.4409	-13.22	323.6	-13.08	358.9	-0.05046	1.404
0.09	-14.59	0.00168	0.3951	-6.82	327.2	-6.669	362.7	-0.02557	1.403
0.1	-11.94	0.00168	0.3581	-0.92	330.4	-0.7517	366.2	-0.00287	1.402
0.2	7.111	0.00175	0.187	42.68	354.3	43.03	391.7	0.1583	1.402
0.3	19.8	0.00179	0.1273	72.81	370.6	73.35	408.8	0.2634	1.408
0.4	29.62	0.00184	0.09662	96.75	383.3	97.49	422	0.3438	1.416
0.5	37.74	0.00187	0.07777	117	393.9	118	432.8	0.41	1.423
0.6	44.74	0.00191	0.06498	134.8	403.1	136	442.1	0.4667	1.43
0.7	50.92	0.00194	0.0557	150.9	411.1	152.2	450.1	0.5166	1.436
0.8	56.49	0.00197	0.04865	165.5	418.4	167.1	457.3	0.5616	1.442
0.9	61.56	0.002	0.04309	179.1	425	180.9	463.7	0.6025	1.448
1	66.24	0.00203	0.0386	191.8	431	193.8	469.6	0.6403	1.453
1.2	74.65	0.00209	0.03175	215.1	441.6	217.6	479.7	0.7083	1.462
1.4	82.08	0.00215	0.02676	236.3	450.7	239.3	488.2	0.7688	1.469
1.6	88.76	0.00221	0.02294	255.9	458.6	259.4	495.3	0.8236	1.476
1.8	94.84	0.00227	0.01991	274.2	465.4	278.3	501.2	0.8741	1.48
2	100.4	0.00233	0.01744	291.5	471.2	296.2	506.1	0.9212	1.483
2.2	105.6	0.0024	0.01537	308.1	476.1	313.4	509.9	0.9656	1.484
2.4	110.4	0.00248	0.0136	324.1	480	330	512.6	1.008	1.484
2.6	115	0.00257	0.01205	339.6	482.9	346.3	514.3	1.049	1.482
2.8	119.2	0.00266	0.01068	355	484.8	362.5	514.7	1.089	1.477
3	123.2	0.00278	0.00942	370.4	485.4	378.8	513.7	1.129	1.469
3.2	127	0.00293	0.00823	386.4	484.2	395.8	510.6	1.17	1.457
3.4	130.6	0.00316	0.00703	404	480	414.8	503.9	1.216	1.437
3.6	134	0.00372	0.00543	430	465.8	443.4	485.4	1.285	1.388

**R600a – Isobutano: Liquido compresso e vapore surriscaldato.**

R600a	$p =$	0.02	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.81	-82.77	-0.3414
-40.0	1.647	297.1	330.1	1.48
-30.0	1.721	309.8	344.2	1.54
-20.0	1.794	322.8	358.7	1.598
-10.0	1.867	336.3	373.6	1.656
0.0	1.94	350.2	389	1.713
10.0	2.013	364.5	404.8	1.77
20.0	2.086	379.3	421	1.826
30.0	2.158	394.6	437.7	1.882
40.0	2.23	410.3	454.9	1.938
50.0	2.302	426.4	472.5	1.993
60.0	2.375	443.1	490.6	2.049
70.0	2.447	460.2	509.1	2.103
80.0	2.519	477.8	528.2	2.158
90.0	2.591	495.8	547.7	2.212
100.0	2.662	514.4	567.6	2.267
110.0	2.734	533.3	588	2.321
120.0	2.806	552.8	608.9	2.374
130.0	2.878	572.7	630.3	2.428
140.0	2.95	593.1	652	2.481
150.0	3.022	613.9	674.3	2.535
160.0	3.093	635.1	697	2.588
170.0	3.165	656.8	720.1	2.64
180.0	3.237	678.9	743.6	2.693
190.0	3.309	701.4	767.6	2.745
200.0	3.38	724.4	792	2.797

R600a	$p =$	0.03	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.81	-82.76	-0.3414
-40.0	0.0016	-61.91	-61.86	-0.2498
-30.0	1.141	309.3	343.5	1.48
-20.0	1.191	322.4	358.1	1.538
-10.0	1.24	335.9	373.1	1.596
0.0	1.289	349.8	388.5	1.654
10.0	1.338	364.2	404.3	1.711
20.0	1.387	379	420.6	1.767
30.0	1.435	394.3	437.4	1.824
40.0	1.484	410	454.5	1.879
50.0	1.532	426.2	472.2	1.935
60.0	1.58	442.9	490.3	1.99
70.0	1.628	460	508.9	2.045
80.0	1.677	477.6	527.9	2.1
90.0	1.725	495.7	547.4	2.154
100.0	1.773	514.2	567.4	2.208
110.0	1.821	533.2	587.8	2.262
120.0	1.869	552.7	608.7	2.316
130.0	1.917	572.6	630.1	2.37
140.0	1.965	592.9	651.9	2.423
150.0	2.013	613.7	674.1	2.476
160.0	2.061	635	696.8	2.529
170.0	2.109	656.7	719.9	2.582
180.0	2.156	678.8	743.5	2.635
190.0	2.204	701.3	767.5	2.687
200.0	2.252	724.3	791.9	2.739

R600a	$p =$	0.04	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.82	-82.75	-0.3414
-40.0	0.0016	-61.92	-61.85	-0.2498
-30.0	0.8513	308.8	342.8	1.436
-20.0	0.8889	322	357.5	1.496
-10.0	0.9263	335.5	372.6	1.554
0.0	0.9634	349.5	388	1.612
10.0	1	363.9	403.9	1.669
20.0	1.037	378.8	420.2	1.725
30.0	1.074	394.1	437	1.782
40.0	1.11	409.8	454.2	1.837
50.0	1.147	426	471.9	1.893
60.0	1.183	442.7	490	1.948
70.0	1.219	459.9	508.6	2.003
80.0	1.256	477.5	527.7	2.058
90.0	1.292	495.5	547.2	2.112
100.0	1.328	514.1	567.2	2.167
110.0	1.364	533.1	587.7	2.221
120.0	1.4	552.5	608.6	2.275
130.0	1.436	572.5	629.9	2.328
140.0	1.472	592.8	651.7	2.382
150.0	1.508	613.6	674	2.435
160.0	1.544	634.9	696.7	2.488
170.0	1.58	656.6	719.8	2.541
180.0	1.616	678.7	743.4	2.593
190.0	1.652	701.2	767.3	2.646
200.0	1.688	724.2	791.7	2.698

R600a	$p =$	0.05	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.82	-82.74	-0.3414
-40.0	0.0016	-61.92	-61.84	-0.2498
-30.0	0.00163	-40.59	-40.5	-0.1602
-20.0	0.7078	321.5	356.9	1.462
-10.0	0.738	335.1	372	1.52
0.0	0.768	349.2	387.6	1.578
10.0	0.7978	363.6	403.5	1.636
20.0	0.8274	378.5	419.9	1.692
30.0	0.8569	393.8	436.7	1.749
40.0	0.8863	409.6	453.9	1.805
50.0	0.9156	425.8	471.6	1.86
60.0	0.9448	442.5	489.8	1.916
70.0	0.9739	459.7	508.4	1.971
80.0	1.003	477.3	527.5	2.026
90.0	1.032	495.4	547	2.08
100.0	1.061	513.9	567	2.134
110.0	1.09	533	587.5	2.189
120.0	1.119	552.4	608.4	2.242
130.0	1.148	572.3	629.7	2.296
140.0	1.177	592.7	651.6	2.35
150.0	1.206	613.5	673.8	2.403
160.0	1.235	634.8	696.5	2.456
170.0	1.263	656.5	719.7	2.509
180.0	1.292	678.6	743.2	2.561
190.0	1.321	701.2	767.2	2.614
200.0	1.35	724.1	791.6	2.666

R600a	$p =$	0.06	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.83	-82.73	-0.3415
-40.0	0.0016	-61.93	-61.83	-0.2498
-30.0	0.00163	-40.59	-40.49	-0.1602
-20.0	0.587	321.1	356.3	1.434
-10.0	0.6125	334.7	371.5	1.493
0.0	0.6377	348.8	387.1	1.551
10.0	0.6627	363.3	403.1	1.608
20.0	0.6876	378.2	419.5	1.665
30.0	0.7123	393.6	436.3	1.722
40.0	0.7369	409.4	453.6	1.778
50.0	0.7615	425.6	471.3	1.834
60.0	0.7859	442.3	489.5	1.889
70.0	0.8103	459.5	508.1	1.944
80.0	0.8346	477.1	527.2	1.999
90.0	0.8589	495.2	546.8	2.054
100.0	0.8832	513.8	566.8	2.108
110.0	0.9074	532.8	587.3	2.162
120.0	0.9315	552.3	608.2	2.216
130.0	0.9557	572.2	629.6	2.27
140.0	0.9798	592.6	651.4	2.323
150.0	1.004	613.4	673.7	2.377
160.0	1.028	634.7	696.4	2.43
170.0	1.052	656.4	719.5	2.482
180.0	1.076	678.5	743.1	2.535
190.0	1.1	701.1	767.1	2.587
200.0	1.124	724	791.5	2.639

R600a	$p =$	0.08	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.84	-82.71	-0.3415
-40.0	0.0016	-61.94	-61.81	-0.2499
-30.0	0.00163	-40.61	-40.48	-0.1603
-20.0	0.00166	-18.81	-18.68	-0.07245
-10.0	0.4555	334	370.4	1.449
0.0	0.4748	348.1	386.1	1.507
10.0	0.4939	362.7	402.2	1.565
20.0	0.5128	377.6	418.7	1.622
30.0	0.5316	393.1	435.6	1.679
40.0	0.5502	408.9	452.9	1.735
50.0	0.5688	425.2	470.7	1.791
60.0	0.5873	441.9	488.9	1.847
70.0	0.6058	459.1	507.6	1.902
80.0	0.6241	476.8	526.7	1.957
90.0	0.6425	494.9	546.3	2.012
100.0	0.6607	513.5	566.4	2.066
110.0	0.679	532.6	586.9	2.12
120.0	0.6972	552	607.8	2.174
130.0	0.7154	572	629.2	2.228
140.0	0.7335	592.4	651.1	2.282
150.0	0.7517	613.2	673.4	2.335
160.0	0.7698	634.5	696.1	2.388
170.0	0.7879	656.2	719.2	2.441
180.0	0.806	678.3	742.8	2.493
190.0	0.8241	700.9	766.8	2.546
200.0	0.8421	723.9	791.2	2.598

R600a	$p =$	0.1	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.85	-82.69	-0.3416
-40.0	0.0016	-61.95	-61.79	-0.2499
-30.0	0.00163	-40.62	-40.46	-0.1603
-20.0	0.00166	-18.83	-18.66	-0.07251
-10.0	0.3612	333.1	369.3	1.414
0.0	0.377	347.4	385.1	1.473
10.0	0.3925	362	401.3	1.531
20.0	0.4079	377.1	417.9	1.588
30.0	0.4231	392.5	434.9	1.645
40.0	0.4382	408.4	452.3	1.702
50.0	0.4532	424.8	470.1	1.758
60.0	0.4681	441.6	488.4	1.814
70.0	0.483	458.8	507.1	1.869
80.0	0.4978	476.5	526.3	1.924
90.0	0.5126	494.6	545.9	1.979
100.0	0.5273	513.2	566	2.033
110.0	0.5419	532.3	586.5	2.088
120.0	0.5566	551.8	607.5	2.142
130.0	0.5712	571.8	628.9	2.196
140.0	0.5858	592.2	650.7	2.249
150.0	0.6004	613	673	2.302
160.0	0.6149	634.3	695.8	2.356
170.0	0.6294	656	719	2.408
180.0	0.6439	678.2	742.6	2.461
190.0	0.6584	700.7	766.6	2.514
200.0	0.6729	723.7	791	2.566

R600a	$p =$	0.15	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.0	0.00158	-82.88	-82.64	-0.3417
-40.0	0.0016	-61.98	-61.74	-0.2501
-30.0	0.00163	-40.65	-40.41	-0.1605
-20.0	0.00166	-18.86	-18.62	-0.07266
-10.0	0.00169	3.409	3.662	0.01365
0.0	0.2464	345.6	382.5	1.408
10.0	0.2572	360.4	399	1.467
20.0	0.2679	375.6	415.8	1.525
30.0	0.2784	391.2	433	1.583
40.0	0.2888	407.3	450.6	1.64
50.0	0.299	423.7	468.6	1.697
60.0	0.3092	440.6	487	1.753
70.0	0.3193	457.9	505.8	1.808
80.0	0.3294	475.6	525.1	1.864
90.0	0.3394	493.9	544.8	1.919
100.0	0.3493	512.5	564.9	1.973
110.0	0.3592	531.6	585.5	2.028
120.0	0.3691	551.2	606.5	2.082
130.0	0.3789	571.2	628	2.136
140.0	0.3888	591.6	649.9	2.19
150.0	0.3986	612.5	672.3	2.243
160.0	0.4083	633.8	695	2.296
170.0	0.4181	655.5	718.3	2.349
180.0	0.4279	677.7	741.9	2.402
190.0	0.4376	700.3	765.9	2.455
200.0	0.4473	723.3	790.4	2.507

R600a	$p =$	0.20	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00158	-82.91	-82.59	-0.3418
-40.00	0.0016	-62.02	-61.69	-0.2502
-30.00	0.00163	-40.69	-40.36	-0.1606
-20.00	0.00166	-18.9	-18.57	-0.07281
-10.00	0.00169	3.367	3.705	0.01349
0.0	0.00172	26.15	26.5	0.09848
10.00	0.1895	358.7	396.6	1.42
20.00	0.1978	374.1	413.7	1.479
30.00	0.206	389.9	431.1	1.537
40.00	0.214	406	448.8	1.595
50.00	0.2219	422.6	467	1.652
60.00	0.2297	439.6	485.5	1.708
70.00	0.2374	457	504.5	1.765
80.00	0.2451	474.8	523.8	1.82
90.00	0.2527	493.1	543.6	1.875
100.0	0.2603	511.8	563.8	1.93
110.0	0.2678	530.9	584.5	1.985
120.0	0.2753	550.5	605.6	2.039
130.0	0.2828	570.6	627.1	2.093
140.0	0.2902	591	649.1	2.147
150.0	0.2977	611.9	671.5	2.201
160.0	0.3051	633.3	694.3	2.254
170.0	0.3124	655	717.5	2.307
180.0	0.3198	677.2	741.2	2.36
190.0	0.3272	699.8	765.3	2.412
200.0	0.3345	722.9	789.8	2.465

R600a	$p =$	0.30	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00158	-82.96	-82.49	-0.3421
-40.00	0.0016	-62.08	-61.6	-0.2505
-30.00	0.00163	-40.76	-40.27	-0.1609
-20.00	0.00166	-18.98	-18.48	-0.07311
-10.00	0.00169	3.284	3.79	0.01317
0.0	0.00172	26.06	26.57	0.09814
10.00	0.00176	49.38	49.91	0.182
20.00	0.1275	370.9	409.1	1.41
30.00	0.1333	387	427	1.47
40.00	0.139	403.5	445.2	1.529
50.00	0.1446	420.3	463.7	1.587
60.00	0.1501	437.5	482.5	1.644
70.00	0.1555	455.1	501.7	1.701
80.00	0.1608	473	521.3	1.757
90.00	0.166	491.5	541.3	1.813
100.0	0.1713	510.3	561.7	1.868
110.0	0.1764	529.5	582.5	1.923
120.0	0.1815	549.2	603.7	1.978
130.0	0.1866	569.3	625.3	2.032
140.0	0.1917	589.9	647.4	2.086
150.0	0.1967	610.9	669.9	2.14
160.0	0.2018	632.2	692.8	2.194
170.0	0.2068	654.1	716.1	2.247
180.0	0.2118	676.3	739.8	2.3
190.0	0.2167	698.9	764	2.353
200.0	0.2217	722	788.5	2.405

R600a	$p =$	0.40	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00158	-83.02	-82.39	-0.3423
-40.00	0.0016	-62.14	-61.5	-0.2507
-30.00	0.00163	-40.82	-40.17	-0.1612
-20.00	0.00166	-19.05	-18.39	-0.0734
-10.00	0.00169	3.2	3.875	0.01285
0.0	0.00172	25.96	26.65	0.0978
10.00	0.00176	49.27	49.98	0.1817
20.00	0.0018	73.17	73.89	0.2646
30.00	0.0968	384	422.7	1.418
40.00	0.1014	400.8	441.3	1.478
50.00	0.1058	417.9	460.2	1.538
60.00	0.1102	435.3	479.4	1.596
70.00	0.1144	453.1	498.8	1.654
80.00	0.1186	471.2	518.6	1.711
90.00	0.1227	489.8	538.8	1.767
100.0	0.1267	508.7	559.4	1.823
110.0	0.1307	528.1	580.4	1.878
120.0	0.1346	547.9	601.7	1.933
130.0	0.1385	568.1	623.5	1.988
140.0	0.1424	588.7	645.7	2.042
150.0	0.1463	609.7	668.2	2.096
160.0	0.1501	631.2	691.2	2.15
170.0	0.1539	653.1	714.6	2.203
180.0	0.1577	675.3	738.4	2.257
190.0	0.1615	698	762.6	2.309
200.0	0.1653	721.1	787.2	2.362

R600a	$p =$	0.60	[MPa]	
$T$	$v$	$u$	$h$	$s$
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00158	-83.13	-82.19	-0.3428
-40.00	0.0016	-62.26	-61.3	-0.2513
-30.00	0.00163	-40.96	-39.98	-0.1617
-20.00	0.00166	-19.2	-18.21	-0.074
-10.00	0.00169	3.034	4.046	0.01222
0.0	0.00172	25.78	26.81	0.09712
10.00	0.00176	49.07	50.12	0.1809
20.00	0.00179	72.94	74.01	0.2638
30.00	0.00184	97.43	98.54	0.3461
40.00	0.00188	122.6	123.8	0.4279
50.00	0.06676	412.5	452.5	1.462
60.00	0.07002	430.5	472.5	1.523
70.00	0.07315	448.8	492.7	1.583
80.00	0.07618	467.3	513	1.641
90.00	0.07913	486.2	533.7	1.699
100.0	0.08202	505.5	554.7	1.756
110.0	0.08484	525.1	576	1.812
120.0	0.08762	545.1	597.7	1.868
130.0	0.09036	565.5	619.7	1.923
140.0	0.09307	586.3	642.1	1.978
150.0	0.09575	607.4	664.9	2.033
160.0	0.09841	629	688.1	2.087
170.0	0.101	651	711.6	2.141
180.0	0.1037	673.4	735.6	2.194
190.0	0.1063	696.2	759.9	2.247
200.0	0.1088	719.4	784.7	2.3

R600a	$\rho =$	0.80	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-83.24	-81.98	-0.3433
-40.00	0.0016	-62.39	-61.11	-0.2518
-30.00	0.00163	-41.1	-39.79	-0.1623
-20.00	0.00166	-19.35	-18.03	-0.07459
-10.00	0.00169	2.868	4.218	0.01159
0.0	0.00172	25.6	26.97	0.09644
10.00	0.00175	48.86	50.26	0.1802
20.00	0.00179	72.7	74.14	0.263
30.00	0.00183	97.17	98.64	0.3452
40.00	0.00188	122.3	123.8	0.427
50.00	0.00193	148.2	149.8	0.5085
60.00	0.04962	425	464.7	1.464
70.00	0.05229	444	485.8	1.527
80.00	0.05481	463	506.9	1.587
90.00	0.05723	482.4	528.1	1.647
100.0	0.05957	502	549.6	1.705
110.0	0.06184	521.9	571.3	1.762
120.0	0.06405	542.1	593.4	1.819
130.0	0.06622	562.7	615.7	1.875
140.0	0.06836	583.7	638.4	1.931
150.0	0.07046	605	661.4	1.986
160.0	0.07253	626.8	684.8	2.04
170.0	0.07458	648.9	708.5	2.095
180.0	0.0766	671.4	732.7	2.149
190.0	0.07861	694.3	757.2	2.202
200.0	0.08061	717.5	782	2.255

R600a	$\rho =$	1.00	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-83.36	-81.78	-0.3438
-40.00	0.0016	-62.51	-60.91	-0.2523
-30.00	0.00163	-41.23	-39.6	-0.1629
-20.00	0.00166	-19.5	-17.85	-0.07518
-10.00	0.00169	2.703	4.389	0.01096
0.0	0.00172	25.41	27.13	0.09577
10.00	0.00175	48.66	50.41	0.1795
20.00	0.00179	72.47	74.26	0.2623
30.00	0.00183	96.91	98.74	0.3443
40.00	0.00188	122	123.9	0.426
50.00	0.00193	147.9	149.8	0.5074
60.00	0.00199	174.6	176.6	0.5891
70.00	0.03951	438.4	477.9	1.477
80.00	0.0418	458.2	500	1.541
90.00	0.04395	478.1	522.1	1.602
100.0	0.04599	498.1	544.1	1.662
110.0	0.04795	518.4	566.4	1.721
120.0	0.04985	539	588.8	1.779
130.0	0.05169	559.8	611.5	1.836
140.0	0.05348	581	634.5	1.892
150.0	0.05524	602.5	657.8	1.948
160.0	0.05697	624.4	681.4	2.003
170.0	0.05868	646.7	705.3	2.058
180.0	0.06036	669.3	729.7	2.112
190.0	0.06202	692.3	754.3	2.166
200.0	0.06366	715.7	779.3	2.219

R600a	$\rho =$	1.50	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-83.63	-81.27	-0.3451
-40.00	0.0016	-62.81	-60.42	-0.2536
-30.00	0.00163	-41.57	-39.13	-0.1643
-20.00	0.00165	-19.87	-17.39	-0.07665
-10.00	0.00168	2.295	4.821	0.0094
0.0	0.00172	24.96	27.53	0.0941
10.00	0.00175	48.15	50.77	0.1777
20.00	0.00179	71.9	74.58	0.2603
30.00	0.00183	96.26	99.01	0.3422
40.00	0.00187	121.3	124.1	0.4236
50.00	0.00192	147	149.9	0.5048
60.00	0.00198	173.6	176.6	0.586
70.00	0.00205	201.1	204.2	0.6677
80.00	0.00212	229.8	233	0.7505
90.00	0.02564	464.8	503.3	1.504
100.0	0.02747	486.7	527.9	1.571
110.0	0.02913	508.4	552	1.635
120.0	0.03067	530	576	1.697
130.0	0.03213	551.7	599.9	1.757
140.0	0.03352	573.6	623.8	1.815
150.0	0.03486	595.7	648	1.873
160.0	0.03615	618.1	672.3	1.93
170.0	0.03741	640.7	696.9	1.986
180.0	0.03864	663.7	721.7	2.041
190.0	0.03985	687.1	746.8	2.096
200.0	0.04103	710.7	772.3	2.151

R600a	$\rho =$	2.00	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m <sup>3</sup> /kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-83.91	-80.77	-0.3463
-40.00	0.0016	-63.12	-59.92	-0.255
-30.00	0.00162	-41.9	-38.65	-0.1656
-20.00	0.00165	-20.24	-16.93	-0.07811
-10.00	0.00168	1.89	5.254	0.00785
0.0	0.00171	24.51	27.94	0.09244
10.00	0.00175	47.65	51.15	0.1759
20.00	0.00178	71.34	74.91	0.2584
30.00	0.00183	95.63	99.28	0.3401
40.00	0.00187	120.6	124.3	0.4213
50.00	0.00192	146.2	150	0.5022
60.00	0.00197	172.6	176.6	0.583
70.00	0.00204	199.9	204	0.6642
80.00	0.00211	228.4	232.6	0.7462
90.00	0.0022	258.2	262.6	0.83
100.0	0.00233	290.1	294.7	0.9173
110.0	0.01919	495	533.4	1.555
120.0	0.02073	518.7	560.2	1.624
130.0	0.0221	541.9	586.1	1.689
140.0	0.02335	564.8	611.6	1.752
150.0	0.02453	587.8	636.9	1.812
160.0	0.02564	610.9	662.2	1.871
170.0	0.0267	634.2	687.6	1.929
180.0	0.02773	657.6	713.1	1.986
190.0	0.02872	681.4	738.8	2.042
200.0	0.02968	705.4	764.8	2.098

R600a	p =	2.50	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m³/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-84.18	-80.26	-0.3476
-40.00	0.0016	-63.42	-59.43	-0.2563
-30.00	0.00162	-42.23	-38.17	-0.167
-20.00	0.00165	-20.6	-16.47	-0.07955
-10.00	0.00168	1.49	5.691	0.00631
0.0	0.00171	24.07	28.35	0.0908
10.00	0.00175	47.16	51.52	0.1741
20.00	0.00178	70.79	75.25	0.2565
30.00	0.00182	95.01	99.56	0.338
40.00	0.00186	119.8	124.5	0.419
50.00	0.00191	145.4	150.2	0.4996
60.00	0.00197	171.7	176.6	0.5801
70.00	0.00203	198.8	203.9	0.6608
80.00	0.0021	227	232.2	0.7422
90.00	0.00219	256.4	261.9	0.825
100.0	0.0023	287.6	293.3	0.9104
110.0	0.00246	321.6	327.8	1.002
120.0	0.01424	502.9	538.5	1.547
130.0	0.01577	529.3	568.7	1.623
140.0	0.01705	554.3	596.9	1.692
150.0	0.01819	578.6	624.1	1.757
160.0	0.01923	602.7	650.8	1.82
170.0	0.02021	626.8	677.3	1.88
180.0	0.02113	650.9	703.7	1.939
190.0	0.02201	675.2	730.2	1.997
200.0	0.02285	699.6	756.8	2.053

R600a	p =	3.00	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m³/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-84.46	-79.75	-0.3488
-40.00	0.00159	-63.71	-58.93	-0.2575
-30.00	0.00162	-42.55	-37.69	-0.1684
-20.00	0.00165	-20.96	-16.01	-0.08099
-10.00	0.00168	1.095	6.13	0.00479
0.0	0.00171	23.63	28.76	0.08918
10.00	0.00174	46.67	51.9	0.1724
20.00	0.00178	70.25	75.58	0.2546
30.00	0.00182	94.4	99.85	0.336
40.00	0.00186	119.2	124.7	0.4167
50.00	0.00191	144.6	150.3	0.4971
60.00	0.00196	170.7	176.6	0.5773
70.00	0.00202	197.7	203.8	0.6576
80.00	0.00209	225.6	231.9	0.7384
90.00	0.00217	254.7	261.2	0.8203
100.0	0.00227	285.3	292.1	0.9042
110.0	0.00241	318.2	325.4	0.9922
120.0	0.00265	355.7	363.6	1.091
130.0	0.01103	510.8	543.9	1.545
140.0	0.01259	540.5	578.3	1.629
150.0	0.01382	567.4	608.9	1.702
160.0	0.01487	593.2	637.8	1.77
170.0	0.01581	618.4	665.8	1.834
180.0	0.01669	643.4	693.5	1.896
190.0	0.01751	668.4	720.9	1.955
200.0	0.01828	693.4	748.2	2.014

R600a	p =	3.50	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m³/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-84.73	-79.24	-0.35
-40.00	0.00159	-64.01	-58.43	-0.2588
-30.00	0.00162	-42.88	-37.21	-0.1697
-20.00	0.00165	-21.31	-15.55	-0.08241
-10.00	0.00168	0.7036	6.571	0.00328
0.0	0.00171	23.2	29.17	0.08757
10.00	0.00174	46.19	52.28	0.1707
20.00	0.00178	69.71	75.93	0.2527
30.00	0.00181	93.8	100.1	0.334
40.00	0.00186	118.5	125	0.4145
50.00	0.0019	143.8	150.5	0.4947
60.00	0.00195	169.8	176.7	0.5745
70.00	0.00201	196.7	203.7	0.6544
80.00	0.00208	224.4	231.7	0.7347
90.00	0.00216	253.2	260.7	0.8158
100.0	0.00225	283.3	291.2	0.8986
110.0	0.00238	315.3	323.6	0.9843
120.0	0.00256	350.4	359.4	1.076
130.0	0.00298	394.9	405.3	1.192
140.0	0.00893	519.9	551.1	1.551
150.0	0.01048	553	589.7	1.643
160.0	0.01164	581.7	622.4	1.719
170.0	0.01261	608.7	652.9	1.789
180.0	0.01348	635	682.1	1.854
190.0	0.01427	660.9	710.8	1.917
200.0	0.015	686.6	739.1	1.977

R600a	p =	4.00	[MPa]	
T	v	u	h	s
[C]	[m³/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg]	[kJ/kg K]
-50.00	0.00157	-84.99	-78.72	-0.3512
-40.00	0.00159	-64.3	-57.93	-0.2601
-30.00	0.00162	-43.2	-36.73	-0.171
-20.00	0.00165	-21.67	-15.08	-0.08383
-10.00	0.00167	0.3164	7.015	0.00178
0.0	0.00171	22.77	29.59	0.08598
10.00	0.00174	45.72	52.67	0.169
20.00	0.00177	69.19	76.28	0.2509
30.00	0.00181	93.21	100.5	0.332
40.00	0.00185	117.8	125.2	0.4124
50.00	0.0019	143.1	150.6	0.4923
60.00	0.00195	169	176.8	0.5719
70.00	0.002	195.7	203.7	0.6514
80.00	0.00207	223.2	231.4	0.7312
90.00	0.00214	251.7	260.3	0.8117
100.0	0.00223	281.4	290.3	0.8934
110.0	0.00235	312.7	322.1	0.9773
120.0	0.00251	346.4	356.4	1.066
130.0	0.00277	384.8	395.9	1.165
140.0	0.00409	453.4	469.7	1.345
150.0	0.00764	531.9	562.5	1.568
160.0	0.00908	567.2	603.6	1.664
170.0	0.01014	597.3	637.9	1.742
180.0	0.01103	625.4	669.6	1.813
190.0	0.01182	652.6	699.9	1.879
200.0	0.01253	679.3	729.4	1.942

## Valori di $c_p$ , $c_v$ e $k$ per vari gas ideali in funzione di $T$

Temp	Aria			Azoto			Ossigeno			Temp
K	$c_p$	$c_v$	$k$	$c_p$	$c_v$	$k$	$c_p$	$c_v$	$k$	K
250	1.003	0.716	1.401	1.039	0.742	1.400	0.913	0.653	1.398	250
300	1.005	0.718	1.400	1.039	0.743	1.400	0.918	0.658	1.395	300
350	1.008	0.721	1.398	1.041	0.744	1.399	0.928	0.668	1.389	350
400	1.013	0.726	1.395	1.044	0.747	1.397	0.941	0.681	1.382	400
450	1.020	0.733	1.391	1.049	0.752	1.395	0.956	0.696	1.373	450
500	1.029	0.742	1.387	1.056	0.759	1.391	0.972	0.712	1.365	500
550	1.040	0.753	1.381	1.065	0.768	1.387	0.988	0.728	1.358	550
600	1.051	0.764	1.376	1.075	0.778	1.382	1.003	0.743	1.350	600
650	1.063	0.776	1.370	1.086	0.789	1.376	1.017	0.758	1.343	650
700	1.075	0.788	1.364	1.098	0.801	1.371	1.031	0.771	1.337	700
750	1.087	0.800	1.359	1.110	0.813	1.365	1.043	0.783	1.332	750
800	1.099	0.812	1.354	1.121	0.825	1.360	1.054	0.794	1.327	800
900	1.121	0.834	1.344	1.145	0.849	1.349	1.074	0.814	1.319	900
1000	1.142	0.855	1.336	1.167	0.870	1.341	1.090	0.830	1.313	1000

Temp	Anidride Carbonica			Monoss. di Carbonio			Idrogeno			Temp
K	$c_p$	$c_v$	$k$	$c_p$	$c_v$	$k$	$c_p$	$c_v$	$k$	K
250	0.791	0.602	1.314	1.039	0.743	1.400	14.051	9.927	1.416	250
300	0.846	0.657	1.288	1.040	0.744	1.399	14.307	10.183	1.405	300
350	0.895	0.706	1.268	1.043	0.746	1.398	14.427	10.302	1.400	350
400	0.939	0.750	1.252	1.047	0.751	1.395	14.476	10.352	1.398	400
450	0.978	0.790	1.239	1.054	0.757	1.392	14.501	10.377	1.398	450
500	1.014	0.825	1.229	1.063	0.767	1.387	14.513	10.389	1.397	500
550	1.046	0.857	1.220	1.075	0.778	1.382	14.530	10.405	1.396	550
600	1.075	0.886	1.213	1.087	0.790	1.376	14.546	10.422	1.396	600
650	1.102	0.913	1.207	1.100	0.803	1.370	14.571	10.447	1.395	650
700	1.126	0.937	1.202	1.113	0.816	1.364	14.604	10.480	1.394	700
750	1.148	0.959	1.197	1.126	0.829	1.358	14.645	10.521	1.392	750
800	1.169	0.980	1.193	1.139	0.842	1.353	14.695	10.570	1.390	800
900	1.204	1.015	1.186	1.163	0.866	1.343	14.822	10.698	1.385	900
1000	1.234	1.045	1.181	1.185	0.888	1.335	14.983	10.859	1.380	1000

### Valori del calore specifico $c$ per liquidi

Liquido	Stato	$c$ (kJ/kgK)
Ammoniaca	sat. liq., -20°C	4.52
	sat. liq., 10°C	4.67
	sat. liq., 50°C	5.10
Alcool etilico	1 atm, 25°C	2.43
Glicerina	1 atm, 10°C	2.32
	1 atm, 50°C	2.58
Mercurio	1 atm, 10°C	0.138
	1 atm, 315°C	0.134
Refrigerante 12	sat. liq., -20°C	0.90
	sat. liq., 20°C	0.96
Acqua	1 atm, 0°C	4.217
	1 atm, 27°C	4.179
	1 atm, 100°C	4.218

### Valori del calore specifico $c$ per solidi

Solido	$T$ (K)	$c$ (kJ/kg K)
Alluminio	300	0.903
Argento	300	0.235
Ferro	300	0.447
Ghiaccio	200	1.56
	240	1.86
	273	2.11
Piombo	300	0.129
Rame	300	0.385
	400	0.393

### APPENDICE 4 - Unità di misura – Sistema Internazionale

Per caratterizzare un sistema fisico, siamo soliti definirne le proprietà: tali sono ad esempio la lunghezza, il volume, la temperatura, etc. *Misurare* vuol dire *assegnare mediante una procedura codificata un numero per rappresentare una proprietà*. Alcune misure (es. quelle di lunghezza sono di tipo *diretto*, ovvero si va a vedere quante volte un campione (in questo caso il metro, od un suo multiplo o sottomultiplo) è contenuto nella grandezza da misurare. La maggior parte delle misure è tuttavia di tipo *indiretto*, ovvero si misura in realtà una proprietà correlata in maniera nota a quella da misurare effettivamente: nel caso della temperatura, si misura la lunghezza di una colonnina di mercurio, o la differenza di potenziale ai capi di un dispositivo elettronico.

Le unità di misura sono state definite dall'uomo nel corso della storia in maniera caotica e scoordinata. Soltanto all'inizio dell'800, con la introduzione del sistema metrico decimale, è iniziato un processo di razionalizzazione e unificazione, che è culminato nella creazione del Sistema Internazionale di Unità di Misura, indicato semplicemente come sistema SI.

Tale sistema è basato sulla definizione di:

- un numero limitato di *grandezze fondamentali*, le cui unità sono definite dalla loro stessa procedura di misura;
- e di *grandezze derivate*, le cui unità di misura derivano dalle leggi fisiche che le definiscono.

Ad esempio, una volta definite le unità fondamentali di spazio (il metro, m) e tempo (il secondo, s), non è necessaria una ulteriore unità fondamentale per la velocità: essendo la velocità uguale allo spazio diviso il tempo, la sua unità è m/s.

Le grandezze fondamentali di cui abbiamo bisogno sono solo sette: *lunghezza* (metro, m), *tempo* (secondo, s), *massa* (chilogrammo, kg), *temperatura* (kelvin, K), *corrente elettrica* (ampere, A), *ammontare di sostanza* (mole, mol), *intensità luminosa* (candela, cd). Le loro definizioni sono riportate alla fine dell'appendice.

Tra le numerosissime grandezze derivate, quelle che ci interessano maggiormente sono la *forza* (newton,  $N=kg\ m/s^2$ ), il *lavoro* (joule,  $J=N\ m$ ) e la *potenza* (watt,  $W=J/s$ ).

Le unità definite con questa procedura hanno il pregio della razionalità, in quanto non richiedono l'introduzione di fattori di conversione all'interno delle formule; per contro, talvolta esse sono troppo grandi o troppo piccole rispetto alle grandezze con cui di ha a che fare in pratica, per cui è necessario usare i loro multipli o sottomultipli. Essi si ottengono aggiungendo un prefisso alla grandezza. I prefissi definiti variano da  $10^{-18}$  a  $10^{18}$  e sono riportati nella seguente tabella 1.

Prefisso	Simb.	Fattore	Prefisso	Simb.	Fattore	Prefisso	Simb.	Fattore
exa	E	$10^{18}$	etto	h	$10^2$	milli	m	$10^{-3}$
peta	P	$10^{15}$	deca	da	$10^1$	micro	$\mu$	$10^{-6}$
tera	T	$10^{12}$				nano	n	$10^{-9}$
giga	G	$10^9$	deci	d	$10^{-1}$	pico	p	$10^{-12}$
mega	M	$10^6$	centi	c	$10^{-2}$	femto	f	$10^{-15}$
kilo	k	$10^3$				atto	a	$10^{-18}$

**Tabella 1:** prefissi per multipli e sottomultipli nel sistema SI.

La pressione (forza diviso superficie) ha come unità di misura  $N/m^2$ , detto anche *pascal* (Pa). La pressione atmosferica standard equivale a 101325 Pa, per cui nella pratica si usano i

multipli kPa o MPa. E' molto usato anche il *bar* (100 kPa) che però non è un multiplo standard del sistema SI.

Accanto alle unità SI (il cui uso è obbligatorio per legge nei documenti ufficiali, anche se spesso questa regola viene violata) sopravvivono le vecchie unità pratiche, che è necessario convertire con appositi fattori di conversione (vedi tabelle seguenti). Ad esempio, sono unità pratiche di energia la kilocaloria (1 kcal = 4186 J) ed il chilowattora (1 kWh = 3.6 MJ), la British Thermal Unit (1 BTU= 1016 J).

Per maggiori dettagli si veda ad es. Colombo, Manuale dell'Ingegnere, ed. Hoepli, sezione P.

**Tablelle di conversione tra unità di misura**

a) Unità di forza

Unità di misura	N	dine	kgf	pdl	lbf
1 N =	1	10 <sup>5</sup>	0.102	7.23	0.225
1 dina =	10 <sup>-5</sup>	1	1.02 10 <sup>-6</sup>	7.23 10 <sup>-5</sup>	2.25 10 <sup>-6</sup>
1 kgf =	9.80665*	9.81 10 <sup>5</sup>	1	70.9	2.205
1 pdl** =	0.138	1.38 10 <sup>4</sup>	1.41 10 <sup>-2</sup>	1	0.031
1 lbf =	4.44	4.44 10 <sup>5</sup>	0.4536	32.1740	1

\* valore esatto per convenzione internazionale approssimato a 9.81 nei calcoli pratici

\*\* (lbf ft/s<sup>2</sup>) Poundal

b) Unità di pressione

Unità di misura	Pa	bar	atm	torr	at	Kgf/m <sup>2</sup>	psi
1 Pa =	1	10 <sup>-5</sup>	9.87 10 <sup>-6</sup>	7.5 10 <sup>-3</sup>	1.02 10 <sup>-5</sup>	0.102	1.45 10 <sup>-4</sup>
1 bar =	10 <sup>5</sup>	1	0.987	7.5 10 <sup>-2</sup>	1.02	102 10 <sup>-2</sup>	14.5
1 atm =	101325	0.01325	1	760	1.033	1.033 10 <sup>-4</sup>	14.696
1 torr = (mm Hg)	133.322	1.33 10 <sup>-3</sup>	1.31 10 <sup>-3</sup>	1	1.359 10 <sup>-3</sup>	13.595	1.93 10 <sup>-2</sup>
1 at =	98066.5	0.980665	0.968	735.5	1	10 <sup>4</sup>	14.22
1 kgf/m <sup>2</sup>	9.80665	9.81 10 <sup>-5</sup>	9.68 10 <sup>-5</sup>	7.355 10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-4</sup>	1	1.42 10 <sup>-3</sup>
1 psi (lbf/in <sup>2</sup> )	6894.76	6.89 10 <sup>-2</sup>	6.8 10 <sup>-2</sup>	51.7	7.03 10 <sup>-2</sup>	703.07	1
1 baria (dine/cm <sup>2</sup> )	0.1	10 <sup>-6</sup>	9.87 10 <sup>-7</sup>	7.5 10 <sup>-4</sup>	1.02 10 <sup>-6</sup>	0.0102	1.45 10 <sup>-5</sup>

c) Unità di energia

Unità di misura	J	erg	kgf m	kWh	Cvh	kcal <sub>IT</sub>	lbf ft	Btu <sub>IT</sub>
1 J=	1	10 <sup>7</sup>	0.102	2.78 10 <sup>-7</sup>	3.78 10 <sup>-7</sup>	0.239 10 <sup>-3</sup>	0.783	0.948 10 <sup>-3</sup>
1 erg=	10 <sup>-7</sup>	1	0.102 10 <sup>-7</sup>	2.78 10 <sup>-14</sup>	3.78 10 <sup>-14</sup>	0.239 10 <sup>-10</sup>	0.783 10 <sup>-7</sup>	0.948 10 <sup>-10</sup>
1 kgf m=	9.80665	9.81 10 <sup>7</sup>	1	2.72 10 <sup>-6</sup>	3.704 10 <sup>-6</sup>	2.34 10 <sup>-3</sup>	7.23	9.3 10 <sup>-3</sup>
1 kWh=	3.6 10 <sup>6</sup>	3.6 10 <sup>13</sup>	3.6 10 <sup>5</sup>	1	1.3596	859.845	2.66 10 <sup>6</sup>	3.41 10 <sup>3</sup>
1 Cvh=	2.648 10 <sup>6</sup>	2.648 10 <sup>13</sup>	270000	0.735	1	632.4	1.953 10 <sup>6</sup>	2509.6
1 kcal <sub>IT</sub> =	4186.8	4186.8 10 <sup>7</sup>	426.9	1.163 10 <sup>-3</sup>	1.58 10 <sup>-3</sup>	1	3.09 10 <sup>3</sup>	3.97
1 lbf ft=	1.36	1.36 10 <sup>7</sup>	0.138	3.77 10 <sup>-7</sup>	5.12 10 <sup>-7</sup>	3.24 10 <sup>-4</sup>	1	1.29 10 <sup>-3</sup>
1 Btu <sub>IT</sub> =	1055.06	1055.06 10 <sup>7</sup>	107.6	2.93 10 <sup>-4</sup>	3.98 10 <sup>-4</sup>	0.252	778.169	1

d) Unità di potenza

Unità di misura	W	kgf m/s	Cv	kcal <sub>IT</sub> /h	ft lbf/s	Btu <sub>IT</sub> /h
1 W=	1	0.102	1.36 10 <sup>-3</sup>	0.8594	0.738	3.414
1 kgf m/s=	9.80665	1	1.33 10 <sup>-2</sup>	8.432	7.23	33.46
1 Cv=	735.5	75	1	632.4	542.5	2509.6
1 kcal <sub>IT</sub> /h=	1.163	0.1186	1.58 10 <sup>-3</sup>	1	0.585	3.97
1 ft lbf/s=	1.36	0.138	1.84 10 <sup>-3</sup>	1.166	1	4.626
1 Btu <sub>IT</sub> /h=	0.293	2.988 10 <sup>-2</sup>	3.98 10 <sup>-4</sup>	0.252	0.216	1

*Costanti fisiche notevoli*

Costante universale dei gas	$R = 8.31445 \pm 0.00034 \text{ kJ/kmol K}$
Numero di Avogadro	$N_A = (6.02293 \pm 0.00016) 10^{26}$ molecole/kmol
Volume molare del gas ideale in condizioni normali (1 bar e 273.15 K)	$V_0 = 22.4139 \pm 0.0006 \text{ m}^3/\text{kmol}$
Pressione atmosferica standard (a livello del mare)	$p = 101.325 \text{ kPa}$
Accelerazione standard di gravità	$g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$
Costante di Stefan-Boltzmann	$s = 5.673 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$
Costante di Planck	$h = (6.62517 \pm 0.00023) 10^{-34} \text{ J/K}$
Costante di Boltzmann	$k = (1.38045 \pm 0.00007) 10^{-23} \text{ J/K}$
Velocità della luce nel vuoto	$c_0 = (2.997925 \pm 0.000003) 10^8 \text{ m/s}$

*Definizioni delle grandezze fondamentali*

- **secondo (s)**: la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133.
- **metro (m)**: lunghezza del tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di 1/(299 792 458) di secondo.
- **kilogrammo (kg)**: la massa del prototipo internazionale del kilogrammo, conservato al museo di pesi e misure di Sevres, Parigi.
- **ampere (A)**: l'intensità di una corrente elettrica costante che, mantenuta in due conduttori rettilinei paralleli di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro nel vuoto, produrrebbe tra gli stessi una forza pari a  $2 \times 10^{-7}$  N per metro di lunghezza.
- **kelvin (K)**: la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.
- **mole (mol)**: la quantità di sostanza di un sistema che contiene tanti atomi quanti ve ne sono in 0.012 kg di carbonio 12 (*pari al numero di Avogadro,  $6.023 \times 10^{23}$ , ndr*).
- **candela (cd)**: l'intensità luminosa, in una determinata direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza  $540 \times 10^{12}$  Hz e la cui intensità in tale direzione è di 1/683 di watt per steradiante.

### **APPENDICE 5 – Metodologia di risoluzione di problemi di termodinamica**

Il primo passo in una analisi termodinamica è la identificazione del sistema delle sue interazioni con l'esterno (es. il sistema è chiuso, aperto, le pareti sono adiabatiche, etc.).

Devono quindi essere prese in considerazione le leggi fisiche che governano il comportamento del sistema e le altre relazioni pertinenti (es. leggi costitutive della sostanza presente nel sistema).

Nella maggior parte delle analisi si usano, direttamente o indirettamente, una o più delle seguenti tre equazioni di bilancio, che sono *indipendenti dalla particolare sostanza o sostanze considerate e dal tipo di trasformazione che avviene*:

- conservazione della massa
- conservazione dell'energia
- secondo principio della termodinamica

In aggiunta, di solito è necessario aggiungere i legami tra le proprietà della particolare sostanza o sostanze considerate: le cosiddette *equazioni di stato* della sostanza.

Per ottenere buoni risultati è necessario seguire un approccio sistematico. Bisogna evitare la tentazione di cominciare il problema dal mezzo, selezionando ad esempio alcune equazioni che sembrano appropriate, sostituendo numeri o semplicemente affidarsi al calcolatore.

E' fortemente consigliato perciò che la soluzione di un problema sia organizzata utilizzando i seguenti passi.

**Variabili note:** Descrivere concisamente e con parole proprie che cosa è noto. Questo richiede di aver letto il problema attentamente e di aver attentamente pensato ad esso.

**Variabili da determinare:** Definire in maniera concisa e con proprie parole che cosa deve essere determinato.

**Dati schematici:** Disegnare un piccolo quadro rappresentativo del sistema in considerazione. Decidere ad esempio se un sistema chiuso od aperto sono appropriati per l'analisi ed identificarne con precisione il contorno.

Identificare i diagrammi di stato che contengono rilevanti informazioni circa il problema in esame e disegnarli, localizzando i punti chiave e indicando, se possibile, la trasformazione eseguita dal sistema.

**Assunzioni:** Elencare tutte le assunzioni semplificative e le idealizzazioni che possono essere fatte.

**Analisi:** Utilizzando tutte le assunzioni e le idealizzazioni fatte, semplificare le equazioni che governano il fenomeno fino a formare la sequenza di esse che produrrà il risultato.

E' consigliabile lavorare con le equazioni, senza sostituire valori numerici, il più a lungo possibile, per evitare la accumulazione degli errori di arrotondamento nei calcoli successivi. In ogni caso, i calcoli devono essere condotti con un numero di cifre significative superiore (ma non eccessivamente!) a quello con cui si vuole ottenere la soluzione finale.

Quando le equazioni sono ridotte alla loro forma finale, analizzarle per vedere quali dati aggiuntivi sono richiesti. Per quanto possa sembrare ovvio, spesso ci si dimentica che il numero delle incognite deve essere pari a quello delle equazioni *indipendenti* che si hanno a disposizione. Identificare i dati, le tabelle, i diagrammi o le equazioni aggiuntive eventualmente necessarie.

Quando tutti i dati e tutte le equazioni sono disponibili, sostituire i valori numerici all'interno delle equazioni. *Controllare se c'è uniformità a livello dimensionale* e quindi eseguire i calcoli richiesti.

Alla fine, considerare se le grandezze dei valori numerici sembrano ragionevoli e se i segni algebrici associati ai valori numerici sono corretti

# Appunti ed Esercizi di *Fisica Tecnica e Macchine Termiche*

## Appendici 6-7

***Paolo Di Marco***

*Versione 06.00 – 13.11.2006.*

6. Risoluzione di parte degli esercizi proposti
7. Problemi assegnati nei compiti, 1994-2005

*La presente dispensa è redatta ad esclusivo uso didattico per gli allievi dei corsi di studi universitari dell'Università di Pisa. L'autore se ne riserva tutti i diritti. Essa può essere riprodotta solo totalmente ed al fine summenzionato, non può essere alterata in alcuna maniera o essere rivenduta ad un costo superiore a quello netto della riproduzione. Ogni altra forma di uso e riproduzione deve essere autorizzata per scritto dall'autore.*

*L'autore sarà grato a chiunque gli segnali errori, inesattezze o possibili miglioramenti.*

## APPENDICE 6 – Soluzioni di alcuni degli esercizi proposti

### Capitolo 1

Le soluzioni degli esercizi 1.2-1.16 sono state redatte dallo studente Leonardo Caruso

#### Esercizio 1.2

Utilizzando la legge di Stevin (Cap. I)  $P_a = P_{atm} + \rho gh = 40.9 \text{ MPa}$

#### Esercizio 1.3

Utilizzando la portata volumetrica (Cap. I)  $G = wA$  da cui  $D = \sqrt{\frac{4G}{\pi w}} = 7 \text{ m}$

#### Esercizio 1.4

L'ossido nitroso si può considerare un gas ideale. Dalla relazione tra energia interna, temperatura e volume (Cap. I)

$$du = c_v dT + B_u dv = c_v dT \quad \text{per un gas ideale}$$

$$\text{quindi } u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \Rightarrow u_2 = c_v T = 80880 \text{ J/kg}$$

si ha inoltre

$$e_c = \frac{1}{2} w^2 = 12.5 \text{ J/kg}, \quad e_p = gh = 1177 \text{ J/kg}$$

#### Esercizio 1.5

In un sistema chiuso il lavoro di dilatazione è dato da (Cap. I)

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = p_1 (V_2 - V_1) = 4 \cdot 10^5 \cdot (0.36 - 0.15) = 84 \text{ kJ}$$

notare che non è necessario moltiplicare per la massa del sistema, dato che il volume indicato è quello totale e non quello specifico.

#### Esercizio 1.6

Il lavoro di dilatazione (analogamente al caso precedente) sarà

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \text{const} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = 4 \cdot 10^5 \cdot 0.15 \cdot \ln \left( \frac{0.36}{0.15} \right) = 52.5 \text{ kJ}$$

#### Esercizio 1.7

Il lavoro di dilatazione (analogamente al caso precedente) sarà

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{const}}{V^n} dV = p_1 V_1^n \int V^{-n} dV = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1-n}$$

con

$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^n$$

e quindi

$$L_{12} = \left[ p_1 V_2 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^n - p_1 V_1 \right] \frac{1}{1-n} = \left[ 4 \cdot 10^5 \cdot 0.36 \cdot \left( \frac{0.15}{0.36} \right)^{1.4} - 4 \cdot 10^5 \cdot 0.15 \right] \cdot \frac{1}{1-1.4} = 44.3 \text{ kJ}$$

#### Esercizio 1.9

Dalla definizione di volume specifico (Cap. I) si giunge al volume iniziale e quello finale, rispettivamente indicati nelle soluzioni come

$$V_1 = Mv_1 = 1,5 \cdot 83,54 \cdot 10^{-3} = 0,125 \text{ m}^3$$

$$V_2 = Mv_2 = 1,5 \cdot 21,34 \cdot 10^{-3} = 0,0032 \text{ m}^3$$

il valore di  $n$  può essere determinato risolvendo l'equazione esponenziale

$$pv^n = \text{const} \Rightarrow p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$$

$$\ln p_1 + n \ln v_1 = \ln p_2 + n \ln v_2$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)} = 1.18$$

che poteva essere anche risolta numericamente, es. con il risolutore di Excel.

Il lavoro infine è

$$\begin{aligned} L_{1 \rightarrow 2} &= M \int_{v_1}^{v_2} p dv = M \int_{v_1}^{v_2} \frac{\text{const}}{v^n} dv = M \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n} = \\ &= 1.5 \cdot (1 \cdot 10^6 \cdot 21.34 \cdot 10^{-3} - 200 \cdot 10^3 \cdot 83.54 \cdot 10^{-3}) \cdot \frac{1}{1-1.18} = -38.6 \text{ kJ} \end{aligned}$$

### Esercizio 1.10

Allo stato 2 si giunge a un volume dato da

$$v_2 = \frac{p_1 v_1}{p_2} = \frac{300 \cdot 0.019}{150} = 0.038 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$$

il lavoro specifico sarà dato dalla somma dei lavori delle singole trasformazioni

$$\begin{aligned} l_{13} &= l_{12} + l_{23} = \int_{v_1}^{v_2} p dv + \int_{v_2}^{v_3} p dv = p_1 v_1 \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + p_2 (v_3 - v_2) = \\ &= 3 \cdot 10^5 \cdot 0.019 \ln 2 - + 15 \cdot 10^4 \cdot 0.019 = 1.1 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

### Esercizio 1.11

Applicando il I principio della Termodinamica (Cap. I) si ottiene

$$L = Q - U = (85 - 800) \cdot 10^3 = 50 \text{ kJ}$$

### Esercizio 1.12

a) In un sistema aperto a regime, per una compressione reversibile, il lavoro da fornire per unità di massa sarà dato da

$$l'_{12} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp = - p_1 v_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = - 0.1 \cdot 10^6 \cdot 1.5 \ln\left(\frac{0.4}{0.1}\right) = - 208 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

b) In tal caso si ha

$$L = - \int_{p_1}^{p_2} v dp = - v (p_2 - p_1) = - 1.5 \cdot (400 \cdot 10^3 - 0.1 \cdot 10^6) = - 400 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

### Esercizio 1.13

a) Dato che il contenitore è a pareti rigide, l'effetto del mulinello non comporterà alcuna variazione del volume dell'aria, ed essendo il contenitore chiuso non varierà neppure il volume specifico. Quindi

$$v_2 = v_1 = \frac{1}{\rho} = 0.83 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

b) Applicando il I principio della Termodinamica e considerando che  
 $l_{12} = 0$  (contenitore rigido)

$$\Delta u = q_{12} = \frac{W\Delta t}{V\rho} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 60}{0.2 \cdot 1.2} = 200 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

### Esercizio 1.14

Applicando il I principio della Termodinamica si ottiene:

$$1 \rightarrow 2: \quad U_2 - U_1 = Q_{12} - \Delta L, \quad V_1 = V_2, \quad \Delta L = 0$$

$$2 \rightarrow 3: \quad U_3 - U_2 = Q_{23} - \Delta L, \quad \Delta L = p_2(V_3 - V_2)$$

Da cui

$$V_3 - V_1 = \frac{1}{p_2}(Q_{23} + U_2 - U_3)$$

$$U_2 = Q_{12} + U_1$$

$$V_3 - V_1 = \frac{1}{p_2}(Q_{23} + Q_{12} + U_1 - U_3) = -5.625 \text{ m}^3$$

notare che l'ultima relazione poteva essere ricavata applicando direttamente il I principio alla trasformazione 2-3.

### Esercizio 1.15

Essendo un sistema chiuso a regime si ha

$$dQ = dL, \text{ ovvero } W_t = W_m + W_{el}$$

La potenza meccanica erogata dal motore può essere calcolata come (ricordare che il momento va espresso in N/m e la velocità angolare in rad/s)

$$W_m = M\Omega = 2 \cdot 9.8 \cdot \frac{500 \cdot 2\pi}{60} = 1025.7 \text{ W}$$

la potenza termica scambiata dal motore è la somma algebrica delle potenze elettrica e meccanica

$$W_t = W_m + W_{el} = 1025.7 - 1500 = -474 \text{ W}$$

dove il segno negativo indica che il calore viene ceduto all'esterno. Si ha quindi

$$Q = W_t \cdot \Delta t = -1.7 \text{ MJ}$$

la temperatura del motore può essere calcolata da

$$W_t = hA(T_c - T_a)$$

$$T_c = T_a \frac{W_t}{hA} = 114.8^\circ\text{C}$$

### Esercizio 1.16

Poiché abbiamo un ciclo termodinamico possiamo dire che

$$\Delta U = 0, \quad Q_{ciclo} = L_{ciclo}$$

calcoliamo quindi

$$L_{ciclo} = L_{12} + L_{23} + L_{31}$$

essendo la trasformazione 2-3 isovolumica si ha  $L_{23} = 0$ ; è noto inoltre che  $L_{31} = 150 \text{ kJ}$  e infine

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1 \cdot 10^5 \cdot 1.5 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -103 \text{ kJ}$$

si ha quindi

$$L_{tot} = Q_{tot} = 47 \text{ kJ}$$

**Esercizio 1.18**

a. Si può applicare il primo principio della termodinamica ad ogni trasformazione del ciclo, per cui

$$\Delta U_{12} = Q_{12} - L_{12}$$

$$\Delta U_{23} = Q_{23} - L_{23}$$

$$\Delta U_{31} = Q_{31} - L_{31}$$

In relazione al ciclo completo, la variazione di energia interna è nulla, quindi:

$$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0$$

Quindi

$$\Delta U_{12} = 23 - 5 = 18 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_{23} = -50 - 0$$

$$\Delta U_{31} = -(\Delta U_{12} + \Delta U_{23}) = -(18 - 50) = 32 \text{ kJ}$$

Il lavoro scambiato nella terza trasformazione, essendo  $Q_{31}=0$ , vale  $L_{31}=-32 \text{ kJ}$ .

## Capitolo 2

Le soluzioni degli esercizi 2.1-2.13 sono state redatte dallo studente Leonardo Caruso

Le soluzioni degli esercizi 2.14-2.17 sono state redatte dallo studente Giacomo Garofalo

### Esercizio 2.1

Considerando l'Argon come un gas ideale

$$pV = MRT \rightarrow M = \frac{pV}{RT} = \frac{200 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{293 \cdot 208.18} = 1.639 \text{ kg}$$

il volume occupato in condizioni normali è ottenibile tramite la medesima legge

$$pV = MRT \rightarrow V = \frac{MRT}{p} = \frac{1.639 \cdot 208.18 \cdot 273.15}{1 \cdot 10^5} = 0.932 \text{ m}^3$$

### Esercizio 2.2

Considerando l'azoto un gas perfetto si ha

$$pV = MRT$$

$$p = p_e + p_c = p_e + \frac{F_e}{S} = p_e + \frac{M_p g}{\pi D^2} = 97 \cdot 10^3 + \frac{5 \cdot 9.8}{\pi \cdot 0.0025^2} = 103.23 \text{ kPa}$$

e

$$M = \frac{pV}{RT} = \frac{103.23 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{296.8 \cdot 373.15} = 1.864 \text{ kg}$$

### Esercizio 2.4

Considerando  $x = \frac{M_v}{M}$  ed impostando le equazioni si ottiene

$$\left( \begin{array}{l} V = V_l + V_v \\ V_v = \frac{8}{10} V \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{l} Mv = M_l v_l + M_v v_v \\ M_v v_v = \frac{8}{10} Mv \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{l} v = \frac{M_l v_l}{M} + \frac{M_v v_v}{M} \\ v = \frac{10 \cdot M_v v_v}{8 \cdot M} \end{array} \right)$$

ed essendo anche  $\frac{M_l}{M} = (1-x)$

$$\left( \begin{array}{l} v = (1-x)v_l + xv_l \\ v = \frac{8}{10} xv_v \end{array} \right) \rightarrow (1-x)v_l + xv_l = \frac{10}{8} xv_v$$

$$x = \frac{v_l}{\frac{10}{8} v_v - v_v + v_l} = \frac{0.001121}{\frac{10}{8} \cdot 0.194045 + 0.001127} = 0.022$$

Utilizzeremo la legge di Stevin per calcolare  $\Delta p$

$$\Delta p = p_{10m} - p_{0m} = \rho_l g h_l + \rho_v g h_v \cong \frac{g h_l}{v_l} = \frac{2 \cdot 9.8}{0.001191} = 17391 \text{ Pa}$$

### Esercizio 2.5

$$v = v_l + x(v_g - v_l) \rightarrow x = \left( \frac{V}{M} - v_l \right) \frac{1}{v_g - v_l} = \left( \frac{0.1}{10.79} - 0.000757 \right) \cdot \left( \frac{1}{0.029132 - 0.000757} \right) = 0.3$$

$$h = h_l + x(h_g - h_l) = 56.799 + 0.3 \cdot (196.568 - 56.799) = 98.73 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

la soluzione può anche essere verificata tramite il programma CATT.

### Esercizio 2.6

$$v = v_l + x(v_g - v_l) \rightarrow x = \left( \frac{V}{M} - v_f \right) \cdot \left( \frac{1}{v_v - v_f} \right) = \left( \frac{0.1}{1.5} - 0.001658 \right) \cdot \left( \frac{1}{0.1285 - 0.0016} \right) = 0.51$$

### Esercizio 2.7

Nel caso che i calori specifici siano costanti, si ottiene:

$$\Delta h = c_p \Delta T = 1039.15 \cdot (1100 - 300) = 831 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\Delta u = c_v \Delta T = (1100 - 300) \cdot 742 = 593 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\Delta s = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p}{T} dT - \int_{p_1}^{p_2} \frac{R}{P} dp = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 1039 \ln\left(\frac{1100}{300}\right) - 296.91 \ln\left(\frac{13 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5}\right) = 588 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Utilizzando la relazione polinomiale che lega  $c_p$  alla temperatura si ha invece, dopo aver sviluppato gli integrali (v. dispense, Cap.III)

$$\Delta h = R \left[ \alpha(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2}(T_2^2 - T_1^2) + \frac{\gamma}{3}(T_2^3 - T_1^3) + \frac{\delta}{4}(T_2^4 - T_1^4) + \frac{\varepsilon}{5}(T_2^5 - T_1^5) \right] = 882.1 \text{ J/kg}$$

$$\Delta u = \Delta h - \Delta(pv) = \Delta h - R\Delta T = 644.6 \text{ J/kg}$$

$$\Delta s = R \left[ \alpha \ln \frac{T_2}{T_1} + \beta(T_2 - T_1) + \frac{\gamma}{2}(T_2^2 - T_1^2) + \frac{\delta}{3}(T_2^3 - T_1^3) + \frac{\varepsilon}{4}(T_2^4 - T_1^4) \right] - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 649.6 \text{ J/kg K}$$

### Esercizio 2.8

Si calcolano i valori della pressione e della temperatura ridotte

$$p_r = \frac{p}{p_c} = \frac{2}{11.28} = 0.18 \quad T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{373}{405.4} = 0.92$$

dal diagramma di Fig.8, Cap.III, si ottiene approssimativamente  $Z = 0.9$ .

con l'utilizzo del programma CATT si ha

$$Z = \frac{pv}{RT} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0.08248}{488.38 \cdot 373.15} = 0.905$$

### Esercizio 2.9

Tracciando una trasformazione isovolumica sul diagramma  $p-v$  è facile convincersi che

- se  $v < v_{crit}$  lo stato finale è liquido;
- se  $v > v_{crit}$  lo stato finale è vapore surriscaldato.

Dato che per l'acqua si ha  $v_{crit} = 0.0031 \text{ m}^3/\text{kg}$ , ne segue che nel caso a) ( $v = 0.0015 \text{ m}^3/\text{kg}$ ) lo stato finale è liquido, mentre nel caso b) ( $v = 0.0150 \text{ m}^3/\text{kg}$ ) lo stato finale è vapore surriscaldato.

**Esercizio 2.10**

La massa è nota una volta noto il volume specifico

$$Mv = V \rightarrow M = \frac{V}{v}$$

Per il gas ideale si ha quindi

$$v = \frac{RT}{p} = \frac{518.46 \cdot 298.15}{2 \cdot 10^7} = 0.00773 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$M = \frac{V}{v} = \frac{0.5}{0.00773} = 64.7 \text{ kg}$$

Mentre nello stesso caso, prendendo il valore di  $v$  dalle tabelle, si ha

$$v = 0.00637 \text{ m}^3/\text{kg} \Rightarrow M = \frac{V}{v} = \frac{0.5}{0.00637} = 78.5 \text{ kg}$$

La differenza è dovuta al fatto che nelle condizioni specificate il metano si discosta leggermente dalle condizioni di gas ideale.

Per il vapore saturo, dal CATT

$$v = 0.00382 \text{ m}^3/\text{kg} \Rightarrow M = \frac{V}{v} = \frac{0.5}{0.00382} = 130.9 \text{ kg}$$

lo stesso valore poteva essere determinato, dopo aver ricavato  $v_l$  e  $v_g$  dalle tabelle termodinamiche, tramite

$$v = v_l + x(v_g - v_l)$$

**Esercizio 2.11**

È una trasformazione reversibile isoterma, e, dato che il vapore è saturo, anche isobara; mediante il programma CATT o le tabelle termodinamiche si ottengono i seguenti valori

$p_1=0.1 \text{ MPa}$ ,  $T_1=99.9 \text{ °C}$ ,  $x_1=1$ ,  $u_1=2506 \text{ kJ/kg}$ ,  $s_1=7.35 \text{ kJ/kg K}$ ,  $v_1=1.694 \text{ m}^3/\text{kg}$

$p_2=0.1 \text{ MPa}$ ,  $T_2=99.9 \text{ °C}$ ,  $x_2=0$ ,  $u_2=414.13 \text{ kJ/kg}$ ,  $s_2=1.306 \text{ kJ/kg K}$ ,  $v_2=0.001443 \text{ m}^3/\text{kg}$

si ha inoltre

$$\begin{cases} du = dq - dl \\ Tds = dq \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_2 - u_1 = q_{12} - l_{12} \\ q_{12} = T(s_2 - s_1) \end{cases}$$

$$l_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p(v_2 - v_1) \quad L_{12} = M l_{12} = -42.3 \text{ kJ}$$

$$\Delta U = M(u_2 - u_1) = -522 \text{ kJ}$$

$$Q_{12} = \Delta U + L_{12} = -564 \text{ kJ}$$

$$\Delta S = M(s_2 - s_1) = -1.51 \text{ kJ/K}$$

si può anche verificare che (essendo la trasformazione isoterma)

$$\Delta S = \frac{Q_{12}}{T}$$

**Esercizio 2.12**

Si ha a che fare con un sistema chiuso. Ovviamente  $T_2=T_1=298.15 \text{ K}$ .

La temperatura nello stato finale 3 può essere ottenuta da

$$T_3 p_3^{\frac{1-k}{k}} = T_2 p_2^{\frac{1-k}{k}} \quad \frac{k-1}{k} = \frac{R}{c_p} = 0.2893$$

$$T_3 = T_2 \left( \frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 298.15 \cdot \left( \frac{20}{1} \right)^{-0.289} = 125.3 \text{ K}$$

(Notare che in tali condizioni il modello di gas ideale potrebbe cadere in difetto).

Il volume finale  $v_3$  è dato da

$$v_3 = \frac{RT_3}{p_3} = \frac{287 \cdot 125.3}{1 \cdot 10^5} = 0.36 \text{ m}^3/\text{kg}$$

(Notare: nella formula per il calcolo di  $T$ , in cui compare il rapporto delle pressioni, non è stato necessario convertire le medesima in Pa; è stato invece necessario convertire la temperatura in K; nella formula per il calcolo di  $v$  invece la conversione della pressione in Pa è indispensabile)

Il lavoro si trova sommando i contributi delle trasformazioni isoterma e adiabatica

$$l_{13} = l_{12} + l_{23} = -RT_1 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) + \frac{R}{k-1} (T_2 - T_3)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{R - c_p} = 1.407$$

$$l_{13} = -287 \cdot 298.5 \cdot \ln \left( \frac{20}{1} \right) + 705 \cdot (298.15 - 125.3) = -135 \text{ kJ/kg}$$

notare che il lavoro ha un contributo negativo (compressione isoterma) ed uno positivo (espansione adiabatica): il primo predomina sul secondo, come ci si può rendere conto tracciando le trasformazioni in un diagramma  $p-v$ .

Il calore viene scambiato solo nella prima trasformazione ed è dato da

$$q_{13} = q_{12} = -RT_1 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = -256 \text{ kJ/kg}$$

### Esercizio 2.13

La pressione interna è la somma di quella esterna più il contributo dovuto al peso del mantello:

$$p_i = p_e + \frac{Mg}{\pi R^2} = 980 \cdot 100 + \frac{500000 \cdot 9.81}{\pi 20^2} = 98000 + 3900 = 1019 \text{ hPa}$$

il dislivello nella guardia idraulica può essere determinato tramite la legge di Stevin

$$\Delta L = \frac{p_e - p_i}{\rho_{H_2O} g} = \frac{3900}{1000 \cdot 9.81} = 0.397 \text{ m}$$

e la massa di metano contenuta è data da

$$M = \frac{p_i V}{RT} = \frac{p_i \pi D^2}{RT} H = 12400 \text{ kg}$$

nel caso in cui la pressione atmosferica aumenta, aumenta anche la pressione interna ed il volume si riduce in ragione inversamente proporzionale alla pressione

$$\frac{V'}{V} = \frac{H'}{H} = \frac{p_i}{p_i'} \Rightarrow H' = H \frac{p_i}{p_i'} = 15 \frac{1019}{1079} = 14.16 \text{ m}$$

$$\Delta H = H - H' = 0.83 \text{ m}$$

invece, il dislivello nella guardia idraulica, che dipende solo dalla differenza di pressione tra interno ed esterno, e quindi dal peso del mantello, rimane invariato.

### Esercizio 2.14

L'aria può essere considerata un gas ideale con  $R = 287 \text{ J/kg K}$  e  $c_p = 1004 \text{ J/kg K}$

1. La massa di aria si calcola quindi con l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$M = \frac{pV}{RT} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{287 \cdot 400} = 1.74 \text{ kg}$$

2. La pressione nel recipiente quando  $T = 27^\circ\text{C} = 300.15 \text{ K}$  vale:

$$p = \frac{MRT}{V} = \frac{1.74 \cdot 287 \cdot 300.15}{40 \cdot 10^{-3}} = 3.75 \text{ MPa}$$

3. Il calore scambiato durante il processo si calcola con il primo principio della termodinamica, ricordando che, siccome il recipiente ha le pareti rigide, il sistema non può scambiare lavoro meccanico:

$$du = dq - \cancel{dl}$$

Per i gas perfetti vale:

$$du = c_v dT = 716.5 \cdot (400 - 300.15) = 71.5 \text{ kJ/kg}$$

$$\Delta Q = -M \cdot du = -1.74 \cdot 71.5 = -123 \text{ kJ}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che il calore scambiato durante il processo, viene ceduto dal sistema all'ambiente.

### Esercizio 2.15

	$T$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$v$ [ $\text{m}^3/\text{Kg}$ ]	$p$ [Mpa]	$x$
1	20	0.09284	0.2896	-
2	-20	0.09284	0.2448	1

Le celle evidenziate contengono i valori di input.

Comincio dallo stato 2, visto che conosco due variabili indipendenti (che quindi caratterizzano il sistema): temperatura e titolo. Lo stato 1 risulta determinato dalla conoscenza della temperatura e del volume (che rimane costante).

### Esercizio 2.16

	$T$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$u$ [kJ/Kg]	$s$ [kJ/ kg K]	$x$
1	70	1164	3.675	0.4
2	341.5	1577	3.675	0

Le celle evidenziate contengono i valori di input.

L'entropia rimane costante grazie alla condizione di adiabaticità ( $dq=0$ ) unita a quella di reversibilità della compressione.

Proprio grazie all'adiabaticità, il primo principio si può scrivere nel modo seguente:

$$du_{21} = \cancel{dq_{21}} - dl_{21}$$

$$dl_{21} = -du_{21} = -(1577 - 1164) = -413 \text{ kJ/kg}$$

Com'era logico attendersi, il segno è negativo in quanto il lavoro di compressione viene svolto dall'ambiente sul sistema.

$$L_{21} = M \cdot dl_{21} = 50 \cdot (-413) = -20.6 \text{ MJ}$$

**Esercizio 2.17**

	$T$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$p$ [MPa]	$v$ [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]	$h$ [kJ/kg]	$u$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kg·K]	$x$
1	200	0.2	1.08	2870.47	2654.40	7.507	-
2	200	2	$1.156 \cdot 10^{-3}$	852.62	850.31	2.330	-

Le celle evidenziate contengono i valori di input.

$$V_1 = M \cdot v_1 = 0.2 \cdot 1.08 = 0.216 \text{ m}^3$$

$$V_2 = M \cdot v_2 = 0.2 \cdot 1.156 \cdot 10^{-3} = 2.31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Il calore scambiato in una compressione isoterma è dato dalla seguente relazione:

$$|q_{12}| = T \cdot ds_{12} = T(s_1 - s_2) = 2450 \text{ kJ/kg}$$

L'espressione del calore appena calcolata ha però valore negativo dato che il calore viene ceduto dal sistema all'ambiente; bisognerà ricordarlo quando non si lavora più con i valori assoluti.

$$Q_{12} = M \cdot q_{12} = -490 \text{ kJ}$$

Il lavoro scambiato si ottiene dall'equazione del primo principio applicata alla trasformazione 1-2 :

$$dl_{12} = dq_{12} - du_{12}$$

$$L_{12} = M \cdot l_{12} = M(q_{12} - u_{12}) = 0.2[2450 - (2654.40 - 850.31)] = -130 \text{ kJ}$$

Il lavoro ha, come è logico aspettarsi, valore negativo in quanto viene esercitato dall'ambiente sul sistema.

### Capitolo 3

Le soluzioni degli esercizi 3.1-3.4 sono state redatte dallo studente Giacomo Garofalo

#### Esercizio 3.1

Applichiamo l'equazione di bilancio della massa:

$$\frac{dM}{dt} = \sum_i G_i - \sum_u G_u$$

Siccome il nostro sistema è costituito da un cilindro con una sola apertura di ingresso ed una sola di uscita, possiamo riscrivere il bilancio di massa nel seguente modo:

$$\frac{dM}{dt} = G_i - G_u$$

Con alcune considerazioni si può riscrivere la variazione di massa nel tempo  $dM/dt$  come variazione del livello dell'acqua nel tempo  $dL(t)/dt$ .

Dalla definizione di densità otteniamo:

$$M = V \cdot \rho \rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \rho$$

Dove  $dV/dt$  è la variazione di volume nel tempo. Detto volume si può esprimere, secondo la configurazione geometrica del sistema, come quello di un cilindro di altezza  $dL$  e area di base  $A$ :

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dL}{dt}$$

Otengo così l'espressione cercata:

$$\frac{dM}{dt} = A\rho \frac{dL}{dt}$$

L'equazione differenziale (del primo ordine) che descrive il sistema è

$$\frac{dM}{dt} = G_i - G_u$$

$$A\rho \frac{dL}{dt} = G_i - K \cdot L(t)$$

Integrando, si ottiene:

$$L(t) = \frac{G_i}{K} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

La costante di tempo  $\tau$  vale

$$\tau = \frac{A\rho}{K} = 8.93 \text{ s}$$

Il valore a regime (cioè per  $t \rightarrow \infty$ ) è

$$L_r = \frac{G_i}{K} = 5 \text{ m}$$

La condizione di regime si raggiunge dopo 4-5 costanti di tempo  $\tau$ , ovvero dopo circa 40 secondi.

L'analogia con il processo di carica di un condensatore in un circuito RC-serie è notevole; il circuito è descritto dalla seguente equazione differenziale (anch'essa del primo ordine):

$$E = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

integrandola si ottiene l'andamento della corrente nel tempo:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Dove la costante di tempo vale  $\tau = RC$

La dualità di questo sistema con il precedente è immediata, basta operare le seguenti sostituzioni

$$G_i \rightarrow E$$

$$K \rightarrow R$$

$$1/A\rho \rightarrow C$$

Si osserva che: nel sistema idraulico, l'elemento "reattivo" responsabile dell'unico modo proprio del sistema (e quindi della sua banda passante ovvero della sua prontezza) è  $1/A\rho$

### Esercizio 3.2

Lasciando raffreddare il gas contenuto nella bombola, alla diminuzione della sua temperatura è associata una diminuzione di pressione, data da:

$$p_3 = \frac{MRT_3}{V} = \frac{0.838 \cdot 296.91 \cdot (20 + 273.15)}{5 \cdot 10^{-3}} = 145.88 \text{ bar}$$

Se riattacco la bombola alla linea di alimentazione, questa aumenterà la massa di gas contenuto fino a raggiungere la pressione di 200 bar; anche in questo caso si avrà un innalzamento della temperatura. Usando i risultati già ottenuti nell'esempio 2 si ottiene

$$\Delta M = \frac{V}{kRT_a} \Delta p = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1.4 \cdot 296.91 \cdot (15 + 273.15)} (200 \cdot 10^5 - 145.88 \cdot 10^5) = 0.226 \text{ kg}$$

La massa ora contenuta nella bombola è:

$$M_4 = M + \Delta M = 0.838 + 0.226 = 1.064 \text{ kg}$$

La temperatura finale è:

$$T_4 = \frac{p_4 V}{M_4 R} = \frac{200 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1.064 \cdot 296.91} = 316.54 \text{ K} = 43.4 \text{ }^\circ\text{C}$$

### Esercizio 3.3

La potenza termica che attraversa le pareti del serbatoio e riscalda l'azoto liquido, è

$$W_T = uA\Delta T = 0.03 \cdot 4 \cdot (25 + 176.8) = 24.22 \text{ W}$$

Usando i risultati dell'esempio 3, si vede che è possibile dissipare tale potenza, spillando una portata  $G$  di fluido dal serbatoio:

$$W_T = G \left( 1 + \frac{v_f}{v_{fg}} \right) h_{fg}$$

dove

$$v_{fg} = v_g - v_f = 0.039052 \text{ m}^3/\text{Kg}$$

$$h_{fg} = h_g - h_f = 168.38 \text{ kJ/Kg}$$

Si ottiene

$$G = \frac{W_T}{\left( 1 + \frac{v_f}{v_{fg}} \right) h_{fg}} = 0.14 \text{ g/s}$$

Ricordando che in 24 ore ci sono 86400 secondi, ricavo la massa di azoto spillata in un giorno:

$$M = G \cdot 86400 = 12 \text{ kg}$$

Si osserva che

$$\frac{v_f}{v_{fg}} \ll 1$$

Per cui è possibile utilizzare l'espressione approssimata (ma più che precisa, per i nostri scopi) per ricavare la portata da spillare:

$$W_T \cong G \cdot h_{fg} \rightarrow G \cong \frac{W_T}{h_{fg}} = 0.14 \text{ g/s}$$

### Esercizio 3.4

In questo caso, il modello di gas ideale non si può applicare al fluido contenuto nella bombola. La relazione da usare è

$$dU = dM \cdot h_a$$

dove  $h_a = h_g = 1412 \text{ kJ/kg}$ , che va integrata numericamente, partendo dallo stato iniziale 0.

Noi assegneremo arbitrariamente dei valori alla massa  $M$ , con i quali calcoleremo il volume specifico e l'energia interna  $U$ :

$$v = V/M$$

$$U = M \cdot h_a$$

Con due valori indipendenti è possibile, facendo uso delle tabelle termodinamiche, individuare lo stato del fluido. Si ripete questo procedimento fino a quando il valore della pressione non è quello desiderato: 10 bar.

	$\Delta M$ [kg]	$M$ [kg]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$u$ [kJ/kg]	$p$ [bar]	$T$ [°C]
0	0	0.0071	0.6995	1370	2	20
1	0.1	0.1071	0.045			
2	0.12	0.1271	0.039			
3	0.14	0.1471	0.034			
4	0.1444	0.1515	0.033	2132	10	406

## Capitolo 4

### Esercizio 4.1 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Sia  $G_1$  la portata di azoto entrante nella tubazione a temperatura  $T_1$ , e  $G_2$  la portata di azoto uscente dalla tubazione a temperatura  $T_2$ , scrivo le equazioni di equilibrio della massa e dell'energia per il sistema:

$$\begin{cases} G_1 = G_2 = G \\ W_t + G(h_1 - h_2) = 0 \end{cases}$$

L'azoto può essere considerato un gas perfetto con  $c_p = 1041.6 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$  costante quindi:

$$dh = c_p \cdot dT$$

$$W_t = Gc_p(T_2 - T_1) = -332.6 \text{ kW}$$

### Esercizio 4.2 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

	$p$ [MPa]	$T$ [°C]	$h$ [kJ/kg]	$x$
1	3	233.94	2750.47	0.97
2	0.1	137	2750.47	-

L'entalpia di una laminazione rimane sempre costante, come si osserva dai bilanci di energia ed entropia del sistema

$$\begin{cases} G(h_1 - h_2) = 0 \Rightarrow h_1 = h_2 \\ G(s_1 - s_2) + \dot{S}_{irr} = 0 \end{cases}$$

Il titolo si può anche calcolare con la seguente relazione, una volta trovate dalle tabelle l'entalpia del liquido saturo ( $h_f$ ) e l'entalpia del vapore saturo secco ( $h_g$ ):

$$x = \frac{h - h_f}{h_g - h_f} = \frac{2750.47 - 1008.62}{2804.29 - 1008.62} = 0.97$$

### Esercizio 4.3 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Considero inizialmente come sistema il solo scambiatore a miscelamento, caratterizzato da due ingressi ( $G_a$  e  $G_s$ ) e un'uscita ( $G_u$ ), e ne scrivo le equazione di equilibrio della massa e dell'energia:

$$\begin{cases} G_s + G_a = G_u \\ G_s h_s + G_a h_a = G_u h_u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_s = G_u - G_a \\ h_s = \frac{G_u h_u - G_a h_a}{G_s} \end{cases}$$

$$G_s = G_u - G_a = 0.05 \text{ kg/s}$$

Per calcolare il valore dell'entalpia  $h_s$  è necessario conoscere i valori delle entalpie  $h_u$  e  $h_a$ . Sappiamo però che l'entalpia dell'acqua si può calcolare con ottima approssimazione con la formula:

$$h = 4.2 \cdot T$$

Da cui:

$$h_a = 4.2 \cdot T_a = 84 \text{ kJ/kg}$$

$$h_u = 4.2 \cdot T_u = 124.32 \text{ kJ/kg}$$

$$h_s = \frac{G_u h_u - G_a h_a}{G_s} = \frac{3.05 \cdot 124.32 - 3 \cdot 84}{0.05} = 2543.8 \text{ kJ/kg}$$

La laminazione è un processo isoentalpico, questo significa che  $h_s$  è sia l'entalpia a valle della valvola di laminazione sia l'entalpia del vapore nella linea. Perciò per calcolare il titolo è

sufficiente trovare sulle tabelle l'entalpia del liquido saturo ( $h_f$ ) e l'entalpia del vapore saturo secco ( $h_g$ ) alla pressione di 3MPa:

$$x = \frac{h_s - h_f}{h_g - h_f} = \frac{2543.8 - 1008.4}{2802.3 - 1008.4} = 0.855$$

**Esercizio 4.5** (Soluzione redatta dallo studente Andrea Cosentino)

L'esercizio si risolve nella sua completezza utilizzando i diagrammi di Mollier del vapore acqueo e considerando il funzionamento della turbina ideale per cui si ottengono i seguenti dati:

	$p$ [bar]	$T$ [°C]	$h$ [J/kg]	$s$ [J/kgK]	$x$
1	40	500	3445	7.09	=
2 <sub>i</sub>	1	99	2575	7.09	0.96

In grigio sono stati evidenziati i dati di input; ora per calcolarci la potenza meccanica all'asse utilizziamo il bilancio di energia applicato alla turbina per cui si ha:

$$W'_m = G(h_1 - h_2)$$

$$W'_m = 0.3(3445 - 2575) = 261 \text{ kW}$$

**Esercizio 4.6** (Soluzione redatta dallo studente Andrea Cosentino)

Sfruttiamo le ipotesi di gas ideale per l'azoto per cui possiamo scrivere:

$$dh = c_p dT$$

$$c_p = \frac{kR}{k-1} = 1020.7 \text{ kJ/kgK}$$

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} = 698.9 \text{ K}$$

Per cui le equazioni di bilancio applicate al compressore, tenendo in considerazione le ipotesi di gas ideale, assumono la seguente forma:

$$W'_m = Gc_p(T_1 - T_2) = 0.4 \cdot 1020.7 \cdot (293.15 - 698.9) = -165.7 \text{ kW}$$

Se ora consideriamo la trasformazione isoterma allora:

$$dh = c_p dT = 0$$

$$W_t = W'_m$$

Per cui sfruttando il bilancio entropico ci ricaviamo la potenza termica scambiata dai cui ricaviamo anche la potenza all'asse del compressore.

$$G(s_2 - s_1)T = W_t$$

$$GT(c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}) = W_t$$

$$W_t = W'_m = -GRT \ln \frac{p_2}{p_1} = -103.93 \text{ kW}$$

**Esercizio 4.7** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Considero l'azoto come un gas perfetto con  $R=296.8 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$  e  $c_p=1041.6\text{J/kg}\cdot\text{K}$ .  
 Scrivo le equazioni di bilancio di energia ed entropia del sistema:

$$\begin{cases} -W'_m + G(h_1 - h_2) = 0 \\ G(s_1 - s_2) + \dot{S}_{irr} = 0 \end{cases}$$

Per i gas perfetti vale la relazione:

$$dh = c_p dT$$

Che combinata con il bilancio energetico mi dà:

$$W'_m = Gc_p (T_1 - T_2) = 216.4 \text{ kW}$$

L'espressione del rendimento isoentropico è

$$\eta_c = \frac{h_{2i} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_{2i} - T_1}{T_2 - T_1}$$

L'ultimo termine dell'uguaglianza è valido solo per i gas perfetti. La temperatura  $T_{2i}$ , ignota, si ricava ipotizzando la trasformazione isoentropica e quindi si può scrivere:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0$$

Da cui si ricava

$$c_p \ln \frac{T_{2i}}{T_1} = R \ln \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 700.5 \text{ K} = 427 \text{ }^\circ\text{C}$$

Sostituito il valore appena trovato nell'espressione del rendimento si ottiene

$$\eta_c = 0.76$$

La variazione di entropia della trasformazione reale vale:

$$\Delta s_{21} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = 1041.6 \ln \frac{823.15}{293.15} - 296.8 \ln \frac{20}{1} = 166 \text{ J/kg K} \neq 0$$

**Esercizio 4.8** (Soluzione redatta dallo studente Andrea Cosentino)

Per la soluzione del problema consideriamo l'azoto un gas ideale con  $R = 296.8 \text{ J/kg K}$  e con  $k = 1.41$  e sfruttiamo le proprietà dei gas ideali.

Prima di tutto ci calcoliamo il rapporto di compressione:

$$r_p = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{20} = 4.472$$

Si calcola la potenza assorbita tramite la seguente relazione ()

$$l_{12} = N c_p T_1 (1 - (r_p)^a)$$

$$a = \frac{R}{c_p}$$

$$c_p = \frac{kR}{k - 1}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$l'_{12} = -325.9 \text{ kJ/kg}$$

$$W'_m = -130 \text{ kW}$$

La temperatura di uscita dell'azoto si calcola sfruttando la legge dell'adiabatica reversibile (isoentropica) per un gas ideale

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}$$

da cui, se  $c_p = \text{costante}$ , riferendo di nuovo  $r_p$  al singolo stadio:

$$\frac{T_2}{T_1} = (r_p)^{R/c_p}$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene una temperatura di uscita pari a:

$$T_2 = 293.15 \cdot 4.472^{0.286} = 452 \text{ K} = 179.5^\circ\text{C}$$

Tale temperatura si ritrova all'uscita sia del primo che del secondo stadio.

#### Esercizio 4.10 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Si tratta di un normale scambiatore di calore a superficie.

Il bilancio di energia risulta:

$$G_1(h_{1i} - h_{1u}) = G_2(h_{2u} - h_{2i})$$

Siccome il gas ha un comportamento ideale e l'acqua è assimilabile ad un fluido incompressibile posso scrivere:

$$G_1 c_{p1} (T_{1i} - T_{1u}) = G_2 c_{p2} (T_{2u} - T_{2i})$$

La temperatura cercata si ottiene facilmente

$$T_{1u} = T_{1i} - \frac{G_2 c_{p2}}{G_1 c_{p1}} (T_{2u} - T_{2i}) = 440^\circ\text{C}$$

#### Esercizio 4.11 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

	$p$ [bar]	$T$ [ $^\circ\text{C}$ ]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kg·K]	$x$
1	160	570	3492.28	6.546	-
2i	1	99.66	2372.28	6.546	0.8657
2	1	99.66	2652.28	7.300	0.99

Il titolo in uscita e la potenza meccanica nel caso di espansione adiabatica e reversibile (e quindi isoentropica) si calcola così:

$$x = \frac{s_{2i} - s_f}{s_g - s_f} = \frac{6.546 - 1.303}{7.360 - 1.303} = 0.8657$$

$$W'_{ml} = G(h_1 - h_{2i}) = 1.5(3492.28 - 2372.28) = 1.68 \text{ MW}$$

Se il rendimento isoentropico della turbina è  $\eta_t = 0.75$ , la potenza meccanica da essa erogata vale:

$$W'_{mR} = \eta_t \cdot W'_{ml} = 0.75 \cdot 1.68 = 1.26 \text{ MW}$$

Il valore dell'entalpia reale dopo l'espansione si calcola con l'espressione del rendimento:

$$\eta_t = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} \Rightarrow h_2 = h_1 - \eta_t (h_1 - h_{2i}) = 2652.28 \text{ kJ/kg}$$

Il titolo in uscita nel caso reale si calcola una volta trovati dalle tabelle l'entalpia del liquido saturo ( $h_f$ ) e l'entalpia del vapore saturo secco ( $h_g$ ) corrispondenti alla pressione di 1 bar:

$$x = \frac{h_2 - h_f}{h_g - h_f} = \frac{2652.28 - 417.58}{2675.53 - 417.58} = 0.99$$

La variazione di entropia (nulla nel caso ideale) vale ora:

$$\Delta s = 7.300 - 6.546 = 0.75 \text{ kJ/kg K}$$

**Esercizio 4.12** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

	$p$ [bar]	$T$ [°C]	$c$ [m/s]
3	8	850	10
4	1.1		50

Ricaviamo preliminarmente il valore di  $T_4$ : per fare ciò sfruttiamo la condizione di isoentropicità ( $ds=0$ ).

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0$$

Da cui deriva

$$c_p \ln \frac{T_4}{T_3} = R \ln \frac{p_4}{p_3} \Rightarrow T_4 = T_3 \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Il valore di  $R$  si può calcolare:

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} \Rightarrow R = c_p \frac{k-1}{k} = 275.41 \text{ J/kg K}$$

Il valore della temperatura è quindi:

$$T_4 = 413 \text{ °C}$$

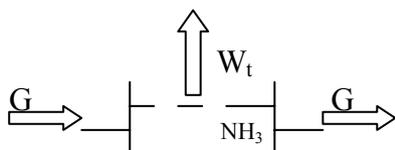
Il lavoro ottenuto per ogni kg di gas si ottiene dal bilancio energetico del sistema:

$$-W'_m + G(h_1 - h_2 + e_{c1} - e_{c2}) = 0$$

$$l' = \frac{W'_m}{G} = (h_1 - h_2) + (e_{c1} - e_{c2}) = c_p (T_1 - T_2) + \left( \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) = 482 \text{ kJ/kg}$$

**Esercizio 4.13** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Consideriamo inizialmente come sistema solo metà dello scambiatore a superficie, ed in particolare la metà attraversata dall'ammoniaca.

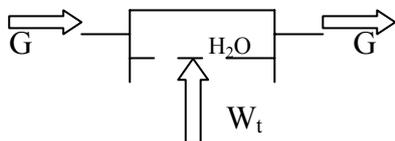


	$p$ [bar]	$T$ [°C]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kg·K]	$x$
1	14	36.25	1328.34	4.422	0.9
2	10	20	245.1	0.917	-

Facendo il bilancio energetico del nostro sistema ridotto si ottiene:

$$W_t = G(h_2 - h_1) = -2.17 \text{ MW}$$

Dove il segno meno è congruente alla convenzione da noi adottata che vuole negativa la potenza termica ceduta dal sistema all'esterno (in questo caso alla seconda metà del sistema). Rappresento il ora il lato secondario dello scambiatore (e cioè la sopraccitata seconda metà del sistema, quella attraversata dall'acqua):



Faccio il bilancio energetico di questo sistema parziale, ricordando che l'acqua può essere considerata un fluido incomprimibile:

$$W_t + G(h_1 - h_2) = 0$$

$$G = \frac{W_t}{(h_2 - h_1)} = \frac{W_t}{c(T_2 - T_1)} = \frac{2.17 \cdot 10^6}{4187 \cdot 5} = 104 \text{ kg/s}$$

#### Esercizio 4.14 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

	$p$ [bar]	$T$ [°C]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kg·K]	$x$
1	10	311.09	2724.86	5.614	1
2	10	311.09	2704.86	5.580	0.985

Calcolo prima di tutto la superficie della tubazione interessata allo scambio termico: siccome lo spessore è piccolo rispetto al diametro, considero la superficie laterale esterna del cilindro  $A_{lat}$ :

$$A_{lat} = D_e \pi \cdot L = 89 \cdot 10^{-3} \cdot 3.14 \cdot 50 = 14 \text{ m}^2$$

Le perdite di calore sono date dalla seguente formula:

$$Q = u \cdot A_{lat} \cdot \Delta T = 20 \cdot 14 \cdot (311.09 - 20) = 80 \text{ kW}$$

La tubazione si può considerare come uno scambiatore di calore a superficie che scambia una potenza termica  $W_t$  pari a  $-Q$  (negativa in quanto ceduta all'esterno)

Scrivo l'equazione di bilancio energetico:

$$W_t + G(h_1 - h_2) = 0$$

$$h_2 = h_1 + \frac{W_t}{G} = h_1 - \frac{Q}{G} = 2704.86$$

Il titolo si ricava una volta ricavati dalle tabelle i valori dell'entalpia del liquido saturo ( $h_f$ ) e l'entalpia del vapore saturo secco ( $h_g$ ) corrispondenti alla pressione di 10 bar:

$$x = \frac{h_2 - h_f}{h_g - h_f} = \frac{2704.86 - 1407.69}{2724.86 - 1407.69} = 0.985$$

#### Esercizio 4.15 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

	$p$ [bar]	$T$ [°C]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kg·K]	$x$
3	40	431	3285.89	6.8876	-
4	0.05	32.92	2319.17	7.6032	0.90
4i	0.05	32.92	2101.05	6.8876	0.81

In seguito all'espansione non si è ottenuto il massimo lavoro possibile perché questo avviene in caso di trasformazioni isoentropiche ( $\Delta s = 0$ ); il nostro caso invece presenta un incremento di entropia ( $\Delta s \neq 0$ ).

Il rendimento è dato dall'espressione:

$$\eta_t = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4i}} = \frac{3285.89 - 2319.17}{3285.89 - 2101.05} = 0.82$$

#### Esercizio 4.16

a) Essendo la trasformazione isoentropica abbiamo che, nell'ipotesi di velocità e quota rispettivamente uguali tra monte e valle:

$$-l'_{id} = \int_1^2 v dp = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

$$p_1 = p_{vs}(27^\circ C) = 0.0360 \quad \text{bar}$$

$$l'_{id} = - \frac{7,00 \cdot 10^{-6} - 0,0360 \cdot 10^5}{1,00 \cdot 10^3} = -7.00 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$|W'_{m,id}| = G \cdot |l'_{id}| = 0.50 \cdot (7.00 \cdot 10^3) = 3.50 \text{ kW}$$

Notare che per un fluido incomprimibile, essendo  $ds=c \, dT/T$ , la variazione di temperatura è nulla in una trasformazione isoentropica.

b) La potenza reale è data da

$$|W'_{m,R}| = |W'_{m,id}| / \eta_p = 3.50 \cdot 10^3 / 0.6 = 5.83 \text{ kW}$$

Il bilancio di energia sulla pompa è dato da:

$$W'_{m,R} = G(h_1 - h_{2R})$$

quindi

$$-l'_R = - \frac{W'_{m,R}}{G} = h_{2R} - h_1 = c \cdot (T_{2R} - T_1) + v \cdot (p_2 - p_1) = c \cdot (T_{2R} - T_1) - l'_{id}$$

$$T_{2R} - T_1 = \frac{-l'_R + l'_{id}}{c} = \frac{-l'_R \cdot (1 - \eta_p)}{c} = 1.1 \text{ K}$$

La equazione precedente mostra chiaramente che il lavoro in eccesso rispetto a quello ideale si traduce in riscaldamento del fluido. E' facile verificare che in questo caso il processo è irreversibile, essendo il sistema adiabatico e

$$\Delta s = c \ln \left( \frac{T_{2R}}{T_1} \right) > 0$$

#### Esercizio 4.17 (Soluzione redatta dallo studente Renato Lison)

Si parte dall'equazione di bilancio dell'energia nella sua forma più generale:

$$\frac{d(U + E_c + E_p)}{dt} = W_t - W_m + \sum_i G_i (u_i + e_{ci} + e_{pi}) - \sum_u G_u (u_u + e_{cu} + e_{pu})$$

e la si specializza in base alle circostanze. Essendo le pareti della caldaia rigide la potenza meccanica utile raccolta è nulla. Dato che si tratta di un caso stazionario, il primo termine è

nullo. Si suppone infine di poter trascurare le variazioni di energia cinetica e potenziale, e si ottiene

$$0 = W_T - 0 + \sum_e G_e h_e - \sum_u G_u h_u$$

e poiché si tratta di un sistema aperto a regime con un solo ingresso ed una sola uscita, dal bilancio di massa si ha

$$G_e = G_u = G$$

e quindi

$$W_T = G(h_u - h_e)$$

dal programma di calcolo CATT si ha

$$h_u (p = 2 \text{ MPa} ; x = 1) = 2799,515 \text{ kJ/kg}$$

$$h_e (p = 2 \text{ MPa} ; T = 20 \text{ °C}) = 85,821 \text{ kJ/kg}$$

da cui infine (tenuto conto che la portata va convertita in kg/s)

$$W_T = G(h_u - h_e) = \frac{50000}{3600} (2799,15 - 85,821) = 37,69 \text{ MW}$$

#### Esercizio 4.18 (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

Considerando il sistema aperto e a regime, il bilancio di energia nel compressore porge (la seconda uguaglianza è verificata solo per un gas ideale con calore specifico costante):

$$l' = -(h_2 - h_1) = -c_p (T_2 - T_1)$$

il lavoro di compressione può essere calcolato a partire dal lavoro isoentropico, che a sua volta è noto una volta nota la temperatura finale della compressione reversibile.

Per una trasformazione adiabatica e reversibile (quindi isoentropica), denotando con il pedice  $2i$  lo stato finale

$$\frac{T_{2i}}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{T_{2i}}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 289 \cdot (4,00)^{0,4/1,4} = 429 \text{ K}$$

dalla definizione di rendimento isoentropico si ottengono la temperatura di uscita ed il lavoro reali

$$\eta_c = \frac{(h_{2i} - h_1)}{(h_{2R} - h_1)} = \frac{c_p \cdot (T_{2i} - T_1)}{c_p \cdot (T_{2R} - T_1)} = \frac{(T_{2i} - T_1)}{(T_{2R} - T_1)}$$

da cui

$$T_{2R} = T_1 + \frac{1}{\eta_c} (T_{2i} - T_1) = 289 + \frac{1}{0,650} \cdot (429 - 289) = 505 \text{ K}$$

Una volta nota  $T_{2R}$ , il lavoro reale è ottenibile anche direttamente dal bilancio di energia

$$l' = -c_p \cdot (T_{2R} - T_1) = -1,01 \cdot (505 - 289) = -218 \text{ kJ/kg}$$

La potenza di compressione è infine data da

$$|W_m| = G |l'| = 0,03 \cdot 218 = 6,55 \text{ kW}$$

#### Esercizio 4.19 (Soluzione redatta dallo studente Fabrizio Leverone)

Bisogna innanzitutto convertire la portata volumetrica in unità SI

$$G_{V1} \cdot = 50 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 50 \frac{\text{m}^3}{3600 \text{ s}} = 0,0139 \text{ m}^3/\text{s}$$

La portata massica (che rimane costante) è data da

$$G = \frac{G_{V1}}{v_1} = G_{V1} \cdot \frac{p_1}{RT_1} = 0.0139 \frac{100000}{296.8 \cdot 293.15} = 0.016 \text{ kg/s}$$

La pressione intermedia ottimale si ricava dalla radice quadrata del prodotto delle pressioni iniziale e finale:

$$p_i = \sqrt{p_1 p_2} = 249 \text{ kPa}$$

La potenza di compressione è data dalla somma dei contributi delle due trasformazioni adiabatiche (si ha quindi  $N=2$  nella formula seguente):

$$W_c = G \cdot l'_{ad2} = -G \cdot \frac{NRk}{k-1} T_1 \left( r_p^{\frac{k-1}{kN}} - 1 \right) =$$

$$-0.016 \cdot \frac{2 \cdot 296.8 \cdot 1.40}{0.4} 293.15 \left( 6.2^{\frac{0.4}{1.4 \cdot 2}} - 1 \right) = -2,90 \text{ kW}$$

Dato che il rigeneratore riporta la temperatura al valore iniziale, per ottenere la temperatura finale basta calcolarla tenendo conto solo dell'ultima trasformazione adiabatica la quale avviene sempre con temperatura iniziale di 20 °C ma con rapporto di compressione  $r_{p2} = r_{p1} = p_2/p_i \approx 2,5$ :

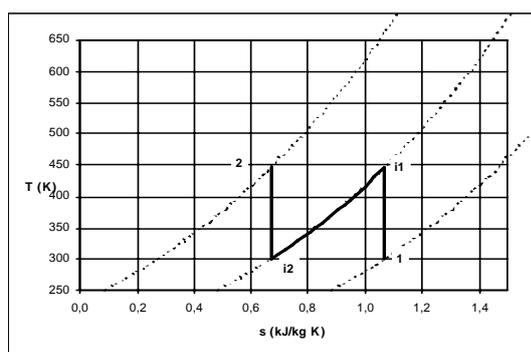
$$T_2 = T_1 \sqrt[k]{r_{p2}^{k-1}} = 293.15 \sqrt[1.4]{2.5^{0.4}} = 380 \text{ K}$$

La potenza scambiata con l'ambiente è dovuta solo alla trasformazione isobara di raffreddamento. Per altro, il calore scambiato in questa fase è uguale al lavoro compiuto sul gas nel primo stadio di compressione

$$W_t = G \cdot l'_{ad1} = -G \cdot \frac{Rk}{k-1} T_1 \left( r_{p1}^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) = -1.44 \text{ kW}$$

Per la portata volumetrica in uscita basta il volume specifico con i nuovi dati:

$$G_{V2} = G \cdot v_2 = G \cdot \frac{RT_2}{p_2} = 10.3 \text{ m}^3/\text{h}$$



**Nota:** l'allievo può verificare che la potenza di compressione è ottenibile anche mediante l'espressione

$$W_c = -NG \cdot c_p (T_2 - T_1)$$

#### Esercizio 4.20 (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

Facendo uso delle tabelle dell'acqua, si valutano dapprima le condizioni finali per una espansione ideale (isoentropica)

Stato 1:  $h_1 = 4020 \text{ kJ/kg}$   $s_1 = 7.67 \text{ kJ/kg K}$

Stato 2i:  $p_2 = 4.5 \text{ bar}$   $s_{2i} = s_1$   $h_{2i} = 3180 \text{ kJ/kg}$

Lo stato finale nella espansione reale può essere valutato utilizzando l'espressione del rendimento isoentropico

$$\eta_T = \frac{h_2 - h_1}{h_{2s} - h_1} = 0.85$$

$$h_2 = h_1 + \eta_T \cdot (h_{2i} - h_1) = 4020 + 0.85 \cdot (3180 - 4020) = 3.31 \cdot 10^3 \text{ kJ/kg}$$

Dal bilancio di energia sulla turbina (sistema adiabatico, aperto ed a regime) si ottiene il lavoro erogato e quindi la potenza

$$l' = (h_1 - h_2) = 4020 - 3310 = 710 \text{ kJ/kg}$$

$$W_m = G l' = 0.2 \cdot 710 = 142 \text{ kW}$$

Conoscendo l'entalpia della corrente in uscita e la pressione si ha infine:

$$\text{Stato 2: } T_2 = 418 \text{ }^\circ\text{C} \quad s_2 = 7.90 \text{ kJ/kg K}$$

### Esercizio 4.21 (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

I bilanci di energia e di entropia nello scambiatore sono:

$$G_w \cdot h_1 + G_R \cdot h_3 = G_w \cdot h_2 + G_R \cdot h_4$$

$$G_w \cdot s_1 + G_R \cdot s_3 + \dot{S}_{irr} = G_w \cdot s_2 + G_R \cdot s_4$$

Stato 3: vapore surriscaldato:  $h_3 = 457.1 \text{ kJ/kg}$   $s_3 = 1.803 \text{ kJ/kg K}$

Stato 4: liquido saturo:  $h_4 = 274.5 \text{ kJ/kg}$   $s_4 = 1.246 \text{ kJ/kg K}$

a) Dal bilancio di energia

$$G_w = \frac{G_R \cdot (h_3 - h_4)}{c \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{5.0 \cdot (457.1 - 274.5)}{60 \cdot 4.187 \cdot (25 - 15)} = 0.363 \text{ kg/s}$$

b) Dal bilancio di entropia

$$\dot{S}_{irr} = G_w \cdot (s_2 - s_1) + G_R \cdot (s_4 - s_3) = G_w \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + G_R \cdot (s_4 - s_3) =$$

$$= 0.363 \cdot 4.187 \cdot \ln \frac{298}{288} + \frac{5.0}{60} \cdot (1.246 - 1.803) = 5.46 \text{ W/K}$$

Si nota che, come prevedibile, vi è generazione di entropia: lo scambio termico con differenze finite di temperatura è un fenomeno irreversibile.

### Esercizio 4.22 (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

Bilancio di energia sullo scambiatore

$$G_R \cdot h_1 + G_a \cdot h_3 = G_R \cdot h_2 + G_a \cdot h_4$$

$p_1 = 10 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 60^\circ\text{C} \Rightarrow h_1 = 441.3 \text{ kJ/kg}$   $s_1 = 1.781 \text{ kJ/kg K}$

$p_2 = 10 \text{ bar}$ ,  $x_2 = 0 \Rightarrow h_2 = 255.4 \text{ kJ/kg}$   $s_2 = 1.188 \text{ kJ/kg K}$   $T_2 = 39.4^\circ\text{C}$

$$G_a \cdot (h_3 - h_4) = G_R \cdot (h_2 - h_1)$$

$$G_a \cdot c_p \cdot (T_3 - T_4) = G_R \cdot (h_2 - h_1)$$

$$T_4 = T_3 - \frac{G_R}{G_a \cdot c_p} \cdot (h_2 - h_1)$$

$$T_4 = 60 - \frac{10}{80 \cdot 1.01} \cdot (255.3 - 441.3) = 83^\circ\text{C}$$

Notare che, dato che nelle formule risolutive compare solo il rapporto delle portate, non è necessario riportare le medesime in unità SI.

Il bilancio entropico dello scambiatore è

$$G_R \cdot s_1 + G_a \cdot s_3 + \dot{S}_{irr} = G_R \cdot s_2 + G_a \cdot s_4$$

quindi

$$\begin{aligned} \dot{S}_{irr} &= G_R \cdot (s_2 - s_1) + G_a \cdot (s_4 - s_3) = G_R \cdot (s_2 - s_1) + G_a \cdot c_p \cdot \ln \frac{T_4}{T_3} = \\ &= \frac{10}{60} \cdot (1.188 - 1.781) + \frac{80}{60} \cdot 1.01 \cdot \ln \frac{356.15}{333.15} = -0.0988 + 0.0899 = -0.0089 \text{ kW/K} \end{aligned}$$

quindi lo scambiatore, pur non violando il primo principio della T.D., non è in grado di funzionare perché viola il secondo principio. Del resto, sarebbe sorprendente se l'R134a, condensando, cedesse *spontaneamente* del calore a una corrente di acqua a temperatura superiore ... una circostanza di cui il primo principio non tiene assolutamente conto.

## Capitolo 5

Le soluzioni degli esercizi 5.1-5.12 sono state redatte dallo studente Giacomo Garofalo

### Esercizio 5.1

Dati:

$$\mu = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\bar{w} = 4 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$$

$$D_H = 2.6 \text{ m}$$

Il numero di Reynolds si calcola:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{1030 \cdot 4 \cdot 2.6}{1.1 \cdot 10^{-3}} = 9.74 \cdot 10^6$$

### Esercizio 5.2

$$D = 100 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$s = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\bar{w} = 2.4 \text{ m/s}$$

Per l'acqua a 21°C si hanno i seguenti valori:

$$\rho = 997 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.978 \text{ mPa} \cdot \text{s}$$

Il diametro idraulico si ottiene dalla definizione

$$D_H = \frac{4A}{P}$$

Dove  $A$  è l'area della corona circolare di raggio interno  $r=25\text{mm}$  e raggio esterno  $R=48\text{mm}$  (questo valore del raggio esterno si ottiene sottraendo lo spessore  $s$  alla metà del diametro  $D$ );  $P$  è la somma del perimetro interno (di raggio  $r$ ) e del perimetro esterno (di raggio  $R$ ):

$$D_H = 4 \frac{R^2 \pi - r^2 \pi}{2R\pi + 2r\pi} = 46 \text{ mm}$$

Il numero di Reynolds si calcola:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{997 \cdot 2.4 \cdot 46 \cdot 10^{-3}}{0.978 \cdot 10^{-3}} = 112.5 \cdot 10^3$$

### Esercizio 5.3

Dati:

$$\mu = 25 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho = 0.83 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 120 \text{ m}$$

$$\text{rugosità relativa} = \frac{\text{rugosità media}}{\text{diametro idraulico}} = \frac{\varepsilon}{D_H} = 2 \cdot 10^{-6}$$

Dalla portata in volume ricavo il valore del diametro idraulico (e siccome il camino è circolare, il suo diametro è proprio il diametro idraulico):

$$Q = A\bar{w} = \frac{D_H^2}{4} \pi \bar{w}$$

Da cui si ricava:

$$D_H = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \bar{w}}} = 6.18 \text{ m}$$

Le perdite distribuite si calcolano con la seguente relazione:

$$h_{a,d} = \lambda (Re, \varepsilon/D_H) \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g}$$

Dato che il coefficiente di Darcy  $\lambda$  è funzione anche del numero di Reynolds oltre che della rugosità relativa  $\varepsilon$ , lo calcoliamo:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = 2.05 \cdot 10^6$$

Dato che il numero di Reynolds è maggiore di 10000, il moto del fluido è turbolento; per calcolare il coefficiente di Darcy  $\lambda$ , usiamo l'espressione di Haaland:

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7 D_H} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{2.05 \cdot 10^6} + \left( \frac{1}{3.7} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = 0.010$$

Ora che siamo in possesso di tutti i dati necessari, applichiamo la relazione precedentemente scritta:

$$h_{a,d} = \lambda (Re, \varepsilon/D_H) \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 0.010 \frac{120}{2 \cdot 10^{-6}} \frac{10^2}{2 \cdot 9.8} = 1.03 \text{ m}$$

### Esercizio 5.4

L'equazione generalizzata di Bernoulli è:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

Non essendoci variazioni di velocità e quota, i termini  $d\bar{w}^2$  e  $dz$  sono rispettivamente nulli. La prevalenza della pompa  $dh'$  è anch'essa nulla dato che nel nostro sistema non è presente una pompa.

L'equazione di Bernoulli si riscrive così:

$$\frac{dp}{\gamma} = -dh_a$$

Da cui si ricava:

$$dp = -\gamma \cdot dh_a$$

$$\Delta p = -\gamma \cdot h_a$$

Ricordando che

$$h_a = h_{a,d} = \lambda (Re, \varepsilon/D_H) \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g}$$

Bisogna, per prima cosa, calcolare il numero di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} = \frac{900 \cdot 0.5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2} = 4.5$$

Il moto è laminare; per trovare il coefficiente di Darcy posso usare la seguente relazione

$\lambda = \frac{c}{Re}$ , sapendo che per condotti a sezione circolare vale sempre  $c=64$ .

$$\lambda = \frac{c}{Re} = \frac{64}{4.5} = 14.2$$

Da cui si ricava

$$h_{a,d} = 36.26 \text{ m}$$

$$\Delta p = -\gamma \cdot h_a = -\rho g \cdot h_a = -9.8 \cdot 900 \cdot 36.26 = -320 \text{ kPa}$$

Il segno meno mi conferma che c'è una caduta di pressione tra ingresso ed uscita del tubo, com'è logico attendersi dato che non ci sono né pompe né dislivelli che possano "aiutare" il fluido a percorrere il condotto.

Il moto di un fluido cessa di essere laminare quando il numero di Reynolds supera il valore di 2000: è da questo valore infatti che si entra nella zona di transizione laminare-turbolenta. Basta sostituire questo valore nell'espressione del numero di Reynolds e ricavare da questa la velocità:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu} \Rightarrow \bar{w} = \frac{\mu Re}{\rho D_H} = \frac{2 \cdot 2000}{900 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 222 \text{ m/s}$$

### Esercizio 5.5

Sostituiamo il numero di Reynolds nell'espressione di Blasius:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_H}{\mu}$$

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} = \frac{0.316 \cdot \mu^{0.25}}{\rho^{0.25} \bar{w}^{0.25} D_H^{0.25}}$$

Sostituiamo a sua volta il coefficiente di Darcy appena calcolato nell'espressione delle perdite di carico distribuite:

$$h_{a,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = \frac{0.316 \mu^{0.25} L \bar{w}^2}{\rho^{0.25} \bar{w}^{0.25} D_H^{0.25} D_H 2g} = \frac{0.316 \mu^{0.25} L \bar{w}^{1.75}}{\rho^{0.25} 2g} \cdot \frac{1}{D_H^{1.25}}$$

Siccome vale:

$$G = A \bar{w} \rho = \frac{D_H^2}{4} \pi \bar{w} \rho \Rightarrow \bar{w} = \frac{4G}{D_H^2 \pi \rho}$$

Sostituisco quindi il valore della velocità trovato nell'espressione delle perdite di carico distribuite precedente, e ottengo:

$$h_{a,d} = \frac{0.316 \mu^{0.25} 4^{1.75} L G^{1.75}}{D_H^{3.5} \pi^{1.75} \rho^{1.75} \rho^{0.25} 2g} \cdot \frac{1}{D_H^{1.25}} = K \frac{1}{D_H^{4.75}}$$

### Esercizio 5.6

$$D = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda = 0,02$$

$L = 32 \text{ m}$  lunghezza della tubazione

$$H = z_1 - z_2 = 34 \text{ m}$$
 differenza di quota

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

Facciamo i seguenti assunti:

- La variazione di pressione  $dp$  è nulla dato che la pressione nel serbatoio è quella atmosferica (il serbatoio è aperto) e la pressione all'uscita della tubazione è anch'essa quella atmosferica (visto che la tubazione è aperta verso l'ambiente);
- La variazione di velocità  $d\bar{w}$  è non nulla: il fluido si trova in quiete nel serbatoio ma esce con una certa velocità dalla tubazione;
- $C'$  è una differenza di quota  $dz$  tra ingresso e uscita;
- Nel nostro sistema non sono presenti pompe, per cui la prevalenza  $dh'$  è nulla;
- Le perdite di carico  $dh_a$  non sono trascurabili.

L'equazione di Bernoulli si semplifica ed integra nel seguente modo, considerando che la velocità del fluido nella sezione 1 è trascurabile:

$$\frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = -dh_a$$

$$+ \frac{\alpha}{2g} (w_2^2) + (z_1 - z_2) = -h_a \quad \rightarrow \quad + \frac{\alpha}{2g} (w_2^2) + h_a = z_2 - z_1 = H$$

Le perdite di carico sono:

$$h_a = h_{a,d} + h_{a,c} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{w^2}{2g} + 1 \cdot \frac{w^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} \left( \frac{\lambda L}{D_H} + 1 \right)$$

in cui abbiamo considerato le perdite di carico concentrate dovute unicamente all'imbocco del serbatoio ( $K=1$ ).

Sostituendo il valore della perdite trovato nell'equazione di Bernoulli semplificata (e manipolando un po'), si ottiene:

$$\frac{\alpha}{2g} w_2^2 + \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{\lambda L}{D_H} + 1 \right) = H$$

$$\frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{\lambda L}{D_H} + 1 + \alpha \right) = H$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{\lambda L}{D_H} + 1 + \alpha}} = 4,4 \text{ m/s} \quad \text{dove } \alpha=1,06 \text{ per moto turbolento (da verificare a posteriori)}$$

$$G = A w \rho = \frac{D^2}{4} \pi w \rho = 1,36 \text{ kg/s}$$

L'assunzione fatta che il moto sia turbolento è verificabile una volta ricavata la velocità del fluido; infatti si verifica facilmente che il numero di Reynolds vale circa  $Re = 88000$ .

### Esercizio 5.7

Dati:

$$Q = 10 \text{ L/s} = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\mu = 82 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho = 918 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 30 \text{ m}$$

$$\Delta p = 30 \text{ kPa}$$

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

Non essendoci pompe ( $dh'$ ), dislivelli ( $dz$ ) o variazioni di velocità ( $dw$ ), l'equazione di Bernoulli si semplifica così:

$$\frac{dp}{\gamma} = -dh_a$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h_a$$

Le perdite sono in questo caso solo distribuite:

$$h_a = h_{a,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{w^2}{2g}$$

Supponendo il moto laminare, il coefficiente di Darcy ha la seguente espressione:

$$\lambda = \frac{c}{Re}$$

Per condotti a sezione circolare  $c=64$ . Sostituisco inoltre l'espressione del numero di Reynolds ottenendo:

$$\lambda = 64 \frac{\mu}{\rho w D_H}$$

Posso quindi scrivere:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h_a = 64 \frac{\mu}{\rho w D_H} \frac{L w^2}{D_H 2g}$$

Ricordando che

$$Q = Aw \Rightarrow w = \frac{Q}{A} = \frac{Q4}{D_H^2 \pi}$$

Sostituisco il valore della velocità  $w$  così trovato nell'espressione della perdita di carico  $h_a$  e proseguo:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{64 \mu L Q 4}{2g \rho D_H^2 D_H^2 \pi} = \frac{128 \mu L Q}{\rho g \pi D_H^4}$$

Da cui si ottiene il valore del diametro idraulico cercato:

$$D_H = \sqrt[4]{\frac{128 \mu L Q \rho g}{\rho g \pi \Delta p}} = \sqrt[4]{\frac{128 \mu L Q}{\pi \Delta p}} = 75 \text{ mm}$$

Bisogna verificare l'ipotesi iniziale, ossia che il moto del fluido sia laminare. Per fare ciò calcoliamo preliminarmente la velocità  $w$  che si ottiene in corrispondenza del diametro appena trovato:

$$w = \frac{4Q}{D_H^2 \pi} = 2,21 \text{ m/s}$$

In condizioni di moto laminare, il numero di Reynolds deve essere minore di 2000:

$$Re = \frac{\rho w D_H}{\mu} = 1880 < 2000$$

L'ipotesi è quindi verificata.

### Esercizio 5.8

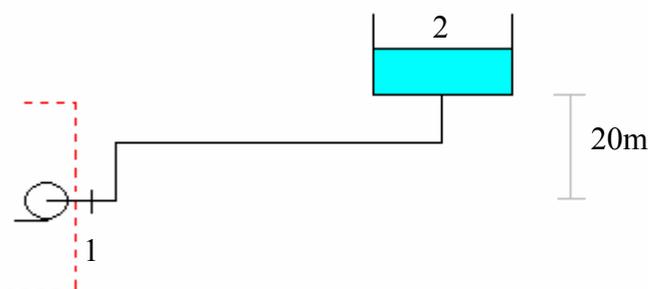
Trasformiamo le unità di misura della portata volumetrica in quelle del Sistema Internazionale:

$$G_V = 185 \text{ m}^3/\text{h} = 0,051 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dalla portata volumetrica ricaviamo il valore della velocità  $w$ :

$$G_V = Aw \Rightarrow w = \frac{G_V}{A} = \frac{4G_V}{D^2 \pi}$$

Lo schema dell'impianto è il seguente:



Il sistema che prendiamo in considerazione è quello *a valle* della pompa, ossia quello rappresentato nello schema ma pompa esclusa. Tralasciamo la pompa perché il problema non ci fornisce dati su di essa mentre conosciamo i valori di pressione (9 bar) e velocità ( $w$ ) immediatamente al di fuori di questa.

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

L'unico termine che si può elidere è proprio la prevalenza della pompa  $dh'$ , visto che la pompa è esterna al sistema e quindi non la consideriamo.

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = -dh_a$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} w_1^2 = z_2 - h_a$$

Le perdite di carico  $h_a$  sono date dalla somma delle perdite distribuite  $h_{a,d}$  e concentrate  $h_{a,c}$ .

Le perdite di carico distribuite  $h_{a,d}$  si calcolano con la solita espressione nella quale bisogna sostituire alla velocità  $w$ , il valore calcolato all'inizio, funzione della portata volumetrica.

$$h_{a,d} = \lambda (Re, \varepsilon/D_H) \frac{L}{D_H} \frac{w^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{8G_V^2}{D_H^4 \pi^2 g} = \frac{8L\lambda G_V^2}{\pi^2 g} \frac{1}{D_H^5} = K_1 \frac{1}{D_H^5}$$

Analogo discorso per le perdite di carico concentrate  $h_{a,c}$ :

$$h_{a,c} = \sum K_i \frac{w_i^2}{2g} = (3 \cdot 0,5 + 2 \cdot 1) \frac{w^2}{2g} = \frac{2,5 \cdot 16G_V^2}{2gD_H^4 \pi^2} = \frac{20G_V^2}{\pi^2 g} \frac{1}{D_H^4} = K_2 \frac{1}{D_H^4}$$

Ora esprimiamo il termine  $\frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2$  dell'equazione di Bernoulli, in funzione della portata

volumetrica, con l'espressione  $w = \frac{4G_V}{D^2 \pi}$ :

$$\frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 = \frac{16\alpha G_V^2}{2gD_H^4 \pi^2} = \frac{8\alpha G_V^2}{\pi^2 g} \frac{1}{D_H^4} = K_3 \frac{1}{D_H^4}$$

L'equazione di Bernoulli diventa quindi:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} + K_3 \frac{1}{D_H^4} = z_2 + K_1 \frac{1}{D_H^5} + K_2 \frac{1}{D_H^4}$$

Svolgendo i calcoli, si verifica che i termini in  $K_2$  e  $K_3$  sono trascurabili rispetto a quello in  $K_1$ , in quanto inferiori di un ordine di grandezza. Riscrivo la precedente relazione semplificandola:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = z_2 + K_1 \frac{1}{D_H^5}$$

Da cui si ricava il valore del diametro richiesto:

$$D_H^5 \left( \frac{\Delta p}{\gamma} - z_2 \right) = K_1$$

$$D_H^5 = \frac{\gamma K_1}{\Delta p - \gamma z_2}$$

$$D_H = \sqrt[5]{\frac{8\lambda \rho L G_V^2}{\pi^2 (\Delta p - \gamma z_2)}} = 0,13 \text{ m}$$

Controllo quindi che l'ipotesi  $\lambda = 0,04$  sia ragionevole, calcolando il valore del coefficiente di Darcy con la relazione di Haaland:

$$w = \frac{4G_V}{D_H^2 \pi} = 3,84 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho w D_H}{\mu} = 5116,8$$

Assumendo per la rugosità relativa ( $\varepsilon/D_H$ ) un valore di 0,5, si ottiene

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7 D_H} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{5116,8} + \left( \frac{1}{3.7} \cdot 0,5 \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = 0.037$$

L'ipotesi è quindi verificata.

### Esercizio 5.9

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

La precedente si può semplificare perché:

- $dp=0$ , in quanto il fluido nei serbatoi (aperti) si trova a pressione atmosferica;
- $d\bar{w}=0$ , in quanto, in entrambi i serbatoi, il fluido si trova in condizioni di quiete;
- $dh'=0$ , in quanto nel sistema non è presente alcuna pompa.

L'equazione di Bernoulli si può quindi riscrivere:

$$dz = -dh_a$$

$$z = h_{a,d}$$

$$z = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{w^2}{2g}$$

La velocità del fluido  $w$  si può esprimere in funzione della portata volumetrica  $G_V$ :

$$G_V = Aw = \frac{D_H^2}{4} \pi w \Rightarrow w = \frac{4G_V}{D_H^2 \pi}$$

Si ricava quindi:

$$z = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{16G_V^2}{2gD_H^4 \pi^2}$$

$$G_V = \sqrt{\frac{gz\pi^2 D_H^5}{8\lambda L}} = 0,49 \text{ m}^3/\text{s}$$

Per determinare la potenza di pompaggio (e quindi la prevalenza della pompa  $dh'$ ) riscriviamo l'equazione di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

Per i motivi già spiegati in precedenza, consideriamo nulli  $dp$  e  $dw$ . Naturalmente  $dh'$  non viene più semplificata dato che è l'incognita da calcolare.

$$dz = dh' - dh_a$$

$$\text{caso b : } h' = h_{a,d} - z$$

$$\text{caso c : } h' = h_{a,d} + z$$

Le perdite di carico distribuite valgono:

$$h_{a,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = \frac{8\lambda L G_V^2}{g\pi^2 D_H^5} = 74.86 \text{ m}$$

Si ottiene

$$\text{caso b : } h' = h_{a,d} - z = 74.86 - 45 = 29.87 \text{ m}$$

$$\text{caso c : } h' = h_{a,d} + z = 74.86 + 45 = 119.87 \text{ m}$$

Il valore del coefficiente di Darcy si trova con il diagramma di Moody, o analogamente, con la relazione di Haaland:

$$w = \frac{4G_V}{D_H^2 \pi} = 2.21 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho w D_H}{\mu} = 1.47 \cdot 10^6$$

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7 D_H} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{1.47 \cdot 10^6} + \left( \frac{900 \cdot 10^{-6}}{3.7 \cdot 0.6} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = 0.022$$

### Esercizio 5.10

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

- Non c'è motivo per cui ci debbano essere cadute di pressione: il sistema che studiamo è semplicemente un condotto aperto alle due estremità:  $dp=0$ ;
- Non ci sono variazioni di velocità per cui è  $dw=0$ ;
- Il condotto è orizzontale, non ci sono pertanto variazioni di quota:  $dz=0$ .

L'equazione di Bernoulli si scrive quindi così:

$$dh' - dh_a = 0$$

$$h' = h_{a,d}$$

Per calcolare le perdite di carico distribuite è necessario trovare prima  $w$ ,  $Re$ ,  $\lambda$ :

$$w = \frac{4G_V}{D_H^2 \pi} = 1.02 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho w D_H}{\mu} = 4.03 \cdot 10^6$$

Per calcolare il valore del coefficiente di Darcy non si può usare la legge di Blasius, benché il tubo sia liscio, perché il campo di validità di suddetta legge per quanto riguarda il numero Reynolds è:

$$4000 < Re < 10^5$$

Uso quindi la relazione di Haaland, assumendo però  $\varepsilon/D_H = 0$ :

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7 D_H} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} \right] \right\}^{-2} = 0.01$$

$$h_{a,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 78.7 \text{ m}$$

$$h' = h_{a,d} = 78.7 \text{ m}$$

La potenza di pompaggio è data dalla seguente relazione:

$$W_p = g \cdot G \cdot h' = g \cdot G_V \rho \cdot h' = 15 \text{ MW}$$

### Esercizio 5.11

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

Non essendoci pompe, dislivelli o variazioni di velocità, sono rispettivamente nulli i termini  $dh'$ ,  $dz$  e  $dw$ . L'equazione si riscrive così:

$$\frac{dp}{\gamma} = -dh_a$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h_{a,d}$$

Per calcolare le perdite di carico distribuite è necessario trovare prima  $w$ ,  $Re$ ,  $\lambda$ :

$$w = \frac{4G_V}{D_H^2 \pi} = 3.18 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho w D_H}{\mu} = 636$$

Il moto del fluido è quindi laminare. Calcolo il coefficiente di Darcy con l'apposita formula, ricordando che per condotti a sezione circolare vale  $c=64$ :

$$\lambda = \frac{c}{\text{Re}} = \frac{64}{636} = 0.1$$

le perdite di carico distribuite valgono quindi:

$$h_{a,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = 51.6 \text{ m}$$

$$\Delta p = \gamma \cdot h_{a,d} = \rho g \cdot h_{a,d} = 408 \text{ kPa}$$

Se le perdite di carico si riducono ad un terzo del valore appena calcolato, il loro valore sarà:

$$\tilde{h}_{a,d} = \frac{h_{a,d}}{3} = 17.2 \text{ m}$$

Sapendo che:

$$w = \frac{4G_V}{D_H^2 \pi}$$

$$\lambda = \frac{c}{\text{Re}} = 64 \cdot \frac{\mu}{\rho w D_H^2} = \frac{16 \mu D \pi}{\rho G_V}$$

Sostituisco i valori trovati nell'espressione delle perdite di carico distribuite e ottengo:

$$h_{a,d} = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\bar{w}^2}{2g} = \frac{128 \mu L G_V}{\rho g \pi D_H^4}$$

Da cui si ricava il valore del diametro cercato:

$$D_H = \sqrt[4]{\frac{128 \mu L G_V}{\rho g \pi \cdot \tilde{h}_{a,d}}} = 0.132 \text{ m}$$

### Esercizio 5.12

Dati:

$D_{cond} = 400 \text{ mm} = 0.4 \text{ m}$  diametro condotta;

$d_{ug} = 100 \text{ mm} = 0.1 \text{ m}$  diametro finale dell'ugello.

Si scrive l'equazione generalizzata di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

- Non ci sono cadute di pressione: il sistema che studiamo è composto da un serbatoio aperto (in cui il fluido è quindi a pressione atmosferica) che, tramite una condotta forzata, termina in un ugello anch'esso aperto verso l'ambiente;
- Non essendoci pompe la prevalenza  $dh'$  è nulla;
- La velocità iniziale è nulla (nel serbatoio il fluido si trova in quiete) mentre la finale è quella che si osserva all'uscita dell'ugello  $w_{ug}$ .
- Le perdite di carico da considerare sono solo quelle distribuite; dato che l'ugello è ben rastremato si trascurano le perdite di carico distribuite al suo interno: le perdite di carico da calcolare sono quindi quelle distribuite nella condotta *a monte* dell'ugello. La velocità da considerare è quella nella condotta  $w_{cond}$  (che è naturalmente diversa da quella al termine dell'ugello).

L'equazione di Bernoulli si può quindi riscrivere così:

$$\frac{\alpha}{2g} w_{ug}^2 - h = -\lambda \frac{L}{D_{cond}} \frac{w_{cond}^2}{2g}$$

Però all'interno di quest'equazione sono incognite sia la velocità in uscita dall'ugello  $w_{ug}$  sia la velocità all'interno della condotta  $w_{cond}$ .

Il legame tra queste due grandezze è dato dalla principio di conservazione della massa espresso come portata costante nel sistema, cioè:

$$G = \rho w_{ug} A_{ug} = \rho w_{cond} A_{cond} = cost.$$

Ipotizzando il fluido incomprimibile,  $\rho$  rimane costante per cui posso scrivere:

$$\rho w_{ug} A_{ug} = \rho w_{cond} A_{cond} \Rightarrow w_{ug} A_{ug} = w_{cond} A_{cond} \Rightarrow w_{ug} \frac{\pi d_{ug}^2}{4} = w_{cond} \frac{\pi D_{cond}^2}{4}$$

$$w_{cond} = w_{ug} \frac{d_{ug}^2}{D_{cond}^2}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione di Bernoulli semplificata si ottiene:

$$\frac{\alpha}{2g} w_{ug}^2 - h = -\lambda \frac{L}{D_{cond}} \frac{w_{ug}^2 \frac{d_{ug}^4}{D_{cond}^4}}{2g}$$

$$w_{ug} = \sqrt{\frac{2gh}{\alpha + \lambda L \frac{d_{ug}^4}{D_{cond}^5}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 900}{1.06 + 0.02 \cdot 1500 \frac{0.1^4}{0.4^5}}} = 118 \text{ m/s}$$

La portata di acqua G si ottiene immediatamente dall'espressione:

$$G = \rho w_{ug} A_{ug} = \rho w_{ug} \frac{\pi d_{ug}^2}{4} = 926 \text{ kg/s}$$

Per calcolare la pressione prima della restrizione dell'ugello consideriamo il sistema parziale costituito da bacino e condotta, trascurando proprio l'ugello. Per un tale sistema scriviamo l'equazione di Bernoulli:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} d\bar{w}^2 + dz = dh' - dh_a$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{\alpha}{2g} w_{cond}^2 - h = -h_a$$

La semplificazione è possibile perché non ci sono organi meccanici per cui  $dh' = 0$ ;  $\Delta p$  indica la pressione relativa, la differenza tra la pressione atmosferica (a cui si trova il fluido nel bacino) e quella all'uscita della condotta.

Il valore della velocità nella condotta è dato dalla seguente relazione:

$$w_{cond} = w_{ug} \frac{d_{ug}^2}{D_{cond}^2} = 118 \cdot \frac{0.1^2}{0.4^2} = 7.375 \text{ m/s}$$

Ricordando che  $\gamma = \rho g$ , il valore della pressione vale:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h - \frac{\alpha}{2g} w_{cond}^2 - h_a \Rightarrow \Delta p = \rho g h - \frac{\alpha \rho}{2} w_{cond}^2 - \frac{\lambda \rho}{2} \frac{L}{D_{cond}} w_{cond}^2 = 6.53 \text{ MPa}$$

La potenza meccanica teoricamente ottenibile dal getto d'acqua è:

$$W' = G \cdot e_{c,ug}$$

L'energia cinetica specifica all'ugello vale:

$$e_{c,ug} = \frac{1}{2} w_{ug}^2 = 6.96 \text{ kJ}$$

da cui:

$$W' = G \cdot e_{c,ug} = 926 \cdot 6.96 = 6.45 \text{ MW}$$

La potenza meccanica teoricamente disponibile è data da:

$$W'' = G \cdot e_p$$

L'energia potenziale specifica si calcola nel seguente modo:

$$e_p = gh = 8.82 \text{ kJ}$$

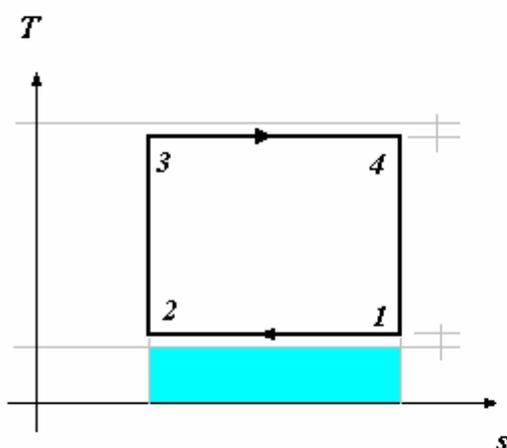
da cui:

$$W'' = G \cdot e_p = 926 \cdot 8.82 = 8.17 \text{ MW}$$

La differenza tra  $W''$  e  $W'$  (1.72 MW) è stata dissipata a causa delle perdite di carico nel condotto. Se tale quantità è giudicata elevata, il metodo più elementare per ridurla è allargare il diametro del condotto, riducendo così la velocità del fluido e quindi anche le perdite di carico.

Capitolo 6

Esercizio 6.1 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)



	$p$ [bar]	$v$ [m <sup>3</sup> /kg]	$T$ [°C]
1	2.32		270
2	2.03		270
3	40	0.03	1000
4	45.67	0.08	1000

Nelle celle evidenziate si trovano i valori di input.

Il rendimento del ciclo di Carnot si calcola con la seguente formula (ricordando che le temperature vanno espresse in gradi kelvin):

$$\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{(270 + 273.15)}{(1000 + 273.15)} = 0.573$$

La pressione al punto 4 ( $p_4$ ) si calcola con l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$pv = RT \Rightarrow p_4 v_4 = RT_4 \Rightarrow p_4 = \frac{RT_4}{v_4} = \frac{287 \cdot (1000 + 273.15)}{0.08} = 45.67 \text{ bar}$$

Calcoliamo ora le potenze termiche  $W_{TF}$  e  $W_{TC}$  scambiate tra sistema ed esterno e la potenza meccanica utile ottenuta  $W_m$ .

Come si vede anche dal grafico, il ciclo di Carnot è formato da due isoterme (1-2 , 3-4) e da due isoentropiche (2-3 , 4-1); per queste ultime, come si evince dal grafico, possiamo scrivere:

$$ds_{23} = s_2 - s_3 = ds_{41} = s_4 - s_1 = 0$$

Per i gas perfetti la variazione di entropia è espressa con la seguente espressione:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Grazie alla condizione di isoentropicità, la precedente si può semplificare e si ottiene:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_p \ln \frac{T_2}{T_3} = R \ln \frac{p_2}{p_3} \Rightarrow p_2 = p_3 \left( \frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{c_p}{R}} = 2.03 \text{ bar} \\ c_p \ln \frac{T_1}{T_4} = R \ln \frac{p_1}{p_4} \Rightarrow p_1 = p_4 \left( \frac{T_1}{T_4} \right)^{\frac{c_p}{R}} = 2.32 \text{ bar} \end{cases}$$

La potenza termica ceduta dal sistema all'ambiente ( $W_{TF}$ ) è l'area sottesa dalla "curva" 1-2: siccome la curva in questione è una retta, l'area richiesta è quella del rettangolo evidenziata e si calcola nel seguente modo:

$$|W_{TF}| = T_F (s_1 - s_2)$$

La quantità  $s_1 - s_2$  si ottiene dalla relazione già scritta in precedenza che descrive la variazione dell'entropia per i gas perfetti:

$$s_1 - s_2 = c_p \ln \frac{T_1}{T_2} - R \ln \frac{p_1}{p_2} = -R \ln \frac{p_1}{p_2} = 38 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

Per ovvie ragioni geometriche  $s_4 - s_3 = s_1 - s_2$ .

Si ottengono quindi le quantità cercate:

$$|W_{TF}| = T_F (s_1 - s_2) = 20.64 \text{ kW}$$

$$|W_{TC}| = T_C (s_4 - s_3) = 48.83 \text{ kW}$$

$$|W_m| = |W_{TC}| - |W_{TF}| = 27.74 \text{ kW}$$

Si può calcolare nuovamente il rendimento, questa volta considerandolo come il rapporto tra "l'effetto utile prodotto" (e cioè la potenza meccanica utile, trattandosi di macchina termica semplice motrice) e "la spesa sostenuta per ottenerlo" (ossia la potenza termica prelevata dal serbatoio di energia termica a temperatura più elevata):

$$\eta_c = \frac{|W_m|}{|W_{TC}|} = 0.573$$

La soluzione naturalmente coincide con quella precedentemente trovata.

### Esercizio 6.2 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Si ha:

$$|W_{TC}| = 2000 \text{ kJ}$$

$$|W_{TF}| = 600 \text{ kJ}$$

$$|W_m| = 1700 \text{ kJ}$$

Il bilancio energetico del ciclo è:

$$|W_{TC}| - |W_{TF}| - |W_m| = 2000 - 600 - 1700 = -300 \neq 0$$

Il bilancio risulta non nullo, quindi in disaccordo con il principio di conservazione dell'energia. Un ciclo con simili prestazioni è pertanto impossibile da realizzare.

### Esercizio 6.3 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Dati:

$$T_C = 550^\circ\text{C}$$

$$T_F = 30^\circ\text{C}$$

Tra tutti i cicli termodinamici che hanno queste temperature estreme, quello a rendimento maggiore è il ciclo di Carnot:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{30 + 273.15}{550 + 273.15} = 0.635$$

Non è possibile che, a parità di temperature estreme, un qualsiasi ciclo termodinamico (compreso il ciclo Rankine in esame) abbia rendimento superiore a  $\eta_c$ .

**Esercizio 6.4** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Dati:

$$T_C = 25^\circ\text{C}$$

$$T_F = 5^\circ\text{C}$$

$$|W_{TC}| = 10 \text{ kW}$$

Il coefficiente di prestazione della migliore macchina operatrice (ossia della macchina termica inversa reversibile) è dato da:

$$COP_{p,REV} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 14.9$$

Il coefficiente di prestazione si può esprimere anche in altra forma:

$$COP_{p,REV} = \frac{|W_{TC}|}{|W_m|} \Rightarrow |W_m| = \frac{|W_{TC}|}{COP_{p,REV}} = 0.671 \text{ kW}$$

**Esercizio 6.5** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Dati:

$$W_{el} = 1000 \text{ MW}$$

$$G = 50 \text{ t/s} = 50000 \text{ kg/s}$$

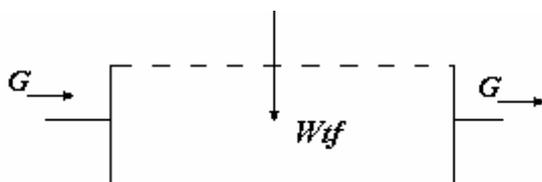
Si può calcolare il rendimento considerandolo come il rapporto tra “l’effetto utile prodotto” (e cioè la potenza elettrica ottenuta) e “la spesa sostenuta per ottenerlo” (ossia la potenza termica prelevata dal serbatoio di energia termica a temperatura più elevata):

$$\eta = \frac{|W_{el}|}{|W_{TC}|} = 0.412 \Rightarrow |W_{TC}| = \frac{|W_{el}|}{\eta} = \frac{1000}{0.412} = 2427 \text{ MW}$$

Il condensatore serve per scambiare la potenza termica ceduta dal sistema al serbatoio di energia termica a temperatura inferiore; la potenza termica interessata è quindi la  $W_{TF}$ , che si calcola facendo il bilancio di energia del sistema:

$$|W_{TF}| = |W_{TC}| - |W_{el}| = 1427 \text{ MW}$$

A questo punto non rimane che fare il bilancio di energia del secondario del condensatore, qui sotto schematizzato:



$$W_{TF} + G(h_i - h_u) = 0$$

$$W_{TF} = G(h_u - h_i) = 4.2G\Delta T$$

L’ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l’entalpia dell’acqua sottoraffreddata può essere valutata con la seguente espressione:

$$h \cong 4.2T$$

La variazione di temperatura dell'acqua vale quindi:

$$\Delta T = \frac{W_{TF}}{4.2G} = 6.8 \text{ K}$$

**Esercizio 6.6** (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

a. Applicando il primo principio della termodinamica al motore termico abbiamo:

$$W_{TC} = W_{TF} + W_M = 9.0 + 7.5 = 16.5 \text{ kW}$$

il rendimento del motore è quindi

$$\eta = \frac{W_M}{W_{TC}} = \frac{7.5}{16.5} = 0.455$$

b. Il rendimento di un motore che operasse in maniera reversibile tra le stesse due sorgenti termiche dovrebbe essere funzione soltanto delle temperature di queste ultime, essendo in particolare

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{323.15}{673.15} = 0.520$$

dal momento che  $\eta < \eta_{rev}$ , si può concludere che il motore opera seguendo un ciclo irreversibile con produzione entropica.

**Esercizio 6.7** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Valutiamo la disponibilità specifica del sistema assumendo

$$T_0 = 25^\circ\text{C}$$

$$p_0 = 101.3 \text{ kPa} = 1 \text{ bar}$$

$$a = (u + e_c + e_p - u_0) - T_0 (s - s_0) - p_0 (v_0 - v)$$

Per un fluido incomprimibile si hanno le seguenti semplificazioni:

$$dv = v_0 - v = 0$$

$$du = u - u_0 = c \cdot dT = c(T - T_0)$$

$$ds = c \frac{dT}{T}$$

L'espressione della disponibilità si può quindi semplificare:

$$a = c(T - T_0) - T_0 c \ln \frac{T}{T_0} = 12.9 \text{ kJ/kg}$$

$$A = a \cdot M = 25.8 \text{ kJ}$$

**Esercizio 6.8** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Considero il freno da un punto di vista termodinamico e ne faccio il bilancio energetico:

$$W_t + G(h_i - h_u) = 0$$

Il freno è una macchina completamente dissipativa, trasforma tutta la potenza meccanica in potenza termica. Nel bilancio energetico è del tutto equivalente inserire quindi l'espressione della potenza meccanica  $W_m$  o l'espressione della potenza termica  $W_t$ , e questo si esprime matematicamente come:

$$|W_m| = |W_t| = 50 \text{ kW}$$

Ricordando la relazione che lega, per un fluido incomprimibile, la variazione di entalpia alla temperatura

$$h \cong 4.2T$$

calcolo il valore della portata richiesto:

$$G = \frac{W_t}{4.2 \cdot \Delta T} = \frac{50000}{4.2 \cdot (70 - 25)} = 0.27 \text{ kg/s}$$

Ricordando che la disponibilità del fluido che si trova allo stato morto ( $T_0, p_0, h_0$ ) è nulla (e quindi ( $a_{f,i} = 0$ ), la disponibilità distrutta è data dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{irr} &= W_t - G(a_{f,u} - a_{f,i}) = W_t - G \cdot a_{f,u} = W_t - G \left[ c(T - T_0) - cT_0 \ln \frac{T}{T_0} \right] = \\ &= 50000 - 0.27 \left[ 4186(343 - 298) - 4186 \cdot 298 \ln \frac{343}{298} \right] = 46.5 \text{ kW} \end{aligned}$$

La disponibilità distrutta è inferiore alla potenza meccanica introdotta nel sistema perché parte di essa viene recuperata sotto forma di calore dal flusso di acqua, che si scalda.

Si osserva che la disponibilità distrutta è data dalla differenza tra la potenza meccanica introdotta meno l'aumento di disponibilità dovuto all'innalzamento della temperatura dell'acqua di raffreddamento (che in uscita ha un temperatura  $T > T_0$ )

Si può definire un rendimento di secondo principio del freno come:

$$\varepsilon = \frac{\text{disponib. recuperata dall'acqua}}{\text{disponib. distrutta dal freno}} = \frac{3.5}{50} = 0.07$$

Il freno distrugge il 93% della disponibilità che si introduce sotto forma di potenza meccanica mentre si recupera il 7% di detta disponibilità sotto forma di calore che si manifesta con un aumento di temperatura dell'acqua di raffreddamento.

### Esercizio 6.9 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Nel caso di compressione adiabatica e reversibile (e quindi isoentropica) la temperatura al termine della trasformazione 1-2i è:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow c_p \ln \frac{T_{2i}}{T_1} = R \ln \frac{p_{2i}}{p_{31}} \Rightarrow T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_{2i}}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 538 \text{ K}$$

Nel caso di compressione reale (e quindi caratterizzata da un rendimento di compressione  $\eta_c$  minore di uno) la temperatura al termine della trasformazione 1-2r è:

$$\eta_c = \frac{h_{2i} - h_1}{h_{2r} - h_1} = \frac{T_{2i} - T_1}{T_{2r} - T_1} \Rightarrow T_{2r} = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 598 \text{ K}$$

	$p$ [bar]	$T$ [K]
1	1.013	298
2i	8	538
2r	8	598

La potenza assorbita (che avrà segno negativo in quanto trattasi di potenza fornita dall'ambiente al sistema) vale, nel caso reale:

$$W_c = -c_p G \Delta T = -1005 \cdot 0.3 \cdot (598 - 298) = -90.45 \text{ kW}$$

La potenza minima di compressione si ha quando la disponibilità fornita al fluido sotto forma di lavoro di compressione si trasferisce completamente al fluido sotto forma di aumento di pressione e temperatura.

Matematicamente si scrive:

$$W_{c,\min} = G(a_{f,i} - a_{f,u})$$

Siccome il fluido all'ingresso si trova allo stato morto ( $T_0, p_0, h_0$ ) la sua disponibilità è nulla ( $a_{f,i} = 0$ ). Passiamo a calcolare il valore della potenza:

$$W_{c,\min} = -Ga_{f,u} = -G[h - h_0 - T_0(s - s_0)] = -G\left[c_p(T - T_0) - T_0\left(c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0}\right)\right] = -81.22 \text{ kW}$$

Dove abbiamo usato le seguenti relazioni, valide per calcolare le variazioni di entalpia ed entropia nei gas perfetti:

$$dh = c_p dT$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Il rendimento di secondo principio si calcola immediatamente:

$$\varepsilon = \frac{W_{c,\min}}{W_c} = \frac{81.22}{90.45} = 0.90$$

Questo significa che il 90% della disponibilità fornita dal compressore al fluido come lavoro meccanico effettivamente contribuisce ad aumentarne i valori di pressione e temperatura mentre il restante 10% della disponibilità viene sprecato in attriti e irreversibilità.

### Esercizio 6.10 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Dati:

$$G = 10 \text{ t/h} = 2.78 \text{ kg/s}$$

	$T$ [°C]	$p$ [bar]	$v$ [ $m^3/Kg$ ]	$u$ [ $kJ/Kg$ ]	$h$ [ $kJ/Kg$ ]	$s$ [ $kJ/Kg \cdot K$ ]	$x$
1	300	40	$5.884 \cdot 10^{-2}$	2725.34	2960.69	6.361	-
2i	99.63	1	1.414	2161.79	2303.29	6.361	0.8352
2r	99.63	1	1.513	2283.42	2434.77	6.7137	0.8934
3	25	1	$1.012 \cdot 10^{-3}$	104.86	104.96	0.367	-

Nel caso di espansione reale (e quindi caratterizzata da un certo rendimento di espansione  $\eta_t$ ) la temperatura al termine della trasformazione 1-2r è:

$$\eta_t = \frac{h_{2i} - h_1}{h_{2r} - h_1} \Rightarrow h_{2r} = h_1 + \eta_t (h_{2i} - h_1) = 2434.77 \text{ kJ/kg}$$

La potenza massima disponibile si ottiene dal bilancio di disponibilità per un sistema aperto a regime. Si tratta della massima potenza ottenibile dal fluido nella trasformazione 1-3, cioè da 1 allo stato morto, perché i valori dello stato 3 sono proprio quelli dello stato morto. Ricordando che  $T_0 = T_3 = 298K$  matematicamente si ha:

$$W'_{m,a} = G(a_{f,i} - a_{f,u}) = G[(h_1 - h_3) - T_0(s_1 - s_3)] = \\ = 2.78[(2960.69 - 104.96) - 298(6.361 - 0.367)] = 2.96 \text{ MW}$$

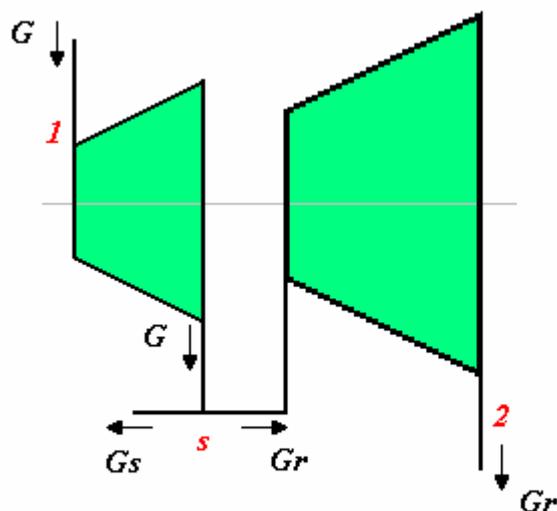
La potenza erogata vale:

$$W'_m = G(h_1 - h_{2r}) = 1.42 \text{ MW}$$

L'efficienza di secondo principio si calcola immediatamente:

$$\varepsilon = \frac{W'_m}{W'_{m,a}} = \frac{1.42}{2.96} = 0.48$$

**Esercizio 6.11** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)



	$T$ [°C]	$p$ [bar]	$u$ [kJ/kg]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kg K]	$x$
1	350	30	2843.70	3115.30	6.7428	-
s	200	5	2642.90	2855.40	7.0592	-
2	53.97	0.15	2226.42	2361.78	7.2831	0.9
Punto Morto $P_0$	25	1	104.86	104.96	0.367	-

Nelle celle evidenziate si trovano i valori di input.

Facciamo alcune considerazioni.

Una turbina con uno spillamento va studiata con le dovute cautele perché è necessario tenere a mente che la portata al suo interno non rimane costante durante la trasformazione 1-2 ma passa dal valore  $G$  (a monte dello spillamento) al valore  $G_r$  (a valle dello spillamento). La turbina si può considerare analoga ad una turbina multistadio dove nel primo stadio avviene l'espansione della portata  $G$  (trasformazione 1-s) e nel secondo stadio avviene l'espansione della portata  $G_r$  (trasformazione s-2).

Inoltre, dato che le perdite termiche avvengono alla temperatura dello stato morto, non contribuiscono in alcun modo alla disponibilità del sistema, non potendo produrre lavoro e perciò non le considereremo.

Le portate sono tutte note, e indicando con  $G_s$  la portata spillata, valgono:

$$G = 30 \text{ kg/s}$$

$$G_s = 5 \text{ kg/s}$$

$$G_r = G - G_s = 25 \text{ kg/s}$$

La potenza erogata dalla turbina è pertanto la somma delle potenze erogate singolarmente dai due stadi:

$$W'_m = G(h_1 - h_s) + G_r(h_s - h_2) = 7.7 \text{ MW} + 12.3 \text{ MW} = 20.0 \text{ MW}$$

La potenza meccanica sviluppata nel secondo stadio è maggiore in quanto il salto entalpico della trasformazione s-2 è maggiore del salto entalpico della trasformazione 1-s.

Le exergie del vapore si ottengono direttamente:

$$a_{f,i} = (h_1 - h_0) - T_0(s_1 - s_0) = 1109.6 \text{ kJ/kg} \quad \text{exerg.vapore ingresso}$$

$$a_{f,u,s} = (h_s - h_0) - T_0(s_s - s_0) = 755.3 \text{ kJ/kg} \quad \text{exerg.vapore spillato}$$

$$a_{f,u,2} = (h_2 - h_0) - T_0(s_2 - s_0) = 195.0 \text{ kJ/kg} \quad \text{exerg.vapore uscita al punto 2}$$

La potenza massima erogabile dalla turbina è data dalla somma delle potenze massime erogabili singolarmente dai due stadi. Si ha quindi:

$$W'_{m,a} = G(a_{f,i} - a_{f,u,s}) + G_r(a_{f,u,s} - a_{f,u,2}) = 10.6 \text{ MW} + 14 \text{ MW} = 24.6 \text{ MW}$$

Il rendimento di secondo principio è dato dal seguente rapporto:

$$\varepsilon = \frac{W'_m}{W'_{m,a}} = \frac{20.0}{24.6} = 0.811$$

Capitolo 7

**Esercizio 7.8** (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

a) Con riferimento ai dati del programma CATT, o al diagramma di Mollier del vapor d'acqua saturo, possiamo rappresentare i dati relativi al ciclo nella successiva tabella (in cui la coppia di dati a partire dai quali si ricavano le altre variabili è evidenziata in colore):

Stato	$p$ , bar	$T$ , °C	$x$	$h$ , kJ/kg	$s$ , kJ/kgK	Note
1	0.2	60.06	0.0	251.4	0.8320	
2	20.0	60.6	-	253.4	0.8320	$s_2=s_1$
3	20.0	400.0	-	3247.6	7.1271	
4	0.2	60.06	0.8896	2349.3	7.1271	$s_4=s_3$

$h_2$ , dato in genere non reperibile nelle tabelle, può essere ricavato dalla equazione

$$w_x = -v(p_2 - p_1)$$

che permette di determinare il lavoro per unità di massa che si spende nel caso di compressione reversibile di un liquido, quindi

$$h_2 = h_1 - w_x = h_1 + v_1(p_2 - p_1) = 251.4 + 0.001017 \times (2000 - 20) = 253.4 \text{ kJ/kg}$$

b) Gli scambi termici e i lavori relativi alle singole trasformazioni sono:

$$q_{12} = 0 \quad (l')_{12} = h_1 - h_2 = -2.0 \text{ kJ/kg}$$

$$q_{23} = h_3 - h_2 = 2994.3 \text{ kJ/kg} \quad (l')_{23} = 0$$

$$q_{34} = 0 \quad (l')_{34} = h_3 - h_4 = 898.3 \text{ kJ/kg}$$

$$q_{41} = h_1 - h_4 = -2097.9 \text{ kJ/kg} \quad (l')_{41} = 0$$

$$q_{tot} = \sum q_i = 896.3 \text{ kJ/kg} \quad (l')_{tot} = \sum l'_i = 896.3 \text{ kJ/kg}$$

c) Il rendimento del ciclo si valuta come

$$\eta = \frac{(l')_{tot}}{q_{in}} = \frac{896.3}{2994.2} = 0.299$$

dato che il lavoro della pompa (1-2) è trascurabile ed  $h_2$  è molto vicino ad  $h_1$ , il rendimento è anche calcolabile con buona approssimazione come

$$\eta = \frac{(l')_{34}}{q_{23}} \cong \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_1} = 0.2998$$

che consente di evitare il calcolo di  $h_2$

d) Il rendimento del Ciclo di Carnot equivalente tra la temperatura minima e la temperatura massima del presente ciclo è:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{(273.15 + 60.0)}{(273.15 + 400)} = 0.505$$

**Esercizio 7.9** (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

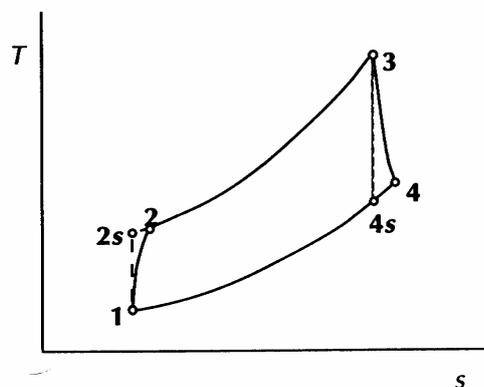
Le seguenti conclusioni possono essere verificate facendo uso del diagramma  $T$ - $s$  e di quello di Mollier e dei calcoli svolti nell'esercizio precedente (per farsi un'idea, si può fissare la temperatura di ammissione del vapore in turbina a 500 °C e la pressione nel condensatore a 0.05 bar).

- il lavoro della pompa cresce in quanto cresce la pressione di uscita

- il lavoro della turbina aumenta perché cresce il salto di pressione relativo all'espansione; sul piano  $h-s$  il punto 3 ha praticamente la stessa entalpia, mentre l'entalpia del punto 4 decresce;
- Il calore fornito in caldaia diminuisce anche se di molto poco; infatti  $h_3$  subisce una lieve diminuzione (bisogna tenere conto che il vapore nel punto 3 è vicino alle condizioni di gas ideale e quindi l'entalpia ha una debole dipendenza dalla pressione) ed  $h_2$  aumenta un po';
- Il calore trasferito nel condensatore diminuisce in quanto, a parità di  $h_1$ ,  $h_4$  diminuisce. Nel piano  $T-s$  si vede che a parità di temperatura diminuisce il  $\Delta s$ .
- Il rendimento del ciclo aumenta in quanto il calore ceduto in caldaia resta praticamente costante, mentre il lavoro in turbina aumenta; (in termini di temperature medie termodinamiche del fluido si ha che a parità di quella inferiore cresce quella superiore).
- Il titolo del vapore all'uscita della turbina diminuisce perché il punto 4 si sposta verso sinistra sul piano  $T-s$  o  $h-s$ .

**Esercizio 7.10** (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

I cicli ideale e reale sono rappresentati nel sottostante diagramma  $T-s$  del gas ideale.



a) Nel caso del ciclo ideale, le temperature incognite  $T_{2s}$  e  $T_{4s}$  si trovano alla seguente maniera:

$$T_{2s} = T_1 \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 300 \cdot 4^{0.4/1.4} = 445.8 \text{ K}$$

$$T_{4s} = T_3 \cdot \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1200 \cdot 0.25^{0.4/1.4} = 807.5 \text{ K}$$

Il rendimento del ciclo ideale è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{445.8} = 0.3271$$

b) La potenza in uscita è data da

$$W = G \cdot l_{tot}$$

dove

$$l_{tot} = (h_3 - h_{4s}) + (h_1 - h_{2s}) = \frac{kR}{k-1} (T_3 - T_{4s} + T_1 - T_{2s}) =$$

$$= 3.5 \cdot \left( \frac{8.3143}{29} \right) \cdot (1200 - 807.5 + 300 - 445.8) = 247.6 \text{ kJ/kg}$$

Quindi

$$W = 5 \cdot 247.6 = 1238 \text{ kW}$$

c) Affinchè il lavoro netto in uscita sia nullo, il lavoro ottenuto in turbina deve uguagliare quello speso nel compressore. Deve quindi essere

$$(h_3 - h_{4s}) \cdot \eta_e = \frac{(h_{2s} - h_1)}{\eta_c}$$

quindi

$$\eta_e \cdot \eta_c = \frac{h_{2s} - h_1}{h_3 - h_{4s}} = \frac{T_{2s} - T_1}{T_3 - T_{4s}} = 0.3715$$

Per cui nel caso particolare in cui si abbia  $\eta_e = \eta_c$

$$\eta_e = \eta_c = \sqrt{0.3715} = 0.6095$$

d)  $T_2$  e  $T_4$  sono trovati mediante le relazioni:

$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2s} - T_1}{\eta_c} = 300 + \left( \frac{445.8 - 300}{0.6095} \right) = 539.2 \text{ K}$$

$$T_4 = T_3 + \eta_e \cdot (T_{4s} - T_3) = 1200 + 0.6095 \cdot (807.5 - 1200) = 960.8 \text{ K}$$

### Esercizio 7.11 (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

Per prima cosa si calcolano pressione e temperatura in ogni punto del ciclo come definiti in figura.

$$p_4 = p_1 = 100 \text{ kPa}$$

$$p_2 = p_3 = 4 p_1 = 400 \text{ kPa}$$

e assumendo per l'aria  $k=1.4$

$$T_{2s} = T_1 \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 300 \cdot 4^{0.286} = 445.8 \text{ K}$$

$$T_{4s} = T_1 \cdot \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1200 \cdot 0.25^{0.286} = 807.54 \text{ K}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2s} - T_1}{\eta_c} = 300 + \frac{445.8 - 300}{0.85} = 471.53 \text{ K}$$

$$T_4 = T_3 + (T_{4s} - T_3) \cdot \eta_e = 1200 + (807.54 - 1200) \cdot 0.9 = 846.79 \text{ K}$$

Dato che le portate negli stati 2 e 4 sono uguali, che il gas è considerato ideale con  $c_p$  costante, e che il rigeneratore è considerato ideale, ne segue che il flusso caldo esce dal rigeneratore alla temperatura del flusso freddo ed il flusso freddo esce alla temperatura iniziale del flusso caldo. In altri termini si ha

$$T_{4*} = T_2 = 471.53 \text{ K} \quad \text{e} \quad T_{2*} = T_4 = 846.79 \text{ K}$$

La potenza netta in uscita è

$$\begin{aligned} W_m &= G \cdot [(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)] = G \cdot c_p \cdot [(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)] = \\ &= 8 \cdot 1.0035 \cdot [(1200 - 846.79) - (471.53 - 300)] = 1458.5 \text{ kW} \end{aligned}$$

b) Il rendimento del ciclo è pari a

$$\eta = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_{2*})} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{(T_3 - T_{2*})} = 0.514$$

Capitolo 10

**Esercizio 10.1** (Soluzione redatta da Alessandro Franco)

a) Poiché una differenza di temperatura di 3 K è richiesta nello scambiatore, la temperatura di evaporazione è di  $-10^{\circ}\text{C}$  e la temperatura di condensazione è di  $41^{\circ}\text{C}$ . La pressione superiore del ciclo si trova a partire dalla temperatura di condensazione ( $41^{\circ}\text{C}$ ) e, consultando le tabelle o mediante il programma CATT risulta essere 0.9845 Mpa. La pressione inferiore viene determinata a partire dalla temperatura di evaporazione ( $-10^{\circ}\text{C}$ ) e risulta essere 0.2191 Mpa. Se assumiamo che lo stato 1 sia quello di vapore saturo (a bassa temperatura) e lo stato 3 quello di liquido saturo (ad alta temperatura), le relative proprietà sono riportate nella successiva tabella, dove le caselle corrispondenti ai dati di ingresso sono evidenziate in grigio.

	$p$ MPa	$T$ $^{\circ}\text{C}$	$h$ kJ/kg	$s$ kJ/kg K	$x$	stato
1	0.2191	-10	183.2	0.7019	1	Satur. Vapor
2i	0.9845	49.03	209.8	0.7019		Superh. Vapor
2	0.9845	60.6	218.7	0.7289		Superh. Vapor
3	0.9845	41	75.6	0.275	0	Satur. Liquid
4	0.2191	-10	75.6	0.2931	0.3117	Two-phase

l'entalpia del punto finale della compressione reale ( $h_2$ ) è stata ricavata dalla definizione di rendimento isoentropico

$$\eta_c = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1}$$

$$h_2 = h_1 + \frac{h_{2i} - h_1}{\eta_c} = 183.2 + \frac{209.8 - 183.2}{0.75} = 218.7 \text{ kJ/kg}$$

b) Il coefficiente di prestazione (COP) è dato da

$$COP = \frac{Q_C}{L} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} = \frac{183.2 - 75.6}{218.7 - 183.2} = 3.03$$

c) la portata di fluido necessaria è ottenibile dal bilancio dell'evaporatore:

$$W_F = G(h_1 - h_4) = 6 \text{ kW}$$

$$G = \frac{W_F}{h_1 - h_4} = \frac{6}{183.2 - 75.6} = 0.056 \text{ kg/s}$$

d) La potenza ideale richiesta dal compressore è data da

$$W_{m,id} = G(h_{2s} - h_1) = 0.056(209.8 - 183.2) = 1.49 \text{ kW}$$

e quella assorbita dalla rete elettrica, tenuto conto di tutti i rendimenti

$$W_m = \frac{W_{m,id}}{\eta_c \eta_m} = \frac{1.49}{0.75 \cdot 0.94} = 2.11 \text{ kW}$$

l'allievo può verificare che quest'ultimo risultato era ottenibile più rapidamente anche tramite

$$W_m = \frac{W_f}{COP \eta_m}$$

## Capitolo 13

Le soluzioni degli esercizi 13.8-13.10 sono state redatte da A. Franco

### Esercizio 13.1

a) Applicando la definizione si ha

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s}{k} + \frac{1}{\alpha_e} = \frac{1}{10} + \frac{0.25}{0.5} + \frac{1}{25} = 0.64 \frac{m^2 K}{W}$$

da cui

$$u = 1.56 \frac{W}{m^2 K}$$

b) Nota la conduttanza della parete si può valutare il flusso termico  $q''$ : si ha che

$$q'' = u \cdot (T_i - T_e) = 1.56 \cdot 20 = 31.25 \text{ W/m}^2$$

c) La potenza termica ceduta dal fluido interno alla parete interna è:

$$q'' = \alpha_i \cdot (T_i - T_1)$$

quindi

$$T_1 = T_i - \frac{q''}{\alpha_i} = 20 - \frac{31.25}{10} \approx 16.9^\circ C$$

quella ceduta dalla parete esterna al fluido esterno è invece

$$q'' = \alpha_e \cdot (T_2 - T_e)$$

e quindi

$$T_2 = T_e + \frac{q''}{\alpha_e} = \frac{31.25}{25} = 1.25^\circ C$$

### Esercizio 13.2 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Calcolo preliminarmente il valore delle superfici interessate allo scambio termico: queste sono l'area laterale del parallelepipedo (e cioè quattro volte la superficie di un rettangolo di lati  $L, H$ ) e l'area di base superiore (il "soffitto" del frigorifero); non si considera la base inferiore perché, essendo adiabatica, non scambia calore con l'esterno.

$$A_p = \text{Area di una parete} = L \cdot H = 0.9 \text{ m}^2$$

$$A_{lat} = \text{Area laterale totale} = 4 \cdot L \cdot H = 3.6 \text{ m}^2$$

$$A_s = \text{Area "soffitto"} = L \cdot P = 0.36 \text{ m}^2$$

$$W_i = \alpha_i A (T' - T_i)$$

Questa è l'espressione della potenza termica scambiata per convezione tra l'interno del frigorifero e la superficie interna della schiuma espansa; detta superficie si troverà a temperatura  $T'$ .

$$W_i = \frac{k_1 A}{s_1} (T'' - T')$$

Potenza termica scambiata per conduzione attraverso le due superfici che delimitano la schiuma espansa (indicando con  $T''$  la temperatura della superficie più esterna, a contatto con la lamiera, e quindi più calda).

$$W_i = \frac{k_2 A}{s_2} (T''' - T'')$$

Potenza termica scambiata per conduzione attraverso le due superfici che delimitano la lamiera di acciaio (indicando con  $T'''$  la temperatura della superficie più esterna, a contatto con l'ambiente, e

quindi più calda).

$$W_t = \alpha_e A (T_a - T''') \quad \text{Potenza termica scambiata per convezione tra la superficie esterna della lamiera di acciaio e l'ambiente a temperatura } T_a.$$

Queste relazioni fanno riferimento ad una generica superficie  $A$ .  
Per ognuna di queste posso scrivere la relativa resistenza termica:

$$R_{t1} = \frac{1}{\alpha_i A} \quad R_{t2} = \frac{s_1}{k_1 A} \quad R_{t3} = \frac{s_2}{k_2 A} \quad R_{t4} = \frac{1}{\alpha_e A}$$

Posso scrivere

$$W_t = \frac{T_e - T_i}{R_T} \quad \text{dove } R_T = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} + R_{t4}$$

$$R_{t,\text{sup.laterale}} = \frac{1}{A_{\text{lat}}} \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{1}{\alpha_e} \right) = 0.29 \text{ K/W} \quad \text{Resistenza termica dell'intera sup. laterale}$$

$$R_{t,\text{soffitto}} = \frac{1}{A_s} \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{1}{\alpha_e} \right) = 2.87 \text{ K/W} \quad \text{Resistenza termica del "soffitto"}$$

La potenza termica da asportare sarà data dalla somma della potenza termica scambiata attraverso l'area laterale più quella scambiata attraverso l'area di base superiore:

$$W_t = W_{t,\text{sup.laterale}} + W_{t,\text{soffitto}} = \frac{T_e - T_i}{R_{t,\text{sup.laterale}}} + \frac{T_e - T_i}{R_{t,\text{soffitto}}} \cong 171 \text{ W}$$

### Esercizio 13.3 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Calcolo preliminarmente il valore delle superfici interessate allo scambio termico: queste sono l'area della finestra ( $A_f$ ) e l'area della sola parete in muratura ( $A_p$ ).

$$A_f = 1.5 \text{ m}^2$$

$$A_p = 12 \text{ m}^2 - A_f = 10.5 \text{ m}^2$$

Per la parete abbiamo:

$$W_t = \alpha_i A_p (T' - T_i) \quad \text{Questa è l'espressione della potenza termica scambiata per convezione tra l'interno e la superficie interna della sola parete, la cui temperatura vale } T'.$$

$$W_t = \frac{k_1 A_p}{s_1} (T'' - T')$$

Potenza termica scambiata per conduzione attraverso le due superfici che delimitano la parete (indicando con  $T''$  la temperatura della superficie più esterna, a contatto con l'esterno, e quindi più fredda).

$$W_t = \alpha_e A_p (T_a - T'') \quad \text{Potenza termica scambiata per convezione tra la superficie esterna della parete e l'ambiente a temperatura } T_a.$$

La potenza scambiata tra interno ed esterno si può anche esprimere come:

$$W_{t,p} = \frac{T_i - T_e}{R_{t,p}} = 311 \text{ W}$$

dove

$$R_{t,p} = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} = \frac{1}{A_p} \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{k_1} + \frac{1}{\alpha_e} \right) = 0.048 \text{ K/W}$$

Il discorso è del tutto analogo per la finestra sostituendo ai valori  $k_1, s_1, A_p$  rispettivamente  $k_2, s_2, A_f$ .

Si ottiene

$$W_{t,f} = \frac{T_i - T_e}{R_{t,f}} = 83 \text{ W} \quad \text{con } R_{t,f} = 0.179 \text{ K/W}$$

La potenza termica complessivamente scambiata è

$$W_T = W_{t,p} + W_{t,f} = 394 \text{ W}$$

La frazione emessa dalla finestra vale:

$$x : 83 = 100 : 393 \quad \text{da cui segue } x = 21\%$$

### Esercizio 13.4 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Lo scambio termico avviene per convezione per cui scrivo

$$W_{irr} = \alpha(T_{sabbia} - T_a)$$

da cui ottengo

$$T_{sabbia} = \frac{W_{irr}}{\alpha} + T_a = 61^\circ\text{C}$$

Se la superficie viene trattata in modo da rinviare il 90% della potenza solare, vorrà dire che ne assorbirà il 10%, quindi:

$$W_{ass} = (1 - 0.9) \cdot W_{irr} = 40 \text{ W/m}^2$$

$$T_{suptrattata} = \frac{W_{ass}}{\alpha} + T_a = 38^\circ\text{C}$$

### Esercizio 13.5 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Calcolo preliminarmente il valore della superficie interessata allo scambio termico:

$$A = 4 \cdot 3.5 = 14 \text{ m}^2$$

Per detta superficie possiamo scrivere:

$$W_t = \alpha_i A (T' - T_i) \quad \text{Questa è l'espressione della potenza termica scambiata per convezione tra l'interno della baracca e la superficie interna del tetto.}$$

$$W_t = \frac{k_1 A}{s_1} (T'' - T') \quad \text{Potenza termica scambiata per conduzione attraverso le due superfici che delimitano il tetto.}$$

$$W_t = \alpha_e A (T_a - T'') \quad \text{Potenza termica scambiata per convezione tra la superficie esterna del tetto e l'ambiente a temperatura } T_a.$$

La potenza scambiata tra interno ed esterno si può anche esprimere come:

$$W_T = \frac{T_i - T_e}{R_t} = 787 \text{ W}$$

dove

$$R_t = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{k_1} + \frac{1}{\alpha_e} \right) = 0.019 \text{ K/W}$$

La potenza ridotta del 90%, ha il seguente valore:

$$W'_T = (1 - 0.9) \cdot W_T = 79 \text{ W}$$

Dalle precedenti tre equazioni posso scrivere:

$$R_t = \frac{T_i - T_e}{W'_T} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{1}{\alpha_e} \right)$$

Il valore  $s_2$  cercato si ottiene dopo qualche passaggio:

$$s_2 = k_2 \cdot \left[ \frac{A(T_i - T_e)}{W'_T} - \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_e} \right] = 12 \text{ cm}$$

### Esercizio 13.6 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

$W_t = \alpha A(T' - T_i)$  Questa è l'espressione della potenza termica scambiata per convezione tra l'interno del forno e la superficie interna della lana di vetro.

$W_t = \frac{kA}{s}(T'' - T')$  Potenza termica scambiata per conduzione attraverso le due superfici che delimitano la lana di vetro.

$W_t = \alpha A(T_e - T'')$  Potenza termica scambiata per convezione tra la superficie esterna della lana di vetro (e vogliamo che non sia maggiore di 50°C) e l'esterno a temperatura  $T_e$ .

La potenza scambiata tra interno ed esterno si può anche esprimere come:

$$W_T = \frac{T_i - T_e}{R_t}$$

dove

$$R_t = R_{t1} + R_{t2} + R_{t3} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{s}{k} + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Combinando le precedenti relazioni posso scrivere:

$$W_t = \frac{T_i - T_e}{R_t} = \alpha A(T'' - T_e)$$

Sostituendo l'espressione di  $R_t$ , ottengo il valore di  $s$  cercato:

$$s = \left[ \frac{T_i - T_e}{\alpha(T'' - T_e)} - \frac{2}{\alpha} \right] k = 17.8 \text{ mm}$$

### Esercizio 13.7

a) Scriviamo l'equazione di bilancio energetico relativa a tutta la barra, che vale in condizioni di regime che definisce l'uguaglianza tra la potenza termica prodotta e la potenza termica scambiata con il fluido.

$$q_s \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot l = \pi \cdot D \cdot l \cdot \alpha \cdot (T_p - T_a)$$

da cui si può ricavare la temperatura di parete

$$T_p = T_a + \frac{q_s \cdot D}{4\alpha} = 30 + \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6}{400} = 105^\circ\text{C}$$

b) la potenza termica ceduta dalla barra per unità di lunghezza si valuta in maniera abbastanza semplice come

$$q' = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot q_s = \pi \frac{(3 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot 10^6 \approx 707 \text{ W/m}$$

### Esercizio 13.8 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

La piastra scambia calore con entrambe le facce estese: la superficie  $A$  interessata dallo scambio termico è quindi  $2 \cdot HL$ .

Per la relazione di scambio termico si ha:

$$W_T = \alpha A (T_s - T_a)$$

Da cui

$$RI^2 = \alpha \cdot 2HL \cdot (T_s - T_a)$$

$$\frac{\rho L}{tH} I^2 = \alpha \cdot 2HL \cdot (T_s - T_a)$$

Segue quindi che

$$H = \sqrt{\frac{\rho I^2}{2\alpha \cdot t (T_s - T_a)}} = 0.32 \text{ m}$$

### Esercizio 13.9

Espressa per unità di superficie il calore trasmesso dalla massa di carbone all'ambiente è pari a

$$q'' = \dot{q}H = 20 \cdot 2 = 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Il calore scambiato attraverso la superficie a temperatura  $T_w$  si può determinare grazie alla legge

$$q'' = \alpha \cdot (T_w - T_\infty)$$

da cui si ricava che

$$T_w = T_\infty + \frac{q''}{\alpha} = 25 + \frac{40}{5} = 25 + 8 = 33^\circ\text{C}$$

### Esercizio 13.10 (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Siccome possiamo trascurare il calore dissipato dalle basi del cilindro, l'unica superficie interessata allo scambio termico è quella laterale del cilindro; la calcolo:

$$A_{\text{sup.lat.}} = 2\pi r \cdot L$$

La relazione di scambio termico vale quindi

$$W_T = \alpha \cdot 2\pi r L \cdot (T_s - T_a)$$

Da cui ricavo i valori della temperatura cercati:

$$T_s = \frac{W_T}{h_{acqua} \cdot 2\pi r L} + T_a = 53.2^\circ\text{C}$$

$$T'_s = \frac{W_T}{h_{aria} \cdot 2\pi r L} + T_a = 1346^\circ\text{C}$$

**Esercizio 13.11** (Soluzione redatta dallo studente Giacomo Garofalo)

Per valutare il transitorio, scrivo la relazione di scambio termico come funzione del tempo:

$$W_T = \alpha A [T(t) - T_a]$$

Dove  $T_a$  è la temperatura dell'aria e vale quindi  $20^\circ\text{C}$ .

Visto che non c'è lavoro meccanico in gioco posso fare i seguenti assunti:

$$\frac{dU}{dt} = W_T$$

$$\frac{dU}{dt} = M \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = c \frac{dT}{dt}$$

E quindi posso scrivere

$$W_T = Mc \frac{dT}{dt}$$

Ho ottenuto un'equazione differenziale del prim'ordine:

$$Mc \frac{dT}{dt} = \alpha A [T(t) - T_a]$$

E scelgo come condizione al contorno

$$T_{t=0} = T_0$$

Pongo

$$\tau = \frac{Mc}{h_a A} \quad \theta = T(t) - T_a$$

L'equazione differenziale si può quindi facilmente integrare e si ottiene:

$$\theta(t) = \theta(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Per  $h_a = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$  si ottengono il seguente valore

$$\tau = 92.8 \text{ s}$$

dove

$$A = 0.0378 \text{ m}^2$$

Il regime si raggiunge dopo circa 5 costanti di tempo  $\tau$  e vale

$$5 \cdot \tau \cong 460 \text{ s}$$

**APPENDICE 7 – Problemi assegnati nei compiti****ESERCIZIO C.1 (1994, gruppo A)**

In un sistema aperto a regime fluisce una portata  $G=2$  kg/s di vapor d'acqua inizialmente nelle condizioni:  $p_1=2$  bar,  $x_1=1$ .

Il fluido subisce le seguenti trasformazioni:

- 1-2 compressione adiabatica reversibile fino a  $p_2=5$  MPa;
- 2-3 raffreddamento isobaro fino a  $x_3=0.86$ .

Tracciare le trasformazioni sul diagramma allegato e determinare:

- il valore di  $T_2$  e  $T_3$ ;
- la potenza meccanica necessaria per effettuare la compressione;
- il calore scambiato per unità di tempo durante la fase 2-3;
- la potenza necessaria e la temperatura finale  $T_2'$  del vapore se la fase di compressione (1-2') avviene in una macchina reale con rendimento isoentropico  $\varepsilon=0.8$  fino alla pressione  $p_2'=p_2$ .

**DOMANDA OPZIONALE**

- Determinare le condizioni finali  $T_4$  e  $x_4$  se, a partire dalle condizioni 3, il fluido viene fatto laminare (*trasformazione irreversibile, adiabatica in cui non si raccoglie lavoro utile*) in una valvola fino a pressione  $p_4=0.01$  MPa.

[825 K; 535 K; -1696 kW; -1980 kW; -2120 kW, 916 K; 320K, 0.99]

**ESERCIZIO C.2 (1994, gruppo B)**

In un sistema aperto a regime fluisce una portata  $G=5$  kg/s di ammoniaca inizialmente nelle condizioni:  $p_1=2$  MPa,  $x_1=0.9$ .

Il fluido subisce le seguenti trasformazioni:

- 1-2 riscaldamento isobaro fino a  $T_2=400$  K;
- 2-3 espansione adiabatica reversibile fino a  $p_3=1.4$  bar.

Tracciare le trasformazioni sul diagramma allegato e determinare:

- il calore scambiato per unità di tempo durante la fase 1-2;
- la potenza meccanica erogata nell'espansione;
- il valore di  $x_3$  e di  $T_3$ ;
- la potenza erogata e il titolo finale  $x_3'$  del vapore se la fase di espansione (2-3') avviene in una macchina reale con rendimento isoentropico  $\varepsilon=0.9$  fino alla pressione  $p_3'=p_3$ .

**DOMANDA OPZIONALE**

Determinare le condizioni finali  $T_4$  e  $x_4$  se, a partire dalle condizioni 1, il fluido viene fatto laminare (*trasformazione irreversibile, adiabatica in cui non si raccoglie lavoro utile*) in una valvola fino a pressione  $p_4=1$  bar.

[1680 kW; 1855 kW; 0.945, 247 K; 0.97, 247 K; 0.975, 236 K]

**ESERCIZIO C.3 (1994, gruppo A)**

Un cilindro, dotato di un pistone per cui si possono trascurare massa e attrito con la parete, contiene una massa  $M=0.05$  kg di azoto nelle seguenti condizioni iniziali:

$p_1=2$  bar  $T_1=300$  K.

Il sistema subisce la seguente trasformazione ciclica:

- 1-2 compressione adiabatica fino a  $p_2=15$  bar;
- 2-3 espansione isovolumica fino a  $p_3=p_1$ .
- 3-1 dilatazione isobara fino a tornare nelle condizioni iniziali.

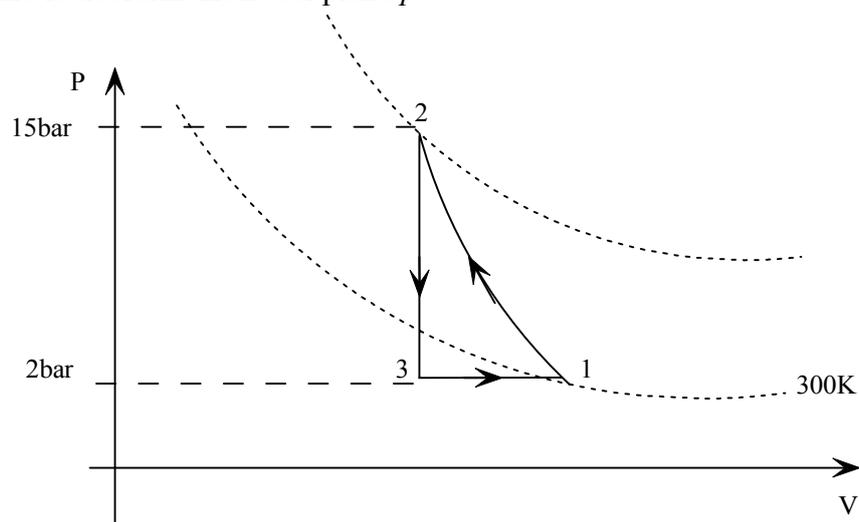
Assumendo di poter considerare il fluido un gas ideale con calore specifico costante, tracciare (approssimativamente) uno schema del ciclo sul diagramma  $p-v$  e determinare:

- il valore di  $T_2$ ;
  - il lavoro scambiato durante la fase 1-2;
  - lavoro totale scambiato durante il ciclo;
  - il calore totale scambiato durante il ciclo.
- Dati per l'azoto:  $R= 297 \text{ J/kg K}$ ,  $c_p= 1041 \text{ J/kg K}$ ,  $k=1.40$ .

[534 K; -8705 J; -5300 J; -5300 J]

**Soluzione (redatta dallo studente Andrea Cosentino)**

Rappresentiamo la trasformazione sul piano  $p-v$ :



Il valore della temperatura al punto 2 si ricava immediatamente tramite la legge dell'adiabatica reversibile per un gas ideale per cui si ha:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} \approx 533.8 \text{ K}$$

Ci calcoliamo il lavoro nella trasformazione 1-2:

$$du = dq - dl$$

$$dq = 0$$

$$du = -dl$$

$$du = c_v dt$$

$$c_v dt = -dl$$

ci ricaviamo  $c_v$ :

$$c_v = c_p - R = 744 \text{ J/kg}$$

$$l_{12} = c_v (T_2 - T_1) = -174 \text{ kJ/kg}$$

$$L_{12} = l_{12} \cdot M = -8.70 \text{ kJ}$$

Mentre il lavoro totale nella trasformazione ciclica è dato dalla somma dei tre contributi 1-2 2-3 3-1: mettiamo subito in evidenza che il lavoro nel tratto 2-3 è nullo poiché stiamo effettuando una trasformazione isovolumica.

$$l_{13} = \int_3^1 p dv = p(v_1 - v_3) = 68.04 \text{ kJ/kg}$$

$$L_{13} = l_{13} \cdot M = 3402 \text{ J}$$

$$L_t = L_{12} + L_{13} = -5300 \text{ J}$$

I volumi presenti nelle precedenti equazioni si ricavano con le leggi dei gas ideali  $pv = RT$  e tenendo in considerazione che  $v_3=v_2$   
 Per quanto riguarda il calore scambiato poiché ci troviamo in una trasformazione ciclica di ha:

$$du = dq - dl$$

$$du = 0$$

$$Q_i = L_i$$

**ESERCIZIO C.4 (1994, gruppo B)**

Un cilindro, dotato di un pistone per cui si possono trascurare massa e attrito con la parete, contiene una massa  $M=0.02$  kg di elio nelle seguenti condizioni iniziali:

$p_1= 15$  bar  $T_1=300$  K.

Il sistema subisce la seguente trasformazione ciclica:

- 1-2 espansione adiabatica fino a  $p_2= 2$  bar;
- 2-3 contrazione isobara fino a  $v_3=v_1$ .
- 3-1 compressione isovolumica fino a tornare nelle condizioni iniziali.

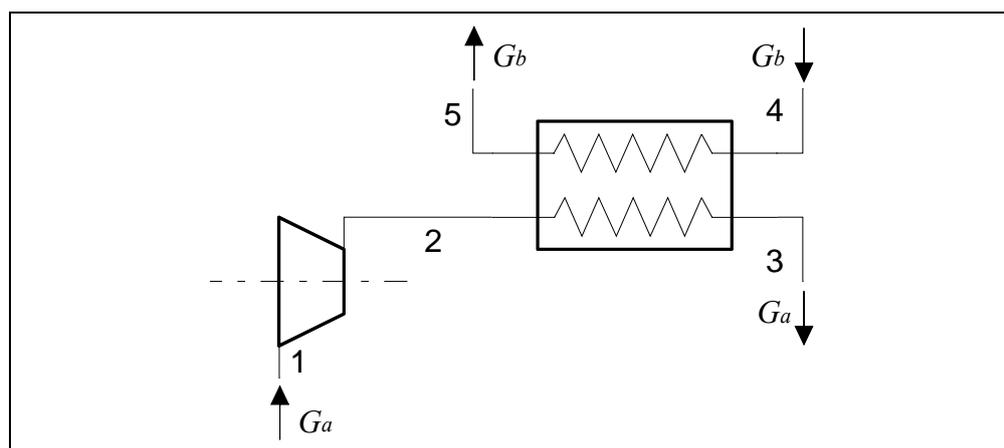
Assumendo di poter considerare il fluido un gas ideale con calore specifico costante, tracciare (approssimativamente) uno schema del ciclo sul diagramma  $p-v$  e determinare:

- a. il valore di  $T_2$ ;
- b. il lavoro scambiato durante la fase 1-2;
- c. lavoro totale scambiato durante il ciclo;
- d. il calore totale scambiato durante il ciclo.

Dati per l'elio:  $R= 2073$  J/kg K,  $c_p= 5192$  J/kg K,  $k=1.667$ .

[134 K; 10.3 kJ; 6.46 kJ; 6.46 kJ]

**ESERCIZIO C.5 (1995, gruppo A)**



Nel sistema aperto a regime indicato nel diagramma scorrono i seguenti fluidi:

- Ramo 1-2-3:  $G_a=0.3$  kg/s di R-22 avente le seguenti condizioni:

punto 1:  $x_1=1, p_1=0.11$  MPa;

punto 2:  $T_2=360$  K

punto 3:  $x_3=0$

- Ramo 4-5:  $G_b= 0.4$  kg/s di acqua avente le seguenti condizioni:

punto 4:  $p_4 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_4 = 20^\circ\text{C}$ .

La trasformazione 1-2 è adiabatica reversibile (ovvero, isoentropica); la trasformazione 2-3 avviene a pressione costante (ovvero  $p_3 = p_2$ ); la trasformazione 4-5 avviene a pressione costante (ovvero  $p_4 = p_5$ ). La superficie esterna dello scambiatore di calore 2-3-4-5 è rigida ed adiabatica.

Determinare:

- la temperatura  $T_1$ ;
- La potenza assorbita dal compressore,  $W'_{12}$ ;
- la pressione  $p_2$ ;
- la potenza termica scambiata tra i due fluidi nello scambiatore,  $W_{t,23}$ ;
- la temperatura di uscita dell'acqua  $T_5$ .

Tracciare inoltre la trasformazione 1-2-3 sul diagramma  $p-h$  dell'R22.

[235 K; -20.6 kW; 1.53 MPa; -62.5 kW; 57.4°C]

**Soluzione** (redatta dallo studente *Andrea Cosentino*)

*Analisi lato compressore:*

I dati dell'R22 sono riportati in tabella, nella quale i dati di input sono stati evidenziati:

	$p$ [MPa]	$T$ [°C]	$h$ [kJ/kg]	$s$ [kJ/kgK]	$x$
1	0.11	-39	233.7	0.9978	1
2 <sub>i</sub>	1.53	86.85	302.4	0.9978	
3	1.53	39.89	94.13	0.3413	0

Calcoliamo la potenza raccolta all'asse del compressore tramite l'equazione di bilancio energetico:

$$W'_m = 0.3(233.7 - 302.4) \approx -20.61 \text{ kW}$$

*Analisi lato scambiatore:*

si è ricavato  $h_3 = 94.13 \text{ kJ/kg}$  per cui si ricava una potenza termica scambiata pari a:

$$W_t = G(h_3 - h_2) = 0.3(94.13 - 302.4) \approx -62.5 \text{ kW}$$

ed infine la temperatura di uscita dell'acqua è data da

$$T_5 = T_4 + |W_t| / (G c_p) = 20 + 62.5 / (0.4 \cdot 4.18) = 57.4^\circ\text{C}$$



**ESERCIZIO C.6 (1995, gruppo A, facoltativo)**

Determinare le condizioni finali del fluido R-22 prelevato nelle condizioni  $T_6 = 460 \text{ K}$ ,  $p_6 = 5 \text{ MPa}$  se lo stesso viene fatto espandere attraverso una valvola (dispositivo dalla superficie rigida schematizzabile come adiabatico) fino alla pressione atmosferica ( $p_7 = 100 \text{ kPa}$ ). Le variazioni di energia cinetica e potenziale possono essere considerate trascurabili. Tracciare la trasformazione 6-7 sul diagramma allegato.

[la trasformazione è isoentalpica; la temperatura finale vale circa 425 K]

**ESERCIZIO C.7 (1995, gruppo A)**

In un sistema chiuso cilindro pistone con rapporto di compressione volumetrico  $r_v = V_3/V_1 = 20:1$  dell'aria (approssimabile come un gas ideale a  $c_p$  costante, con  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.400$ ) avente le seguenti condizioni iniziali:

$$p_1 = 35 \text{ bar}, V_1 = 20 \text{ cm}^3, T_1 = 700 \text{ K};$$

subisce le trasformazioni reversibili indicate nel seguito:

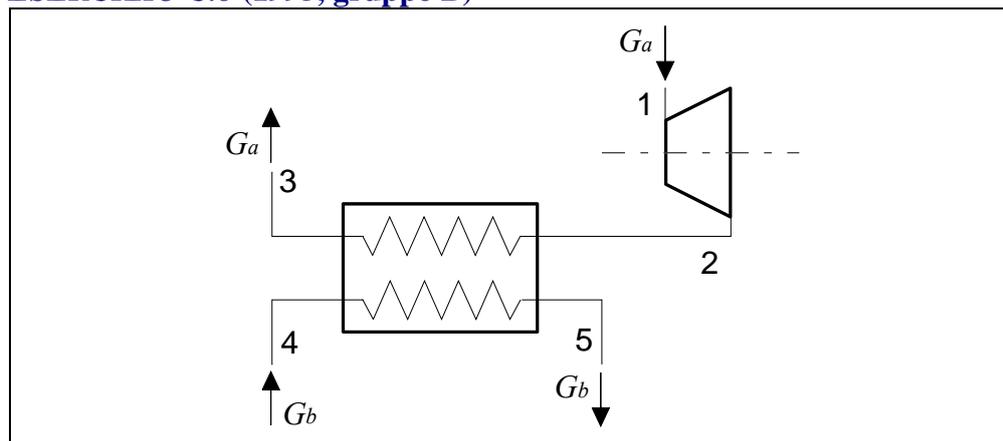
- 1-2: riscaldamento isobaro con  $q_{12} = 700 \text{ kJ/kg}$ ;
- 2-3: espansione adiabatica reversibile.

Determinare:

- il lavoro totale scambiato nella fase 1-2,  $L_{12}$ ;
- la temperatura e il volume specifico nel punto 2 ( $T_2, v_2$ );
- il lavoro totale scambiato nella trasformazione 2-3,  $L_{23}$ ;
- la temperatura e la pressione nel punto 3 ( $T_3, p_3$ ).

[70 J; 1397 K, 0.115 m<sup>3</sup>/kg; 210 J; 556 K, 0.14 MPa]

### ESERCIZIO C.8 (1995, gruppo B)



Nel sistema aperto a regime indicato nel diagramma scorrono i seguenti fluidi:

- Ramo 1-2-3:  $G_a = 15 \text{ kg/s}$  di vapor d'acqua avente le seguenti condizioni:
  - punto 1:  $T_1 = 900 \text{ K}$ ,  $p_1 = 1.2 \text{ MPa}$ ;
  - punto 2:  $x_2 = 1$
  - punto 3:  $x_3 = 0$
- Ramo 4-5: Una portata incognita  $G_b$  di acqua avente le seguenti condizioni:
  - punto 4:  $p_4 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_4 = 20^\circ\text{C}$ .
  - punto 5:  $p_5 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_5 = 25^\circ\text{C}$ .

La trasformazione 1-2 è adiabatica reversibile (ovvero, isoentropica); la trasformazione 2-3 avviene a pressione costante (ovvero  $p_3 = p_2$ ). La superficie esterna del condensatore (scambiatore di calore) 2-3-4-5 è rigida ed adiabatica.

Determinare:

- La potenza erogata dalla turbina,  $W_{12}$ ;
- la pressione  $p_2$ ;
- la temperatura  $T_2$  (dare una stima);
- la potenza termica scambiata tra i due fluidi nello scambiatore,  $\dot{Q}_{23}$ ;
- la portata di acqua necessaria perché la temperatura di uscita sia limitata a  $25^\circ\text{C}$ .

Tracciare inoltre la trasformazione 1-2-3 sul diagramma allegato.

[17.4 MW; 16 kPa; 350 K; -35.3 MW; 1690 kg/s]

### ESERCIZIO C.9 (1995, gruppo B, facoltativo)

Determinare le condizioni finali del fluido prelevato nel punto 1 del problema precedente se lo stesso viene fatto espandere attraverso una valvola (dispositivo dalla superficie rigida schematizzabile come adiabatico) fino alla pressione atmosferica ( $p_6 = 100 \text{ kPa}$ ). Le

variazioni di energia cinetica e potenziale possono essere considerate trascurabili. Tracciare la trasformazione 1-6 sul diagramma allegato.

[la trasformazione è isoentalpica; la temperatura rimane pressochè invariata]

**ESERCIZIO C.10 (1995, gruppo B)**

In un sistema chiuso cilindro pistone con rapporto di compressione volumetrico  $r_v = V_1/V_2 = 12:1$  dell'azoto (approssimabile come un gas ideale a  $c_p$  costante, con  $R= 296.8 \text{ J/kg K}$ ,  $k= 1.400$ ) avente le seguenti condizioni iniziali:

$$p_1 = 1 \text{ bar}, V_1 = 400 \text{ cm}^3, t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C};$$

subisce le trasformazioni reversibili indicate nel seguito:

1-2: compressione politropica con  $n = 1.2$ ;

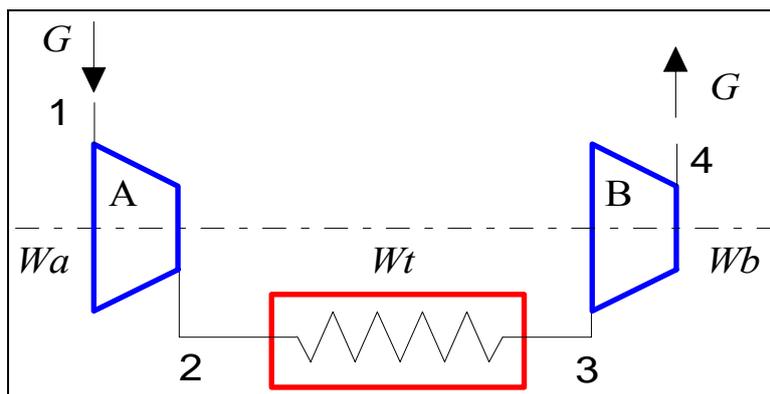
2-3: riscaldamento isovolumico con  $q_{23} = 1500 \text{ kJ/kg}$ .

Determinare:

- il lavoro totale scambiato nella fase 1-2,  $L_{12}$ ;
- il calore totale scambiato nella fase 1-2,  $Q_{12}$ ;
- la temperatura e il volume specifico nel punto 2 ( $T_2, p_2$ );
- la temperatura e la pressione nel punto 3 ( $T_3, p_3$ ).

[-128 J; -63.4 J; 481.8 K, 1.97 MPa; 2495 K, 10.2 MPa]

**ESERCIZIO C.11 (1996, gruppo A)**



Nel sistema aperto a regime rappresentato nella figura scorre una portata  $G = 2.7 \text{ t/h}$  di ammoniaca avente le seguenti condizioni:

punto 1:  $x_1 = 1, p_1 = 2 \text{ bar}$ ;

punto 2:  $p_2 = 7 \text{ bar}$ ;

punto 4:  $T_4 = 360 \text{ K}, p_4 = 14 \text{ bar}$ .

La trasformazione 1-2 è adiabatica reversibile (ovvero, isoentropica);

la trasformazione 2-3 avviene a pressione costante (ovvero  $p_3 = p_2$ ) e durante essa viene ceduta all'esterno una potenza termica  $W_t = -79 \text{ kW}$ .

Tracciare la trasformazione del fluido sul diagramma allegato e determinare:

- 1) La potenza totale necessaria per la compressione ( $W_a + W_b$ )
- 2) le temperature  $T_2, T_3$ ;
- 3) la potenza totale necessaria per la compressione nello stadio B nel caso che anche tale compressione avvenga isoentropicamente fino alla stessa pressione finale;
- 4) la temperatura di uscita dell'ammoniaca nell'ipotesi di cui al punto precedente.

[-228 kW; 340 K, 298 K; -75.7 kW; 350 K]

**ESERCIZIO C.12 (1996, gruppo A)**

In un sistema chiuso cilindro pistone con rapporto di compressione volumetrico  $r_v = V_3/V_1 = 4:1$  dell'argon (approssimabile come un gas ideale a  $c_p$  costante, con  $R = 208.2 \text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.66$ ) avente le seguenti condizioni iniziali:

$$p_1 = 3 \text{ bar}, V_1 = 10 \text{ cm}^3, T_1 = 300 \text{ K};$$

subisce le trasformazioni reversibili indicate nel seguito:

1-2: riscaldamento isovolumico con  $q_{12} = 7 \text{ kJ/kg}$ ;

2-3: espansione adiabatica reversibile.

Determinare:

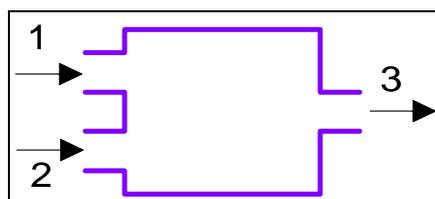
A) la temperatura e la pressione nel punto 2 ( $T_2, p_2$ );

B) il lavoro totale scambiato nella trasformazione 2-3,  $L_{23}$ ;

C) la temperatura e la pressione nel punto 3 ( $T_3, p_3$ ).

[322 K, 3.21 bar; 2.93 J; 129 K, 0.32 bar]

**ESERCIZIO C.13 (1996, gruppo A, facoltativo)**



Uno scambiatore di calore a miscelamento, rappresentato nel diagramma, si trova in condizioni stazionarie ed ha la superficie esterna adiabatica e rigida. In esso scorre ammoniaca avente le seguenti caratteristiche:

punto 1: vapore surriscaldato,  $G_1 = 1.6 \text{ kg/s}$ ,  $p_1 = 2 \text{ MPa}$ ,  $T_1 = 390 \text{ K}$ ;

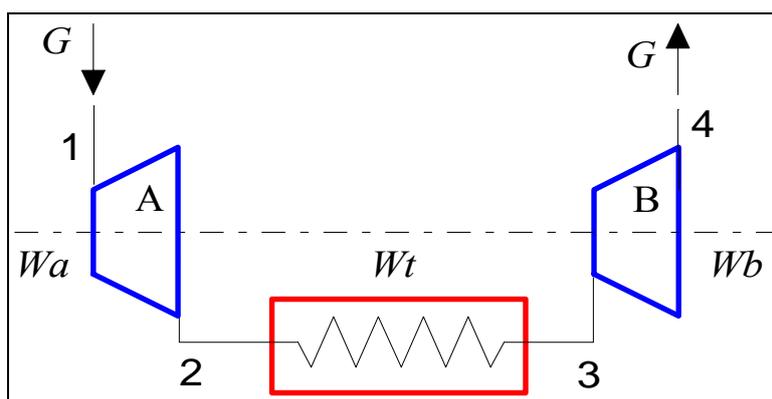
punto 2: liquido sottoraffreddato,  $G_2 = 0.4 \text{ kg/s}$ ,  $p_2 = 0.5 \text{ MPa}$ ,  $h_2 = 220 \text{ kJ/kg}$

punto 3:  $p_3 = 0.5 \text{ MPa}$

Ricavando le proprietà mancanti dal diagramma allegato, determinare la portata e le condizioni termodinamiche (temperatura ed eventualmente titolo) del fluido all'uscita (punto 3).

[2 kg/s; 278 K, x=0.93]

**ESERCIZIO C.14 (1996, gruppo B)**



Nel sistema aperto a regime rappresentato nella figura scorre una portata  $G = 8.1 \text{ t/h}$  di acqua avente le seguenti condizioni:

punto 1:  $T_1 = 527 \text{ °C}$ ,  $p_1 = 10 \text{ MPa}$ ;

punto 2:  $p_2 = 1 \text{ MPa}$

punto 4:  $x_4 = 0.96$ ,  $p_4 = 2 \text{ kPa}$

La trasformazione 1-2 è adiabatica reversibile (ovvero, isoentropica);

la trasformazione 2-3 avviene a pressione costante (ovvero  $p_3 = p_2$ ) e durante essa viene ceduta al fluido una potenza termica  $W_t = 1.3 \text{ MW}$ .

Tracciare la trasformazione del fluido sul diagramma allegato e determinare:

1) La potenza totale erogata dalle due turbine ( $W_a + W_b$ );

2) le temperature  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ;

3) il rendimento isoentropico di espansione dello stadio B;

4) il titolo in uscita nel caso che la espansione nello stadio B avvenga isoentropicamente fino alla stessa pressione finale.

[3.5 MW; 471 K, 771 K, 291 K; 0.85; 0.87]

**ESERCIZIO C.15 (1996, gruppo B)**

In un sistema chiuso cilindro pistone con rapporto di compressione volumetrico  $r_v = V_2/V_1 = 1:12$  dell'anidride carbonica (approssimabile come un gas ideale a  $c_p$  costante, con  $R= 188.99$  J/kg K,  $k= 1.28$ ) avente le seguenti condizioni iniziali:

$$p_1 = 1 \text{ bar}, V_1 = 400 \text{ cm}^3, T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C};$$

subisce le trasformazioni reversibili indicate nel seguito:

1-2: compressione isoterma;

2-3: riscaldamento isovolumico con  $q_{23} = 40$  kJ/kg.

Determinare:

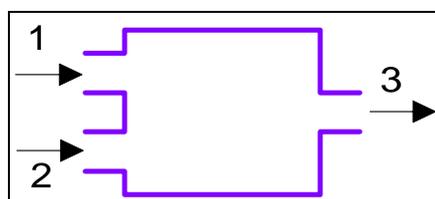
A) il calore ed lavoro totali scambiati nella fase 1-2,  $L_{12}$  e  $Q_{12}$

B) la pressione nel punto 2 ( $p_2$ );

C) la temperatura e la pressione nel punto 3 ( $T_3, p_3$ );

[-96 kJ, -96 kJ; 12 bar; 352 K, 14.4 bar]

**ESERCIZIO C.16 (1996, gruppo B, facoltativo)**



Uno scambiatore di calore a miscelamento, rappresentato nel diagramma, si trova in condizioni stazionarie ed ha la superficie esterna adiabatica e rigida. In esso scorre acqua avente le seguenti caratteristiche:

punto 1: liquido sottoraffreddato,  $G_1 = 0.64$  kg/s,  $p_1 = 1$  bar,  $h_1 = 120$  kJ/kg;

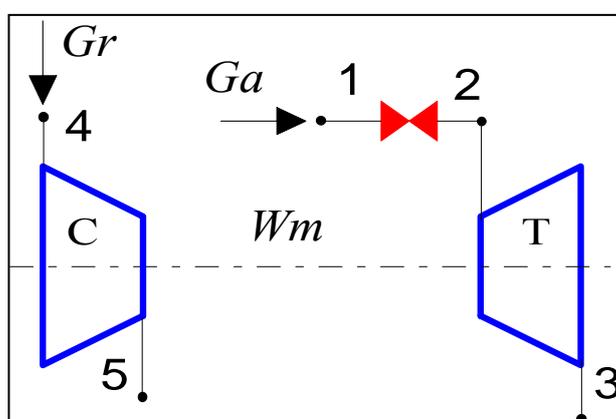
punto 2: vapore surriscaldato,  $G_2 = 1.36$  kg/s,  $p_2 = 200$  bar;  $T_2 = 607$  °C;

punto 3:  $p_3 = 1$  bar

Ricavando le proprietà mancanti dal diagramma allegato, determinare la portata e le condizioni termodinamiche (temperatura ed eventualmente titolo) del fluido all'uscita (pto 3).

[2 kg/s; 227 K, 0.90]

**ESERCIZIO C.17 (1997, gruppo A)**



Nel turbocompressore rappresentato in figura, tutta la potenza meccanica erogata dalla turbina ad aria T viene utilizzata per azionare il compressore C per il fluido R134a, montato coassialmente. L'aria che aziona la turbina viene preventivamente fatta attraversare una valvola di laminazione (che ha superficie esterna rigida ed adiabatica) per ridurne la

pressione. Tutti i componenti possono essere considerati adiabatici, lavorano in condizioni stazionarie e le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Sono noti i seguenti dati:

#### Lato turbina

Fluido: aria, approssimabile come gas ideale con  $c_p$  costante ( $R= 287 \text{ J/kg K}$ ,  $k= 1.4$ ), portata  $G_a = 0.4 \text{ kg/s}$

- punto 1:  $T_1 = 700 \text{ °C}$ ,  $p_1 = 10 \text{ bar}$ ;
- punto 2:  $p_2 = 6.8 \text{ bar}$  ;
- punto 3:  $p_3 = 1 \text{ bar}$ ;
- rendimento isoentropico della turbina  $\eta_t = 0.85$

#### Lato compressore

Fluido: R-134a (per le proprietà vedi il diagramma allegato).

- punto 4:  $x_4 = 1$ ,  $T_4 = - 20 \text{ °C}$ ;
- punto 2:  $p_5 = 7 \text{ bar}$ ;
- rendimento isoentropico del compressore  $\eta_c = 0.8$ .

#### Determinare:

1. Le temperature  $T_2$  e  $T_3$ ;
2. la potenza meccanica erogata dalla turbina ( $W_{mT}$ )
3. la portata di fluido nel compressore,  $G_r$ ;
4. la variazione di entropia dell'aria,  $s_3-s_1$ ;

Tracciare inoltre, qualitativamente, le trasformazioni dell'aria su un diagramma  $T-s$  e quella dell'R-134a sul diagramma allegato.

[973.15 K, 624 K; 138 kW; 3.25 kg/s; 223.8 J/kg K]

#### ESERCIZIO C.18 (1997, gruppo A)

In una tubazione rigida in acciaio di lunghezza  $L = 1 \text{ m}$ , raggio esterno  $R_E = 10 \text{ mm}$  e spessore  $s = 1 \text{ mm}$ , scorre una portata  $G = 0.01 \text{ kg/s}$  di miscela bifase acqua-vapore avente le seguenti caratteristiche in ingresso: pressione  $p_1 = 2 \text{ bar}$  e titolo  $x_1 = 1$ .

Il sistema si trova in condizioni stazionarie. In prima approssimazione, si può trascurare la caduta di pressione e porre in uscita  $p_2=p_1$ . Anche le variazioni di energia cinetica e potenziale possono essere trascurate. Dato il piccolo valore dello spessore rispetto al raggio, la tubazione può essere approssimata ai fini dello scambio termico come una parete piana di superficie  $A = 2 \pi R_M L$ , dove il raggio medio  $R_M$  è pari a  $R_E-s/2$ . I coefficienti di scambio all'interno ed all'esterno valgono rispettivamente  $\alpha_E = 1200 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  e  $\alpha_I = 5000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . La conducibilità termica dell'acciaio vale  $k = 40 \text{ W/m K}$ . La temperatura dell'aria esterna è  $T_E = 20 \text{ °C}$ .

Determinare, utilizzando il diagramma allegato, il titolo del vapore saturo in uscita

[circa 0.73 (la potenza scambiata vale 5.2 kW)]

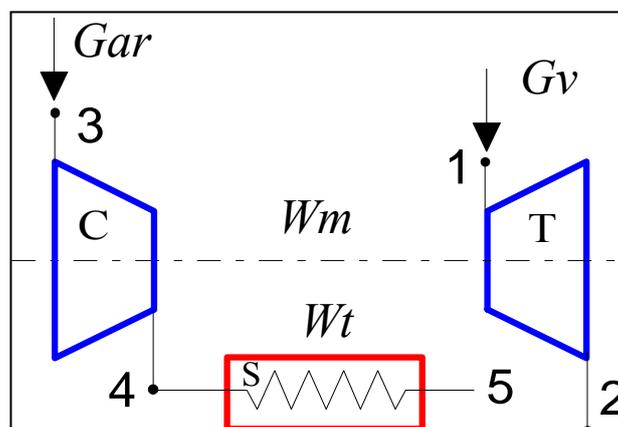
#### ESERCIZIO C.19 (1997,entrambi i gruppi, facoltativo)

In una turbina adiabatica, in condizioni stazionarie, si espande dell'elio (gas ideale con  $c_p$  costante,  $R= 2077 \text{ J/kg K}$ ,  $k= 1.667$ ), dalle condizioni iniziali  $p_1 = 13.6 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 900 \text{ °C}$  alla pressione finale  $p_2 = 1 \text{ bar}$ . La variazione di entropia tra ingresso ed uscita vale  $s_2-s_1= 1015 \text{ J/kg K}$ . Determinare il rendimento isoentropico della turbina.

[0.88; le temperature di uscita ideale e reale sono rispettivamente 413 K e 502 K]

**ESERCIZIO C.20 (1997, gruppo B)**

Nel turbocompressore rappresentato in figura, tutta la potenza meccanica erogata dalla turbina a vapore T viene utilizzata per azionare il compressore C per argon, montato coassialmente. L'argon in uscita dal compressore viene successivamente refrigerato isobaricamente fino a riportarlo alla temperatura  $T_3$ . Turbina e compressore possono essere considerati adiabatici, lo scambiatore ha pareti rigide. Il complesso lavora in condizioni stazionarie e le variazioni di energia cinetica e potenziale sono trascurabili. Sono noti i seguenti dati:



**Lato turbina**

Fluido: vapore acqueo (per le proprietà vedi il diagramma allegato).

- punto 1:  $T_1 = 400 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 40 \text{ bar}$ ;
- punto 2:  $p_2 = 1 \text{ bar}$ ;
- rendimento isoentropico della turbina  $\eta_t = 0.8$

**Lato compressore**

Fluido: argon approssimabile come gas ideale con  $c_p$  costante ( $R = 208.2 \text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.667$ ), portata  $G_{ar} = 0.9 \text{ kg/s}$

- punto 3:  $p_3 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_3 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- punto 4:  $p_4 = 4 \text{ bar}$ ;
- punto 5:  $p_5 = 4 \text{ bar}$ ,  $T_5 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- rendimento isoentropico del compressore  $\eta_c = 0.84$ .

**Determinare:**

1. La temperatura  $T_4$ ;
2. la potenza meccanica assorbita dal compressore ( $W_{mC}$ )
3. la potenza termica ceduta nello scambiatore,  $W_i$ ;
4. la portata di vapore necessaria nella turbina,  $G_v$ ;
5. la variazione di entropia dell'argon,  $s_5 - s_3$ ;

Tracciare inoltre, qualitativamente, le trasformazioni dell'argon su un diagramma  $T-s$  e quella del vapore sul diagramma allegato.

[476 K; -104.5 kW; -104.5 kW; 0.22 kg/s; -288.6 J/kg K]

**ESERCIZIO C.21 (1997, gruppo B)**

In una tubazione rigida in rame di lunghezza  $L = 10 \text{ m}$ , raggio esterno  $R_E = 7 \text{ mm}$  e spessore  $s = 1 \text{ mm}$ , scorre una portata  $G = 0.015 \text{ kg/s}$  di miscela bifase di R134a avente le seguenti caratteristiche in ingresso: pressione  $p_1 = 2 \text{ bar}$  e titolo  $x_1 = 0.3$ .

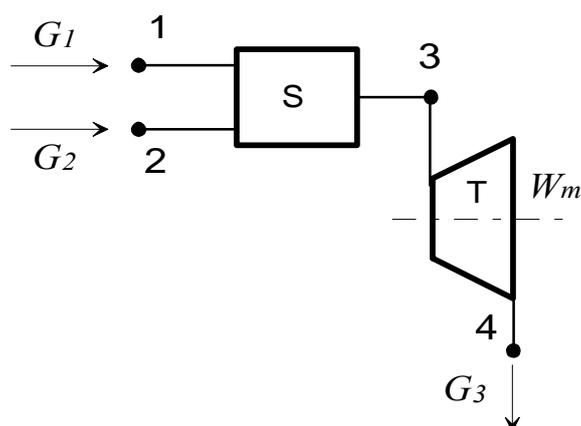
Il sistema si trova in condizioni stazionarie. In prima approssimazione, si può trascurare la caduta di pressione e porre in uscita  $p_2 = p_1$ . Anche le variazioni di energia cinetica e potenziale possono essere trascurate. Dato il piccolo valore dello spessore rispetto al raggio,

la tubazione può essere approssimata ai fini dello scambio termico come una parete piana di superficie  $A = 2 \pi R_M L$ , dove il raggio medio  $R_M$  è pari a  $R_E - s/2$ . I coefficienti di scambio all'interno ed all'esterno valgono rispettivamente  $\alpha_E = 230 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  e  $\alpha_I = 5000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . La conducibilità termica del rame vale  $k = 400 \text{ W/m K}$ . La temperatura dell'aria esterna è  $T_E = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Determinare, utilizzando il diagramma allegato, il titolo del vapore saturo in uscita

[circa 0.6 (la potenza scambiata vale 0.9 kW)]

### ESERCIZIO C.22 (1998)



La turbina a vapore adiabatica rappresentata in figura lavora in condizioni stazionarie ed è alimentata da vapore surriscaldato che viene precedentemente regolato in temperatura iniettando acqua fredda nello scambiatore a miscelamento a monte della turbina stessa. Sono noti i seguenti dati:

- punto 1:  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 200 \text{ bar}$ ;
- punto 2:  $T_2 = 650 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_2 = 200 \text{ bar}$ ;  $G_2 = 0.8 \text{ kg/s}$
- punto 3:  $T_3 = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_3 = 200 \text{ bar}$ ;
- punto 4:  $p_4 = 1 \text{ bar}$ ;
- rendimento isoentropico della turbina  $\eta_t = 0.89$

#### Determinare:

5. La portata di acqua necessaria,  $G_1$ ;
6. la potenza meccanica erogata dalla turbina ( $W_{mT}$ )
7. le condizioni (temperatura  $T_4$  ed eventualmente titolo  $x_4$ ) del vapore in uscita.
8. L'entropia del vapore in uscita,  $s_4$ .

Tracciare inoltre, la trasformazione 2-3-4 del vapore sul diagramma allegato.

La tabella seguente riporta le proprietà del fluido nei punti 1-4, più quelle del punto 4i in cui terminerebbe la espansione ideale (adiabatica e reversibile), il cui stato è definito dalla pressione  $p_4$  e da  $s_{4i}=s_3$ . Per l'acqua in ingresso, l'entalpia può anche essere stimata con sufficiente approssimazione con  $h = c_p T = 4.2 \cdot 20 = 84 \text{ kJ/kg}$ .

**Soluzione**

Dati per il vapore nelle condizioni richieste (i valori di input sono evidenziati in grigio)

	$T$	$p$	$v$	$u$	$h$	$s$	$x$	
	°C	MPa	m <sup>3</sup> /kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg K		
1.	20	20	0.000928	82.75	102.6	0.2922		Compressed Liquid
2.	650	20	0.01969	3281	3675	6.658		Dense Fluid (T>TC)
3.	600	20	0.01818	3174	3538	6.505		Dense Fluid (T>TC)
4i.	99.62	0.1	1.455	2211	2357	6.505	0.8589	Liquid Vapor Mixture
4	99.62	0.1	1.55	2332	2487	6.854	0.917	

Dati di saturazione alla pressione di 1 bar

	99.62	0.1	0.001043	417.3	417.4	1.303	0	Saturated Liquid
	99.62	0.1	1.694	2506	2675	7.359	1	Saturated Vapor

Il bilancio dello scambiatore di calore a miscelamento risulta in

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{h_2 - h_3}{h_3 - h_1}$$

da cui si calcola facilmente la portata di acqua,  $G_1 = G_2 \frac{h_2 - h_3}{h_3 - h_1} = 0.032 \text{ kg/s}$

Notare che il rapporto tra le portate è indipendente dal cognome dello studente. La potenza erogata dalla turbina è data da

$$W'_m = G_3 (h_3 - h_4) = \eta_t (G_1 + G_2) (h_3 - h_{4i}) = 874.4 \text{ kW}$$

La entalpia nel punto 4 può essere ricavata dalla definizione di rendimento isoentropico.

$$\eta_T = \frac{h_4 - h_3}{h_{4i} - h_3} \Rightarrow h_4 = h_3 + \eta_T (h_{4i} - h_3)$$

Nota quest'ultima e la pressione in uscita, è possibile ricavare (dal diagramma o dalle tabelle) le altre proprietà del vapore. In particolare per il titolo si ha:

$$x_4 = \frac{h_4 - h_l}{h_v - h_l} = 0.917$$

□

**ESERCIZIO C.23 (1998)**

Una parete piana in lamiera di acciaio (di conducibilità termica  $k_p = 40 \text{ W/m K}$ ) di superficie  $A = 11.8 \text{ m}^2$ , di spessore  $s_p = 1 \text{ mm}$ , separa due ambienti a temperatura rispettivamente  $T_I = 20 \text{ °C}$  e  $T_E = -5 \text{ °C}$ . I coefficienti di scambio all'esterno ed all'interno valgono rispettivamente  $\alpha_E = 40 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  e  $\alpha_I = 15 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Il sistema si trova in condizioni stazionarie e lo scambio termico può essere considerato monodimensionale. Determinare:

1. lo spessore di materiale isolante  $s_{is}$  (di conducibilità termica  $k_{is} = 0.1 \text{ W/m K}$ ) che è necessario mettere sulla faccia esterna della parete per limitare la potenza termica scambiata attraverso la parete stessa al valore  $W_t = 1.18 \text{ kW}$ ;
2. la temperatura  $T'$  della faccia interna dello strato di isolante.

**Soluzione**

La conduttanza e la resistenza termica di parete sono date da

$$U = \frac{W_t}{T_I - T_E} \Rightarrow R_T = \frac{T_I - T_E}{W_t}$$

e per una parete piana la resistenza termica totale può essere ottenuta sommando le resistenze termiche in serie:

$$R_T = (R_I + R_p + R_{is} + R_E) = \left( \frac{1}{A\alpha_I} + \frac{s_p}{Ak_p} + \frac{s_{is}}{Ak_{is}} + \frac{1}{A\alpha_E} \right)$$

L'equazione suddetta contiene come unica incognita lo spessore dell'isolante che è dato da

$$s_{is} = k_{is} \left[ AR_T - \left( \frac{1}{\alpha_I} + \frac{s_p}{k_p} + \frac{1}{\alpha_E} \right) \right] = 0.0158 \text{ m}$$

Infine, la temperatura della faccia interna della parete è ottenibile come

$$\frac{T_i - T'}{W_t} = \frac{1}{A\alpha_I} + \frac{s_p}{Ak_p} \Rightarrow T' = T_i - \frac{W_t}{A} \left( \frac{1}{\alpha_I} + \frac{s_p}{k_p} \right) = 13.3^\circ\text{C}$$



**ESERCIZIO C.24 (1998)**

Una superficie orizzontale di area  $A = 0.28 \text{ m}^2$  ed emissività  $\varepsilon = 0.19$  irraggia verso il cielo sereno notturno (temperatura  $T_c = -40^\circ\text{C}$ ). Il coefficiente di convezione tra aria e superficie vale  $\alpha = 14.7 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . La parte inferiore della superficie è adiabatica. Determinare il valore della temperatura dell'aria  $T_a$  per cui la superficie, in condizioni stazionarie, si trova a  $T_s = 0^\circ\text{C}$ . La costante di Stefan-Boltzmann vale  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ .

**Soluzione**

La superficie, in equilibrio termico, riceve calore per convezione dall'aria circostante e lo dissipa verso il cielo.

Il bilancio energetico risulta in

$$A\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_c^4) = \alpha A(T_a - T_s)$$

il risultato è indipendente dall'area della superficie

$$T_a = T_s + \frac{\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_c^4)}{\alpha} = 275.06 \text{ K} = 1.9^\circ\text{C}$$



**ESERCIZIO C.25 (1998, facoltativo)**

Si vuole comprimere, in condizioni stazionarie, con un compressore adiabatico di rendimento isoentropico  $\eta_c = 0.935$ , una portata  $G = 0.03 \text{ kg/s}$  di elio (gas ideale con  $c_p$  costante,  $R = 2077 \text{ J/kg K}$ ,  $k = 1.667$ ), dalle condizioni iniziali  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  alle condizioni finali  $p_3 = 6.8 \text{ bar}$ ,  $T_3 = 150^\circ\text{C}$ . Determinare la potenza meccanica necessaria e la potenza termica da asportare nel raffreddamento isobaro che segue la compressione. Tracciare qualitativamente le trasformazioni su un diagramma  $T$ - $s$ .

**Soluzione**

Per un compressore a regime e per un gas ideale con calore specifico costante si ha

$$W'_m = -G(h_2 - h_1) = -Gc_p(T_2 - T_1)$$

la temperatura di fine compressione può essere ottenuta dalla definizione di rendimento isoentropico

$$\eta_c = \frac{T_{2i} - T_1}{T_2 - T_1} \Rightarrow$$

$$T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 631.2 \text{ K}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 654.7 \text{ K} = 381.6^\circ\text{C}$$

da cui si ha la potenza meccanica

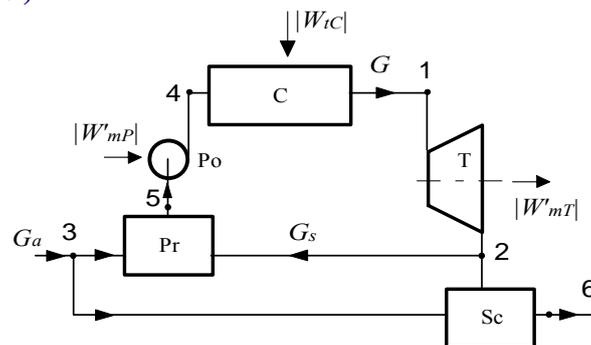
$$W'_m = G c_p (T_1 - T_2) = -56.3 \text{ kW}$$

la potenza termica asportata durante la refrigerazione isobara successiva alla compressione è data da

$$W_i = G (h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2) = -36.1 \text{ kW}$$

□

### ESERCIZIO C.26 (1999)



La turbina a vapore adiabatica **T** rappresentata in Figura lavora in condizioni stazionarie ed è alimentata da vapore surriscaldato che viene prodotto nell'insieme caldaia-preriscaldatore (**C**, **Pr**) a monte di essa. Una pompa **Po** (che si può considerare adiabatica) comprime il fluido tra il preriscaldatore e la caldaia. All'uscita della turbina, una parte della portata di vapore viene inviata ad alimentare il preriscaldatore **Pr** (che è uno scambiatore a miscelamento) mentre la rimanente alimenta un secondo scambiatore a miscelamento **Sc** per la produzione di acqua riscaldata. **Pr** ed **Sc** sono adiabatici. Sono noti i seguenti dati:

punto 1:  $T_1 = 470^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 60 \text{ bar}$ ;

punto 2:  $p_2 = 4 \text{ bar}$ ;

punto 3:  $T_3 = 20^\circ\text{C}$ ,  $p_3 = 4 \text{ bar}$ ;

punto 4:  $p_4 = p_1$ ,  $s_4 = s_5$ ;

punto 5:  $p_5 = 4 \text{ bar}$ ,  $x_5 = 0$ ;

punto 6:  $T_6 = 130^\circ\text{C}$ ,  $p_6 = 4 \text{ bar}$ ;

incremento di entropia nella turbina:  $s_2 - s_1 = 0.5 \text{ kJ/kg K}$ ;

potenza meccanica utile all'asse della turbina:  $W'_{mT} = 560 \text{ kW}$ .

**Determinare:**

1. Le condizioni (temperatura  $T_2$  ed eventualmente titolo  $x_2$ ) del vapore in uscita dalla turbina;
2. la portata di vapore necessaria per alimentare la turbina, ( $G$ );
3. il rendimento isoentropico della turbina  $\eta_t$ ;
4. la potenza termica scambiata nella caldaia **C** ( $W_{TC}$ );

5. la potenza meccanica assorbita dalla pompa  $P_o$  ( $W'_{mP}$ );
6. la portata di vapore che è necessaria per alimentare il preriscaldatore, ( $G_s$ );
7. la portata di acqua di alimento ( $G_a$ ).
8. la quantità di acqua nelle condizioni 6,  $M_6$ , che è possibile produrre in un'ora di funzionamento dell'impianto.

Tracciare inoltre la trasformazione 4-1-2 del vapore sul diagramma  $h$ - $s$ .

### Soluzione

1) Le condizioni in uscita sono determinate dalla coppia di variabili  $p_2, s_2$ ; dal diagramma si ottiene

$$h_2 = 2916 \text{ kJ/kg}, T_2 = 227 \text{ °C}, x_2 = 0.98$$

2) Dalla espressione della potenza della turbina si ottiene direttamente la portata  $G$ , una volta noto il salto entalpico:

$$G = \frac{W'_{mT}}{h_1 - h_2} = \frac{560}{3350 - 2916} = 1.29 \text{ kg/s}$$

3) Il rendimento isoentropico si ottiene confrontando il salto entalpico reale con quello ideale ( $s_{2I} = s_1$ )

$$\eta_T = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2I}} = \frac{3350 - 2916}{3350 - 2693} = 0.66$$

4) La potenza termica scambiata in caldaia, non avendo essa parti in movimento ed essendo quindi nulla la potenza meccanica scambiata è data da

$$W_{TC} = G(h_1 - h_4) = 1.29 \cdot (3350 - 90) = 4205 \text{ kW}$$

notare che  $h_4$  può essere ricavato dalle tabelle o con sufficiente approssimazione da  $h_4 = 4.2 T_4$ .

5) La potenza meccanica assorbita dalla pompa, che è isoentropica, si può ottenere integrando  $-v dp$  per un fluido incomprimibile. Si può assumere  $v_5 = v_4 = 0.0011 \text{ m}^3/\text{kg}$  (volume del liquido saturo a 4 bar).

$$W'_{mP} = -G v_4 (p_4 - p_5) = -1.29 \cdot 0.0011 \cdot (6000 - 400) = -7.9 \text{ kW}$$

6) Dai bilanci di massa ed energia del preriscaldatore si ottiene

$$G = G_s + G_3 \Rightarrow G_3 = G - G_s$$

$$G h_5 = G_s h_2 + G_3 h_3 \Rightarrow G h_5 = G_s h_2 + (G - G_s) h_3$$

da cui infine

$$G_s = G \frac{h_5 - h_3}{h_2 - h_3} = 1.29 \frac{605 - 84}{2916 - 84} = 0.237 \text{ kg/s}$$

7) La portata di acqua di alimento si può determinare semplicemente dal bilancio globale di energia dell'intero sistema:

$$0 = W_{iC} - W'_{mP} - W'_{mT} + G_a (h_3 - h_6)$$

$$G_a = \frac{W_{iC} - W'_{mP} - W'_{mT}}{h_6 - h_3} \cong \frac{W_{iC} - W'_{mT}}{c(T_6 - T_3)} = \frac{4208 - 560}{4.2 \cdot (130 - 20)} = 7.9 \text{ kg/s}$$

dove di nuovo si può porre  $h_6 = 4.2 T_6$ . e trascurare la potenza della pompa.

8) Dal bilancio di massa dell'intero sistema segue che  $G_6 = G_a$  per cui

$$M_6 = G_6 t = 7.9 \cdot 3600 = 28.5 \text{ t}$$



**ESERCIZIO C.27 (1999)**

Il filo cilindrico di una resistenza elettrica, di diametro  $D = 1.07$  mm e lunghezza  $L = 1.5$  m, ha una temperatura superficiale di lavoro  $T_s = 700$  °C ed una emissività  $\varepsilon = 0.87$ . Esso è raffreddato da aria in convezione naturale alla temperatura  $T_a = 20$  °C con un coefficiente di scambio  $\alpha = (5 + 0.5N)$  W/m<sup>2</sup> K. ed è circondato da pareti opache alla temperatura  $T_p = 10$  °C. Determinare la corrente che passa nel filo se la sua resistenza elettrica è  $R_e = 10$  Ohm (come è noto, la potenza dissipata per effetto Joule è data da  $W = RI^2$ ).

**Soluzione**

La potenza dissipata è data da

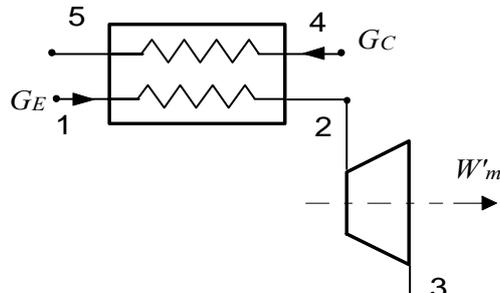
$$W_T = A\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_p^4) + \alpha A(T_s - T_a) =$$

$$= 0.005042 \cdot [0.87 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (973.15^4 - 283.15^4) + 14.5 \cdot (700 - 20)] = 271.19 \text{ W}$$

$$I = \sqrt{\frac{W_T}{R}} = \sqrt{\frac{271.19}{10}} = 5.21 \text{ A}$$



**ESERCIZIO C.28 (1999, facoltativo)**



La turbina adiabatica rappresentata in figura lavora in condizioni di regime ed ha rendimento isoentropico  $\eta_t = 0.95$ . Essa è alimentata di elio (gas ideale con  $c_p$  costante,  $R = 2077$  J/kg K,  $k = 1.667$ ) alla pressione e temperatura di ingresso nello scambiatore  $p_1 = 20$  bar,  $T_1 = 100$  °C e nella turbina  $p_2 = 20$  bar,  $T_2 = 830$  °C, pressione di uscita dalla turbina  $p_3 = 4$  bar. L'elio viene riscaldato in uno scambiatore, il cui lato primario è alimentato con una portata  $G = 1.1$  kg/s gas di combustione ( $c_p = 1100$  J/kg K, costante) che in ingresso ha pressione e temperatura  $p_4 = 1$  bar,  $T_4 = 1380$  °C ed esce dallo scambiatore alla temperatura  $T_5 = 300$  °C,  $p_5 = . p_4$ . Determinare 1) la portata di elio  $G_E$ , 2) la sua temperatura di uscita dalla turbina  $T_3$ , 3) la potenza erogata dalla turbina  $W'_m$ . Tracciare qualitativamente le trasformazioni dell'elio su un diagramma  $T$ - $s$  schizzato a mano.

**Soluzione**

1) Dal bilancio dello scambiatore di calore si ottiene la portata di elio

$$G_C (h_4 - h_5) = G_E (h_2 - h_1)$$

$$G_E = G_C \frac{h_4 - h_5}{h_2 - h_1} = G_C \frac{c_{pC} (T_4 - T_5)}{c_{pE} (T_2 - T_1)} = 1.1 \frac{1100(1380 - 300)}{5191(830 - 100)} = 0.345 \text{ kg/s}$$

2) Le temperature di uscita ideale e reale valgono rispettivamente, per  $\eta_T = 0.95$ :

$$T_{3i} = T_2 \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 1103 \left( \frac{4}{20} \right)^{0.4} = 579 \text{ K}$$

$$T_3 = T_2 - (T_2 - T_{3i}) \eta_T = 605 \text{ K} = 332 \text{ °C}$$

3) Nella turbina adiabatica e a regime, e per un gas ideale con calore specifico costante, si ha

$$W'_m = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2) = 0.345 \cdot 5191 \cdot (830 - 332) = 890.7 \text{ kW}$$



### ESERCIZIO C.29 (2000)

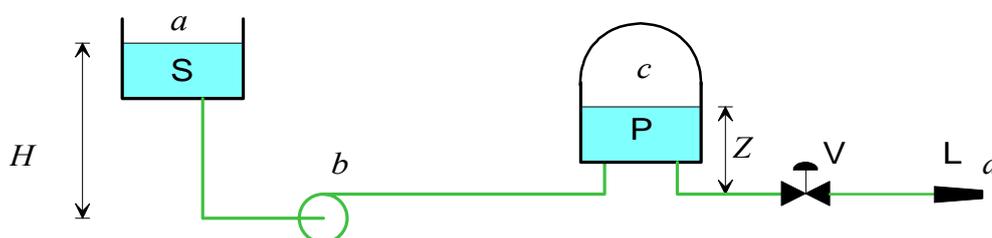
Il circuito idraulico rappresentato in figura è costituito da una pompa che preleva acqua alla temperatura di 20 °C dal serbatoio S (in contatto con l'atmosfera) e la trasferisce, tramite l'accumulatore in pressione P e la valvola V, alla lancia L da cui l'acqua viene espulsa nell'atmosfera alla velocità di 20 m/s. Tra la superficie libera del serbatoio e la lancia vi è una differenza di livello  $H = 11 \text{ m}$ . La portata nel circuito vale  $G = 5 \text{ kg/s}$ ; per tutte le tubazioni si può assumere un valore del coefficiente di Darcy  $\lambda = 0.02$ ; si può assumere per l'acqua una densità  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

Sono noti i seguenti dati

- Tubazione a-b: lunghezza  $L_{ab} = 4 \text{ m}$ , velocità media del fluido  $w_{ab} = 3.15 \text{ m/s}$ ,
- Tubazione b-c: lunghezza  $L_{bc} = 20 \text{ m}$ , diametro  $D_{bc} = 0.8 D_{ab}$ ;
- Tubazione c-d: lunghezza  $L_{cd} = 4 \text{ m}$ , diametro  $D_{cd} = D_{bc}$ .

La valvola V ha un coefficiente di perdita di carico concentrata  $K_v = 6$ . Assumendo dei valori plausibili per i coefficienti di perdita di carico concentrata nelle rimanenti discontinuità rilevabili dal disegno, e trascurando detta perdita per la lancia L, determinare:

1. La prevalenza della pompa  $h'$ ;
2. La potenza resa dalla pompa al fluido  $W_p$ ;
3. La pressione relativa all'interno del polmone P, la cui superficie libera si trova ad un'altezza  $Z = 3 \text{ m}$  superiore rispetto a quella della lancia L.



### Soluzione

Il diametro della tubazione a-b è ottenibile dal valore della portata

$$G = \rho w_{ab} A = \rho w_{ab} \frac{\pi D_{ab}^2}{4} ; D_{ab} = \sqrt{\frac{4G}{\pi \rho w_{ab}}} = 0.045 \text{ m}$$

La velocità  $w_{bc} = w_{cd}$  è ottenibile dall'equazione di continuità

$$w_{ab} \frac{\pi D_{ab}^2}{4} = w_{bc} \frac{\pi D_{bc}^2}{4} ; w_{bc} = w_{ab} \frac{D_{ab}^2}{D_{bc}^2} = \frac{w_{ab}}{0.8^2} = 4.92 \text{ m/s}$$

La prima parte del problema (domande 1 e 2) si risolve applicando l'equazione generalizzata di Bernoulli tra le sezioni a e d, tenuto conto che  $p_a = p_d$  e che la velocità sulla superficie libera del serbatoio può essere trascurata

$$\frac{w_d^2}{2g} - H = h' - h_a$$

Le perdite di carico distribuite valgono

$$h_{ad} = \lambda \frac{L_{ab}}{D_{ab}} \frac{w_{ab}^2}{2g} + \lambda \frac{L_{bc}}{D_{bc}} \frac{w_{bc}^2}{2g} + \lambda \frac{L_{cd}}{D_{cd}} \frac{w_{cd}^2}{2g} = 17 \text{ m}$$

Le perdite concentrate (assunto il valore di  $K = 0.5$  per le tre curve a gomito presenti e  $K = 1$  per i tre punti di ingresso/uscita da serbatoio) valgono

$$h_{ac} = 1 \frac{w_{ab}^2}{2g} + 0.5 \frac{w_{ab}^2}{2g} + 0.5 \frac{w_{bc}^2}{2g} + 1 \frac{w_{bc}^2}{2g} + 1 \frac{w_{cd}^2}{2g} + 0.5 \frac{w_{cd}^2}{2g} + 6 \frac{w_{cd}^2}{2g} = 11.87 \text{ m}$$

Si ottiene quindi

$$h' = h_a + \frac{w_d^2}{2g} - H = 38.5 \text{ m}$$

La potenza resa dalla pompa al fluido vale

$$W_p = G g h' = 1.42 \text{ kW}$$

Per la domanda 3 è necessario applicare l'equazione di Bernoulli al solo tratto  $c-d$  di circuito

$$\frac{p_d - p_c}{\gamma} + \frac{w_d^2}{2g} - Z = -h_a$$

dalla quale, considerato che le perdite di carico concentrate e distribuite valgono rispettivamente

$$h_{ac} = 1 \frac{w_{cd}^2}{2g} + 0.5 \frac{w_{cd}^2}{2g} + 6 \frac{w_{cd}^2}{2g} = 9.26 \text{ m}$$

$$h_{ad} = \lambda \frac{L_{cd}}{D_{cd}} \frac{w_{cd}^2}{2g} = 2.7 \text{ m}$$

si ottiene il valore della pressione relativa nel serbatoio:

$$p_c - p_d = \gamma \left( \frac{w_d^2}{2g} - Z + h_a \right) = 305 \text{ kPa}$$

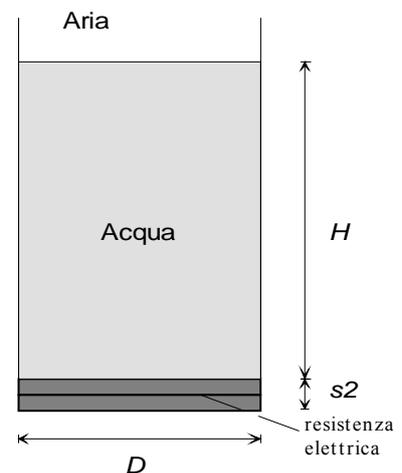
□

### ESERCIZIO C.30 (2000)

Il recipiente cilindrico rappresentato in figura ha diametro  $D = 49 \text{ cm}$  ed altezza  $H = 30 \text{ cm}$ , è riempito di acqua a temperatura  $T_i = 44.6 \text{ °C}$ , ed è mantenuto in comunicazione con l'ambiente esterno, che si trova a temperatura  $T_e = 15 \text{ °C}$ . La parete laterali del recipiente è di acciaio inox ( $k_l = 16 \text{ W/m K}$ ) di spessore  $s_l = 3.3 \text{ mm}$ , mentre il fondo è di alluminio ( $k_2 = 200 \text{ W/m K}$ ) di spessore  $s_2 = 20 \text{ mm}$ .

Nel fondo, a distanza uguale dalle due facce dello stesso, è inglobata una resistenza elettrica piana (di spessore trascurabile) che eroga una potenza  $W_e = 2 \text{ kW}$ . Il coefficiente di scambio termico convettivo tra tutte le pareti (incluso il fondo) e l'acqua vale  $\alpha_l = 150 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  e quello tra tutte le pareti (incluso il fondo) e l'aria esterna vale  $\alpha_E = 15 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Il contributo dell'irraggiamento è già considerato nel valore dei coefficienti di convezione. Determinare:

1. La potenza termica  $W_p$ , scambiata tra l'acqua del recipiente e l'esterno attraverso la parete laterale.
2. La frazione della potenza  $W_e$  erogata dalla resistenza che viene trasferita all'acqua all'interno del recipiente.
3. L'altezza di cui varia la superficie libera dell'acqua nel recipiente quando la sua temperatura varia da  $20 \text{ °C}$  a  $80 \text{ °C}$ . A tal fine si può assumere un valore medio del



coefficiente di dilatazione isobaro  $\beta = 4.6 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , oppure ricavare gli opportuni dati dalle tabelle termodinamiche dell'acqua.

**Soluzione**

1. La parete del recipiente, dato il piccolo spessore rispetto al diametro, si può schematizzare come una superficie piana lambita da due fluidi di superficie pari a

$$A_p = \pi D H = 0.0461 \text{ m}^2$$

la resistenza termica, assumendo il modello di parete piana lambita da due fluidi, è data da

$$R_p = \frac{1}{\alpha_I A_p} + \frac{s_1}{k_1 A_p} + \frac{1}{\alpha_I A_p} = 0.159 \text{ K/W}$$

quindi la potenza termica scambiata tra interno ed esterno vale

$$W_p = \frac{T_i - T_e}{R_p} = 185 \text{ W}$$

2. Il fondo della pentola è schematizzabile come due resistenze termiche in parallelo, ciascuna costituita dalla resistenza conduttiva di uno strato di alluminio avente spessore pari alla metà di quello del fondo stesso, più la resistenza convettiva verso il fluido che lo lambisce. La potenza termica  $W_p$  si ripartisce tra queste due resistenze. Si ha quindi, detta  $T_r$  la temperatura della resistenza (non richiesta dal problema),  $R_1$  la resistenza termica in direzione dell'acqua,  $R_2$  quella in direzione dell'aria e  $W_1, W_2$  le relative potenze termiche scambiate

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_I A_f} + \frac{s_2/2}{k_2 A_f} = 0.036 \text{ K/W} \quad , \quad R_2 = \frac{1}{\alpha_E A_f} + \frac{s_2/2}{k_2 A_f} = 0.354 \text{ K/W}$$

$$W_e = W_1 + W_2 \quad (1)$$

$$W_2 = \frac{T_r - T_E}{R_2} \quad (2)$$

$$W_1 = \frac{T_r - T_I}{R_1} \quad (3)$$

eliminando  $T_r$  dalle ultime due equazioni (2), (3) e sostituendo il valore di così ricavato nella precedente equazione (1) si ottiene

$$W_1 = \frac{W_e + (T_I - T_E)/R_2}{1 + R_1/R_2} = 1741 \text{ W}$$

3. La variazione di volume del fluido può essere ottenuta alternativamente come (gli indici  $i$  ed  $f$  si riferiscono rispettivamente allo stato iniziale e finale)

$$\beta (T_f - T_i) = \ln \frac{V_f}{V_i} \cong \frac{\Delta V}{V_i} \quad ; \quad \Delta V = V_i \beta (T_f - T_i) = 1.56 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

oppure

$$V_f = M v_f \quad ; \quad M = \frac{V_i}{v_i} \quad ; \quad V_f = \frac{v_f}{v_i} V_i \quad ; \quad \Delta V = V_i \left( \frac{v_f}{v_i} - 1 \right) = 1.52 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

La variazione di livello nel recipiente è data da

$$\Delta V = \frac{\pi D_b^2}{4} \Delta L \quad ; \quad \Delta L = \frac{4 \Delta V}{\pi D_b^2} = 8.3 \text{ mm}$$



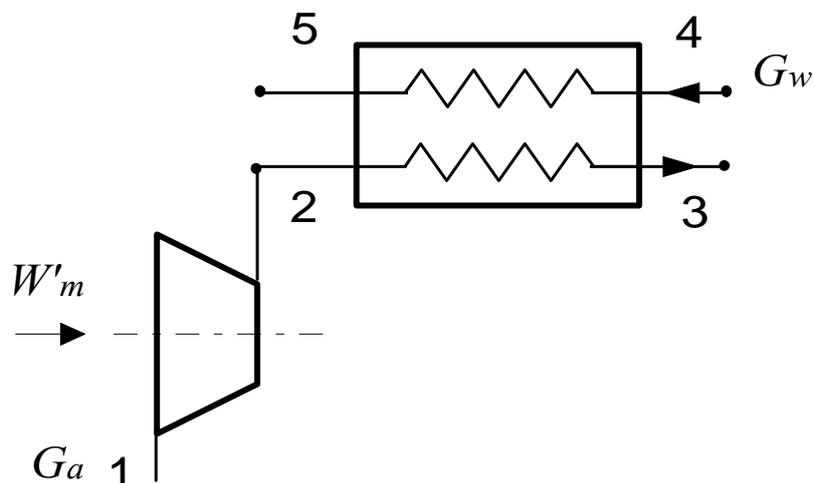
**ESERCIZIO C.31 (2000 - Per l'anno 2000 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Si vuole ottenere una portata di  $G_a = 43 \text{ kg/s}$  di aria a 15 bar e ad una temperatura di  $115 \text{ }^\circ\text{C}$ , prelevando aria atmosferica (pressione di 1 bar) alla temperatura di  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ . A tale scopo (vedi figura) si comprime l'aria in un compressore adiabatico, con rendimento isoentropico pari a 0.915, e poi la si refrigera in uno scambiatore di calore a superficie, adiabatico verso l'esterno. Il raffreddamento dell'aria viene ottenuto utilizzando acqua alla pressione di 1 bar ed alla temperatura di ingresso di  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . L'acqua esce dallo scambiatore in condizioni di vapore saturo con un titolo  $x_5 = 0.93$ . Le trasformazioni nello scambiatore (2-3, 4-5) possono essere considerate isobare.

Si determini:

1. la temperatura dell'aria in uscita dal compressore,  $T_2$ ;
2. la potenza meccanica di compressione  $W'_m$ ;
3. la potenza termica scambiata nello scambiatore di calore tra i due fluidi;
4. la portata d'acqua necessaria per il raffreddamento,  $G_w$ ;
5. Il valore del termine di irreversibilità ( $\dot{S}_{irr}$ ) nel sistema costituito dallo scambiatore.

(Si consideri l'aria come un gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/(kg K)}$  costante ed  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ )



**Soluzione**

La temperatura ideale e reale in uscita dal compressore sono date rispettivamente da

$$T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} = 656 \text{ K} \quad ; \quad T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 689 \text{ K}$$

La potenza meccanica necessaria al compressore vale

$$W'_m = G(h_1 - h_2) = G c_p (T_1 - T_2) = -16.71 \text{ MW}$$

e quella ceduta dall'aria all'acqua nello scambiatore

$$W_T = G c_p (T_2 - T_3) = -13.03 \text{ MW}$$

L'entalpia e l'entropia di ingresso e di uscita dell'acqua (ricavabili dalle tabelle o dal diagramma dell'acqua) valgono rispettivamente

$$h_4 = 84.03 \text{ kJ/kg}; \quad h_5 = 2517 \text{ kJ/kg}; \quad s_4 = 0.2965 \text{ kJ/kg K}; \quad s_5 = 6.935 \text{ kJ/kg K};$$

quindi la portata di acqua necessaria è ottenibile dal bilancio energetico dello scambiatore

$$G_w = \frac{G c_p (T_2 - T_3)}{h_5 - h_4} = 5.4 \text{ kg/s}$$

mentre il termine di irreversibilità si ricava dal bilancio entropico dello scambiatore

$$G_a (s_2 - s_3) + G_w (s_4 - s_5) + \dot{S}_{irr} = 0 \quad ;$$

$$\dot{S}_{irr} = G_a (s_3 - s_2) + G_w (s_5 - s_4) = G_a \left( c_p \ln \frac{T_3}{T_2} - R \ln \frac{p_3}{p_2} \right) + G_w (s_5 - s_4) = 11 \text{ kW/K}$$

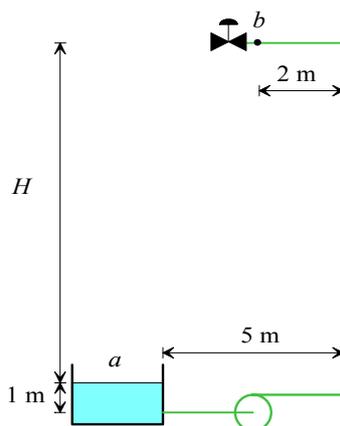
ed essendo positivo indica che la trasformazione è irreversibile.

□

**ESERCIZIO C.32 (2001 - Per l'anno 2001 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Per l'impianto antincendio schematizzato in figura, si ha  $H = 24.5 \text{ m}$ . Le prescrizioni impongono che all'attacco della manichetta (punto b) deve arrivare una portata  $G_v = 73 \text{ litri/min}$  di acqua a  $26.9 \text{ }^\circ\text{C}$ , alla pressione relativa di 1.5 bar. Ricavando dalle tabelle allegate i dati mancanti, determinare:

1. il diametro della tubazione, in acciaio galvanizzato, selezionato tra quelli unificati della serie standard (v. tabella), per una velocità del fluido non superiore a  $2 \text{ m/s}$ ;
2. la prevalenza della pompa;
3. la potenza resa al fluido e quella assorbita dalla pompa stessa, ipotizzando per la medesima un rendimento  $\eta_p = 0.65$ .



**Soluzione (redatta da N.Forgione)**

La viscosità e la densità dell'acqua a  $26.9 \text{ }^\circ\text{C}$  sono ricavabili per interpolazione lineare dai dati della tabella a  $21$  e  $66 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$\mu = \mu(21) + \frac{26.9 - 21}{66 - 21} [\mu(66) - \mu(21)] = 0.978 + \frac{26.9 - 21}{66 - 21} [0.434 - 0.978] = 0.9067 \text{ mPa s}$$

$$\rho = \rho(21) + \frac{26.9 - 21}{66 - 21} [\rho(66) - \rho(21)] = 997 + \frac{26.9 - 21}{66 - 21} [979 - 997] = 994.64 \text{ kg/m}^3$$

Il diametro minimo della tubazione è ottenibile dal valore della portata volumetrica, dopo aver convertito la portata in unità SI ( $G_v = 1.22 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ )

$$G_v = w_{\max} A = w_{\max} \frac{\pi D_{\min}^2}{4} ; D_{\min} = \sqrt{\frac{4 G_v}{\pi w_{\max}}} = 0.0279 \text{ m} = 27.9 \text{ mm}$$

Il diametro deve essere quindi portato al valore immediatamente superiore tra quelli interni disponibili in tabella ovvero ad  $1\frac{1}{4}$ " , a cui corrisponde un diametro interno effettivo di  $D_{eff} = 0.03508 \text{ m}$

La velocità  $w$  deve quindi essere ricalcolata per il valore effettivo del diametro della tubazione  $w = \frac{G_v}{A} = \frac{4G_v}{\pi D_{eff}^2} = 1.26 \text{ m/s}$

La prevalenza della pompa si determina applicando l'equazione generalizzata di Bernoulli tra le sezioni  $a$  e  $b$ , tenuto conto che la velocità sulla superficie libera del serbatoio può essere trascurata e che  $p_a = p_{atm}$

$$\frac{p_b - p_a}{\gamma} + \frac{w_b^2}{2g} + H = h' - h_a$$

tenendo conto che  $p_b - p_a$  rappresenta appunto la pressione relativa nel punto b, ovvero 1.5 bar = 150000 Pa.

Il coefficiente di Darcy può essere determinato con la formula di Haaland una volta noti il numero di Reynolds e la rugosità relativa che valgono

$$Re = \frac{\rho w D_{eff}}{\mu} = 48488; \quad \varepsilon = 150 \text{ } \mu\text{m}, \text{ da cui}$$

$$\lambda = \left\{ -0.782 \ln \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon}{3.7 D_{eff}} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} = 0.0309$$

Le perdite di carico distribuite lungo i 32.5 m di tubo valgono dunque  $h_{ad} = \lambda \frac{L}{D_{eff}} \frac{w^2}{2g} = 2.32 \text{ m}$

Le perdite concentrate (assunto il valore di  $K = 0.5$  per le due curve a gomito presenti e  $K = 1$  per il punto di uscita dal serbatoio) valgono

$$h_{ac} = 1 \frac{w^2}{2g} + 0.5 \frac{w^2}{2g} + 0.5 \frac{w^2}{2g} = 0.16 \text{ m}$$

Si noti che la valvola in uscita non deve essere considerata perché esterna al sistema.

Si ottiene quindi infine  $h' = h_a + \frac{p_b - p_{atm}}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + H = 42.43 \text{ m}$

La potenza resa dalla pompa al fluido vale  $W_p = G g h' = 0.50 \text{ kW}$

e quella assorbita  $W_{ass} = \frac{W_p}{\eta_p} = 0.78 \text{ kW}$

□

**ESERCIZIO C.33 (2001 - Per l'anno 2001 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Una portata volumetrica  $G_{v1} = 23 \text{ m}^3/\text{h}$  di aria alla pressione  $p_1 = 60 \text{ bar}$  ed alla temperatura  $T_1 = 49 \text{ }^\circ\text{C}$  viene introdotta alla velocità  $w_1 = 206 \text{ m/s}$  in un diffusore, da cui esce alla velocità  $w_2 = 20 \text{ m/s}$ . Il processo è stazionario e reversibile, e le pareti del diffusore sono adiabatiche e rigide. Determinare:

1. la portata in massa nel dispositivo;
2. il numero di Mach in ingresso,  $M_1$ ;
3. la temperatura di uscita dell'aria e la sua pressione,  $T_2, p_2$ ;
4. la portata volumetrica in uscita  $G_{v2}$ ;
5. la sezione di ingresso e di uscita del diffusore ( $A_1, A_2$ ).

Si consideri l'aria come un gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$  costante ed  $R = 287 \text{ J/kg K}$ .

**Soluzione (redatta da N.Forgione)**

Il volume specifico in ingresso è dato da  $v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0.0154 \text{ m}^3/\text{kg}$ , per cui la portata massica

$$\text{vale } G = \frac{G_{v,1}}{v_1} = 0.415 \text{ kg/s}$$

La velocità del suono in ingresso è data da  $c_1 = \sqrt{k RT_1} = \sqrt{\frac{c_p}{c_p - R} RT_1} = 359.74 \text{ m/s}$

Ed il numero di Mach vale quindi  $M_1 = \frac{w_1}{c_1} = 0.573$

Il bilancio di energia si scrive come

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}$$

da cui, sfruttando l'ipotesi di gas ideale, si ottiene la temperatura in uscita

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2c_p} (w_1^2 - w_2^2) = 69.91 \text{ °C}$$

La pressione in uscita si può derivare dall'espansione isoentropica di un gas ideale

$$p_2 = p_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{c_p/R} = 74.78 \text{ bar}$$

e quindi il volume in uscita è dato da  $v_2 = \frac{RT_2}{p_2} = 0.0132 \text{ m}^3/\text{kg}$ ;

La portata volumetrica in uscita vale  $G_{v,2} = G v_2 = 0.0055 \text{ m}^3/\text{s}$

Le sezioni in ingresso ed in uscita sono date da  $A_1 = \frac{G_{v,1}}{w_1} = 3.10 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ;

$$A_2 = \frac{G_{v,2}}{w_2} = \frac{G v_2}{w_2} = 27.39 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

□

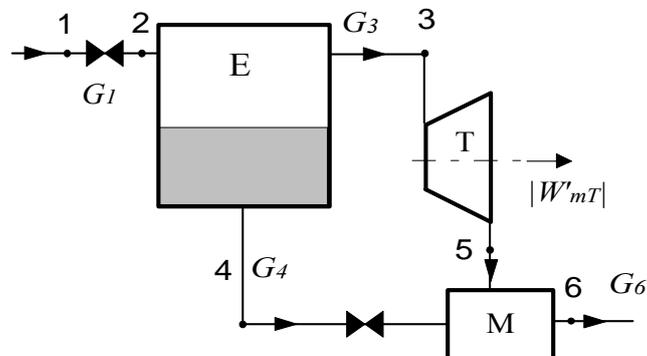
**ESERCIZIO C.33 (2001 - Per l'anno 2001 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Nell'impianto schematizzato in Fig.2, una portata  $G_1 = 0.43 \text{ kg/s}$  di acqua proveniente da una sorgente geotermica, alla pressione  $p_1 = 100 \text{ bar}$  ed alla temperatura  $T_1 = 291 \text{ °C}$ , viene fatta espandere irreversibilmente in un evaporatore a flash° (E) per ottenere vapore saturo secco ( $x_3 = 1$ ) alla pressione  $p_3 = 60 \text{ bar}$ , che viene inviato ad una turbina (T) con rendimento isoentropico di espansione  $\eta_t = 0.93$ , in cui si espande fino alla pressione  $p_5 = 200 \text{ kPa}$ . Il liquido saturo ( $x_4 = 0$ ,  $p_4 = 60 \text{ bar}$ ) che viene scaricato alla base dell'evaporatore viene laminato, miscelato adiabaticamente nel miscelatore (M) con il vapore in uscita dalla turbina ed inviato (alla pressione  $p_6 = p_5 = 200 \text{ kPa}$ ) ad un impianto di teleriscaldamento. Il sistema è a regime e tutti i suoi componenti sono adiabatici; le pareti dell'evaporatore e del miscelatore e delle valvole di laminazione sono rigide. Determinare:

1. la portata di vapore all'ingresso turbina,  $G_3$  ;
2. la portata di liquido scaricata dall'evaporatore,  $G_4$  e la sua temperatura,  $T_4$ ;
3. la potenza meccanica erogata dalla turbina,  $W'_{mi}$ ;
4. il titolo e la temperatura in uscita alla turbina  $x_5$ ,  $T_5$ ;

5. la portata, l'entalpia e la temperatura ed il titolo ( $G_6, h_6, T_6, x_6$ ) del fluido in uscita dal punto 6.
6. la massima potenza meccanica teoricamente ottenibile dal sistema (secondo l'analisi di disponibilità) ed il rendimento di secondo principio dello stesso. Considerare per lo stato morto  $T_0 = 25\text{ °C}$ .

° un evaporatore a flash è un dispositivo in cui si introduce un liquido sottoraffreddato che, per effetto di una repentina variazione di pressione, evapora parzialmente; la separazione delle fasi avviene per gravità.



**Soluzione (redatta da N.Forgione)**

lo stato in ogni punto). Si ha  $G_1 = 0.43\text{ kg/s}$ ,  $\eta_T = 0.93$ .

punto	$T, \text{ °C}$	$p, \text{ bar}$	$h, \text{ kJ/kg}$	$s, \text{ kJ/kg K}$	$x$
1	291	100	1292.4	3.1579	-
3	275.6	60	2784.5	5.8896	1
4	275.6	60	1213.7	3.0269	0
5i	120.2	2	2220.3	5.8896	0.779
5	120.2	2	2259.8	5.9913	0.797
6	120.2	2	1266.2	3.4655	0.346

I bilanci di massa ed energia dell'evaporatore (includendovi la valvola di laminazione 1-2) si scrivono rispettivamente come

$$G_1 = G_3 + G_4$$

$$G_1 h_1 = G_3 h_3 + G_4 h_4$$

Da cui tenuto conto che  $h_3 = h_g$  e  $h_4 = h_f$  alla pressione di 60 bar, si può ricavare

$$G_3 = G_1 \frac{h_1 - h_f}{h_g - h_f} = 0.0215\text{ kg/s}$$

$$G_4 = G_1 - G_3 = 0.4085\text{ kg/s}$$

Per quanto riguarda la turbina, come ben noto si ricava innanzi tutto l'entalpia ideale in uscita  $h_{5i}$  imponendo una trasformazione isoentropica, ovvero  $s_3 = s_{5i}$ ; si ha poi

$$h_5 = h_3 - \eta_T (h_3 - h_{5i}) = 2259.8\text{ kJ/kg}$$

$$W'_{mT} = G_3 (h_3 - h_5) = 11.28\text{ kW}$$

noti  $h_5$  e  $p_5$ , si può ricavare il titolo in uscita (v. tabella).

Per i punti 5 e 6 risulta più facile considerare il bilancio dell'intero sistema. Per esso si ha ovviamente per il bilancio di massa

$$G_6 = G_1$$

e per il bilancio di energia  $G_6 h_6 + W'_{mT} = G_1 h_1$ , da cui si ricava  $h_6 = h_1 - \frac{W'_{mT}}{G_1} = 1266.2 \text{ kJ/kg}$

e da questo valore, insieme a quello della pressione  $p_6 = p_5$ , si ricavano le proprietà del punto 6.

Infine, il bilancio di disponibilità per l'intero sistema fornisce

$$W'_{m,a} = G_1 a_{f,1} - G_6 a_{f,6} = G_1 [h_1 - h_6 - T_0 (s_1 - s_6)] = 50.7 \text{ kW}$$

da cui il rendimento di secondo principio vale  $\varepsilon = \frac{W'_{mT}}{W'_{m,a}} = 0.22$



**ESERCIZIO C.34 (2002 - Per l'anno 2002 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

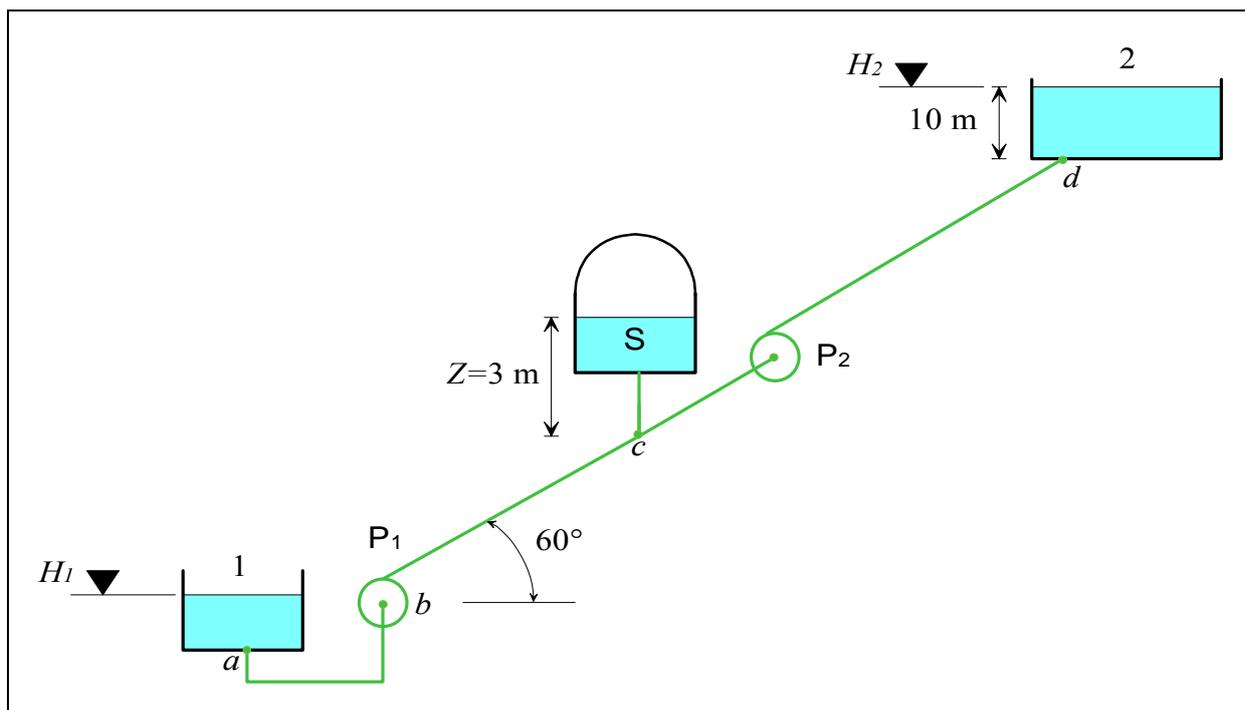
L'impianto di pompaggio rappresentato in figura sfrutta la sovrapproduzione di energia elettrica nelle ore notturne per sollevare una portata di acqua  $G = 100 \text{ t/min}$  alla temperatura di  $20 \text{ °C}$  da un bacino inferiore alla quota  $H_1 = 50 \text{ m}$  ad uno superiore alla quota  $H_2 = 630 \text{ m}$ . La tubazione è costituita da due spezzoni principali di differente diametro,  $b-c$  e  $c-d$ , alla cui congiunzione  $c$  (alla quota  $H_c = 250 \text{ m}$ ) si trova l'accumulatore S, e nei quali sono inserite due pompe  $P_1$  e  $P_2$ . La tubazione è rettilinea e giace lungo un pendio inclinato di  $60^\circ$ .

Sono noti i seguenti dati

- Tubazione  $a-b$ : lunghezza  $L_{ab} = 15 \text{ m}$ , velocità media del fluido  $w_{ab} = 3 \text{ m/s}$ , coefficiente di Darcy  $\lambda_{ab} = 0.03$ .
- Tubazione  $b-c$ : diametro  $D_{bc} = D_{ab}$ , coefficiente di Darcy  $\lambda_{bc} = 0.03$ .
- Tubazione  $c-d$ : diametro  $D_{cd} = 0.7 D_{ab}$ , coefficiente di Darcy  $\lambda_{cd} = 0.025$ .
- Pompa  $P_1$ , prevalenza  $h'_1 = 300 \text{ m}$ , rendimento  $\eta_{p1} = 0.8$ .
- Pompa  $P_2$ , rendimento  $\eta_{p2} = 0.75$ .

Trascurando le perdite di carico concentrate, determinare:

4. La prevalenza della pompa  $P_2$ ,  $h'_2$ ;
5. La potenza elettrica necessaria per il pompaggio del fluido  $W_{tot}$  (si consideri unitario il rendimento elettrico).
6. La pressione relativa all'interno dell'accumulatore S, la cui superficie libera si trova ad un'altezza  $Z = 3 \text{ m}$  superiore rispetto a quella del punto  $c$ .
7. La potenza elettrica ottenuta dalla caduta dell'acqua nel bacino inferiore, supponendo un rendimento di conversione (potenza ottenuta/potenza max. ottenibile)  $\eta_c = 85\%$ , ed il rendimento dell'impianto di pompaggio (potenza elettrica restituita/potenza elettrica assorbita).



**Soluzione**

Il diametro della tubazione  $a-b$  è ottenibile dal valore della portata

$$G = \rho w_{ab} A = \rho w_{ab} \frac{\pi D_{ab}^2}{4}; D_{ab} = \sqrt{\frac{4G}{\pi \rho w_{ab}}} = 0.84 \text{ m}$$

Le velocità  $w_{bc}$  e  $w_{cd}$  sono ottenibili dall'equazione di continuità

$$w_{bc} = w_{ab} = 3 \text{ m/s}$$

$$w_{ab} \frac{\pi D_{ab}^2}{4} = w_{cd} \frac{\pi D_{cd}^2}{4} \quad ; \quad w_{cd} = w_{ab} \frac{D_{ab}^2}{D_{cd}^2} = \frac{w_{ab}}{0.7^2} = 6.12 \text{ m/s}$$

La lunghezza dei tratti di tubazione  $b-c$  e  $c-d$  è data da

$$L_{b,c} = \frac{H_c - H_b}{\text{sen } 60^\circ} = 231 \text{ m}$$

$$L_{c,d} = \frac{H_d - H_c}{\text{sen } 60^\circ} = 427 \text{ m}$$

**Domanda 1:** La prevalenza della pompa  $P_2$  si risolve applicando l'equazione generalizzata di Bernoulli tra le due superfici libere dei bacini, 1 e 2, tenuto conto che  $p_1 = p_2 = p_{atm}$  e che le velocità sulla superfici libere dei bacini possono essere trascurate

$$(H_2 - H_1) = h'_1 + h'_2 - h_a$$

Le perdite di carico sono unicamente di tipo distribuito e valgono

$$h_{a,ab} = \lambda_{ab} \frac{L_{ab}}{D_{ab}} \frac{w_{ab}^2}{2g} = 0.25 \text{ m}$$

$$h_{a,bc} = \lambda_{bc} \frac{L_{bc}}{D_{bc}} \frac{w_{bc}^2}{2g} = 4.72 \text{ m}$$

$$h_{a,cd} = \lambda_{cd} \frac{L_{cd}}{D_{cd}} \frac{w_{cd}^2}{2g} = 30.32 \text{ m}$$

$$h_a = h_{a,ab} + h_{a,bc} + h_{a,cd} = 35.29 \text{ m}$$

Si ottiene quindi

$$h'_2 = (H_2 - H_1) - h'_1 + h_a = 299 \text{ m}$$

**Domanda 2:** La potenza resa dalle pompe al fluido vale rispettivamente

$$W_{p1} = G g h'_1 = 4.91 \text{ MW} \quad W_{p2} = G g h'_2 = 5.15 \text{ MW}$$

mentre quella assorbita è data da

$$W_{p1,a} = \frac{G g h'_1}{\eta_{p1}} = 6.13 \text{ MW} \quad W_{p2,a} = \frac{G g h'_2}{\eta_{p2}} = 6.87 \text{ MW}$$

e pertanto  $W_a = 13 \text{ MW}$

**Domanda 3:** è necessario applicare l'equazione di Bernoulli al tratto di circuito comprese tra le superfici libere del bacino inferiore e del serbatoio S, tenendo conto che: a) in tale tratto è presente solo la pompa P<sub>1</sub>; b) le velocità sulle due superfici libere sono trascurabili; c) bisogna considerare solo le perdite di carico distribuite relative ai tratti a-b e b-c.

$$\frac{p_c - p_1}{\gamma} + [(H_c + Z) - H_1] = h'_{p1} - h_{a,ab} - h_{a,bc}$$

da cui si ottiene il valore della pressione relativa nel serbatoio:

$$p_c - p_1 = \gamma \{ -[(H_c + Z) - H_1] + h'_{p1} - h_{a,ab} - h_{a,bc} \} = 903 \text{ kPa}$$

**Domanda 4:** La potenza ottenibile dalla caduta dell'acqua è data da

$$W_c = \eta_c g G (H_2 - H_1) = 8.06 \text{ MW}$$

e pertanto il rendimento globale di conversione vale  $\eta_G = \frac{W_c}{W_a} = 0.62$ .



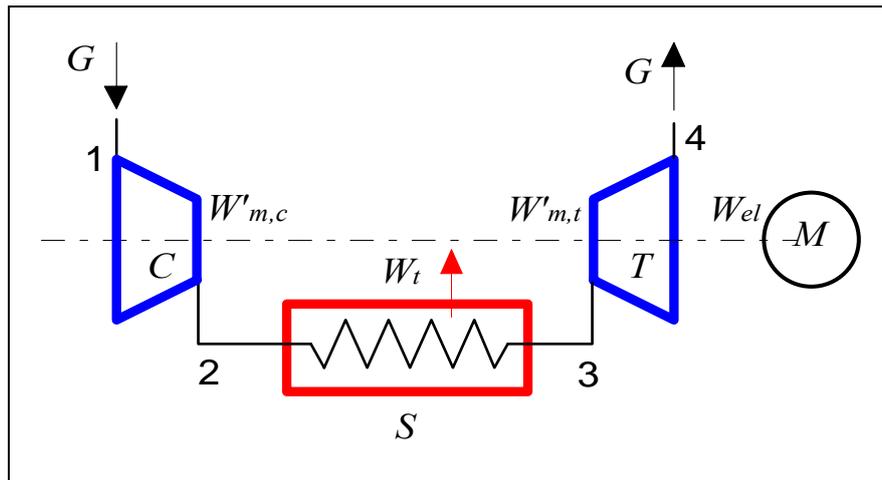
**ESERCIZIO C.35 (2002 - Per l'anno 2002 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Un impianto di condizionamento per aeromobili preleva una portata di aria  $G_a = 3 \text{ kg/s}$  a pressione atmosferica ( $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 40 \text{ °C}$ ) per introdurla all'interno della cabina dell'aereo ad una temperatura  $T_4 = 14 \text{ °C}$  e ad una pressione  $p_4 = 1.15 \text{ bar}$ . A tale scopo (vedi figura) si comprime l'aria in un compressore adiabatico, con rendimento isoentropico  $\eta_c = 0.9$ , la si refrigera in uno scambiatore di calore a superficie S, adiabatico verso l'esterno, per farla espandere infine nella turbina adiabatica T, con rendimento  $\eta_T = 0.815$ . La potenza necessaria per azionare il compressore è prelevata in parte dalla turbina e per la parte rimanente dal motore elettrico M. La trasformazione nello scambiatore può essere considerata isobara ed il sistema opera in condizioni di regime stazionario.

Si determini:

6. la pressione  $p_3$  che bisogna imporre all'ingresso turbina per avere una temperatura dell'aria  $T_3 = 123 \text{ °C}$ .
7. la temperatura dell'aria in uscita dal compressore,  $T_2$ ;
8. la potenza termica ceduta nello scambiatore,  $W_i$ ;
9. la potenza elettrica erogata dal motore,  $W_{el}$  (si consideri unitario il rendimento elettrico del motore).

Si consideri l'aria come un gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/(kg K)}$  costante ed  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$



**Soluzione**

Per una turbina che funziona con gas ideale a  $c_p$  costante si ha

$$\eta_T = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4i}} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T_{4i}}$$

La temperatura ideale di uscita dalla turbina è data quindi da

$$T_{4i} = T_3 - \frac{T_3 - T_4}{\eta_T} = 262.4 \text{ K}$$

e pertanto la pressione in ingresso si può ottenere da

$$\frac{T_3}{T_{4i}} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{R/c_p} \rightarrow p_3 = p_4 \left(\frac{T_3}{T_{4i}}\right)^{c_p/R} = 4.87 \text{ bar}$$

La temperatura ideale e reale in uscita dal compressore sono date rispettivamente da

$$T_{2i} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p} = 492.0 \text{ K} ; T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 511.9 \text{ K}$$

La potenza ceduta nello scambiatore vale pertanto

$$W_t = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2) = -348.9 \text{ kW}$$

La potenza meccanica necessaria al compressore vale

$$W'_{m,c} = G(h_1 - h_2) = G c_p (T_1 - T_2) = -599.2 \text{ kW}$$

La turbina eroga una potenza meccanica pari a

$$W'_{m,t} = G(h_3 - h_4) = G c_p (T_3 - T_4) = 328.6 \text{ kW}$$

e pertanto il motore elettrico (supposto di rendimento unitario) deve erogare una potenza data da

$$W_{el} = |W'_{m,c}| - W'_{m,t} = 270.5 \text{ kW}$$

□

**ESERCIZIO C.36 (2002 - Per l'anno 2002 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Del vapore acqueo entra in un ugello alla velocità  $w_1 = 10 \text{ m/s}$ , ad una temperatura  $T_1 = 715 \text{ °C}$  ed una pressione  $p_1 = 8 \text{ MPa}$ . La sezione di ingresso dell'ugello è pari ad  $A_1 = 2200 \text{ mm}^2$ . Il sistema è in condizioni stazionarie ed a pareti rigide. All'uscita dell'ugello il fluido ha pressione  $p_2 = 4 \text{ bar}$ , temperatura  $T_2 = 196 \text{ °C}$  ed una velocità  $w_2 = 900 \text{ m/s}$ . Ricavando le proprietà del vapore dal diagramma allegato o dalle tabelle allegate alle dispense, determinare:

1. la portata di vapore nel dispositivo;
2. la sezione di uscita dell'ugello;
3. la potenza termica dissipata attraverso le pareti dell'ugello;
4. la perdita di potenza meccanica nel dispositivo (supponendo che il calore sia scambiato a temperatura ambiente  $T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ).
5. Tracciare inoltre la trasformazione subita dal fluido sul diagramma  $T$ - $s$ .

**Soluzione**

Dalle tabelle termodinamiche si ricavano i seguenti valori delle grandezze di stato nelle sezioni 1 e 2:

Punto	p	T	h	s	af	v
	bar	$^\circ\text{C}$	kJ/kg	kJ/kg K	kJ/kg	m <sup>3</sup> /kg
1	80	715	3918.6	7.318	1736.743	0.055742
2	4	196	2852.1	7.153	1124.526	0.529262

La diminuzione di entropia all'uscita è compatibile con il fatto che il sistema non è adiabatico. La portata di vapore è data da

$$G = \rho_1 w_1 A_1 = \frac{w_1 A_1}{v_1} = 0.395 \text{ kg/s}$$

La sezione in uscita si ricava dal bilancio di massa

$$G = \frac{w_2 A_2}{v_1} \rightarrow A_2 = \frac{G v_2}{w_2} = 232 \text{ mm}^2$$

La potenza termica scambiata si ricava dal bilancio energetico (dove non si può trascurare la variazione di energia cinetica)

$$W_t = G \left[ \left( h_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) \right] = -261 \text{ kW}$$

Ed infine, la perdita di potenza meccanica è ottenibile dal bilancio di disponibilità (nuovamente la variazione di energia cinetica deve essere tenuta in conto)

$$W'_{m,a} = G (a_{f,1} - a_{f,2}) = G \left\{ \left[ \left( h_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) - \left( h_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) \right] - T_0 (s_1 - s_2) \right\} = -W_t - G T_0 (s_1 - s_2) = 241.6 \text{ kW}$$

Infatti, dato che dal dispositivo si ottiene potenza meccanica nulla, la massima potenza disponibile coincide con quella perduta.

NOTA: il valore della potenza termica dissipata attraverso le pareti è inverosimile, date le limitate dimensioni dell'ugello: i dati del problema sono stati infatti "adattati" a fini didattici.



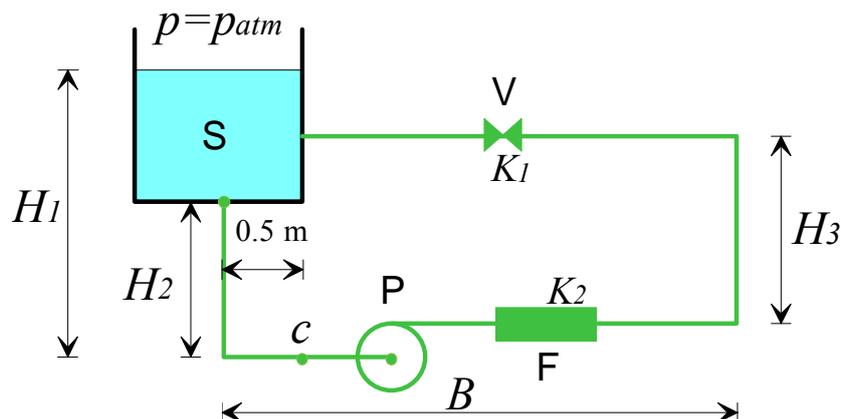
**ESERCIZIO C.37 (2003 - Per l'anno 2003 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

L'impianto di refrigerazione di un trasformatore può essere schematizzato come in Fig.1. La pompa P preleva il fluido dal serbatoio S, lo fa circolare in una tubazione che contiene un filtro F ed una valvola V per poi reimmetterlo nel serbatoio stesso. Il fluido di lavoro è olio (densità  $\rho = 870 \text{ kg/m}^3$ , viscosità  $\mu = 140 \text{ mPa s}$ ) percorre la tubazione ad una velocità  $w = 2.5 \text{ m/s}$ . La tubazione può essere considerata idraulicamente liscia. Sono noti inoltre i seguenti dati

- quote geometriche (vedi figura 1)  $H_1 = 6.8 \text{ m}$ ,  $H_2 = 5.8 \text{ m}$ ,  $H_3 = 6.3 \text{ m}$ ,  $B = 4.3 \text{ m}$ .
- diametro della tubazione  $D_t = 72 \text{ mm}$ .

Nota che i coefficienti di perdita di carico concentrata valgono  $K_f=30$  per il filtro e  $K_2=6$  per la valvola, e assumendo valori ragionevoli per i coefficienti ed altri eventuali dati mancanti, determinare:

1. la portata di fluido nel circuito;
2. la prevalenza della pompa;
3. la potenza resa dalla pompa al fluido;
4. la potenza assorbita dalla pompa, assumendo per la stessa un rendimento  $\eta_p = 0.69$ ;
5. la pressione relativa del fluido nel punto  $c$ .



**Soluzione**

**Domanda 1:** La portata di fluido è ottenibile semplicemente come  $G = \rho w A = \rho w \frac{\pi D_t^2}{4} = 8.86$  kg/s

**Domanda 2:** Si può applicare l'equazione di Bernoulli al circuito chiuso avente come ingresso e come uscita la superficie libera dell'acqua nel serbatoio. Si ha pertanto  $0 = h' - h_{ac} - h_{ad} \rightarrow h' = h_{ac} + h_{ad}$

Per la valutazione delle perdite distribuite occorre calcolare il numero di Reynolds,  $Re = \frac{\rho w D_t}{\mu} = 1119$

essendo  $Re$  inferiore a 2000, il moto è laminare ed il coefficiente di Darcy-Weisbach è esprimibile come  $\lambda = \frac{64}{Re} = 0.057$

le perdite distribuite valgono quindi  $h_{ad} = \lambda \frac{(2B - 0.5 + H_3 + H_2)}{D_t} \frac{w^2}{2g} = 11.3$  m

Le perdite concentrate sono dovute alla valvola, al filtro, alle curve e all'imbocco e lo sbocco dal serbatoio; assumendo un coefficiente  $K_c = 0.5$  per le curve e un coefficiente  $K_i = K_s = 1$  per imbocco e sbocco si ha

$$h_{ac} = (3K_c + K_1 + K_2 + K_i + K_s) \frac{w^2}{2g} = 12.6$$
 m

per cui si ha infine  $h' = h_{ac} + h_{ad} = 23.9$  m

**Domande 3-4:** La potenza resa dalla pompa al fluido vale  $W_p = G g h' = 2.07$  kW

quella assorbita è data da  $W_{p,a} = \frac{G g h'}{\eta_p} = 3.01$  kW

**Domanda 5:** è necessario applicare l'equazione di Bernoulli al tratto di circuito comprese tra la superficie libera del serbatoio (1) ed il punto  $c$ :  $\frac{p_c - p_1}{\gamma} + \frac{\alpha w^2}{2g} - H_1 = -h_{ac,1-c} - h_{ad,1-c}$

Dove, essendo il moto laminare,  $\alpha=2$ . Le perdite concentrate nel tratto 1-c valgono

$$h_{ac} = (K_c + K_s) \frac{w^2}{2g} = 0.5 \text{ m}$$

e le perdite distribuite 
$$h_{ad} = \lambda \frac{(0.5 + H_2)}{D_t} \frac{w^2}{2g} = 1.6 \text{ m}$$

Essendo  $p_1$  appunto la pressione atmosferica, si ha che la pressione relativa in  $c$  è data da

$$p_c - p_1 = \gamma \left\{ H_1 - \frac{2w^2}{2g} - h_{ac,1-c} - h_{ad,1-c} \right\} = 35 \text{ kPa}$$

□

**ESERCIZIO C.38 (2003 - Per l'anno 2003 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

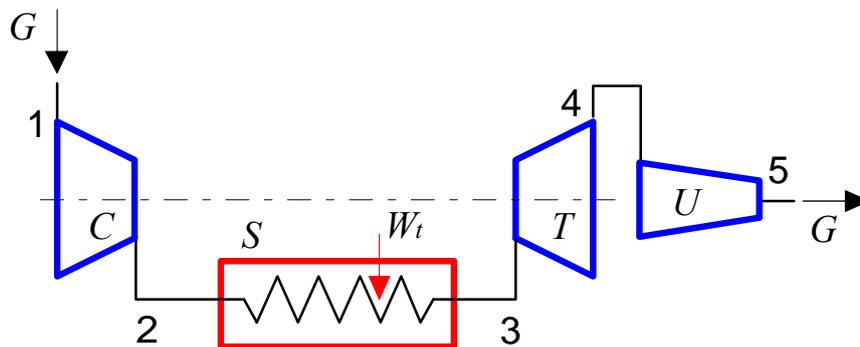
Un motore aeronautico (vedi Figura 2) è costituito da un compressore C accoppiato ad una turbina T, tra i quali è interposta una camera di combustione S isobara destinata ad incrementare la temperatura del fluido (questa parte del sistema viene anche detta "generatore di gas"). All'uscita della turbina è collegato un ugello U, deputato ad accelerare il gas per imprimere la spinta all'aeromobile.

Il fluido di lavoro può essere considerato per semplicità aria standard (gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$  ed  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ). La potenza meccanica all'albero della turbina è destinata unicamente all'azionamento del compressore. Il sistema tratta una portata di aria pari a  $G_a = 58 \text{ kg/s}$ , e la velocità in uscita all'ugello è pari a  $w_5 = 1746 \text{ km/h}$ . Sono noti inoltre i seguenti dati

- Pressione esterna  $p_1 = p_5 = 0.4 \text{ bar}$ .
- Pressione di ingresso ed uscita della camera di combustione  $p_2 = p_3 = 15 \text{ bar}$ .
- Temperatura di ingresso turbina  $T_3 = 1190 \text{ °C}$
- Temperatura di ingresso aria,  $T_1 = -40 \text{ °C}$
- Rendimento isoentropico del compressore,  $\eta_C = 0.89$

Si assuma di poter trascurare la velocità in uscita alla turbina ed in ingresso all'ugello,  $w_4 \approx 0$ . Nelle ulteriori ipotesi che il sistema sia in condizioni stazionarie, tutti i componenti tranne la camera di combustione siano adiabatici e l'espansione nell'ugello sia isoentropica, determinare:

1. la temperatura in uscita dal compressore,  $T_2$ ;
2. la potenza termica che è necessario fornire in camera di combustione,  $W_i$ ;
3. la temperatura in uscita dalla turbina,  $T_4$ ;
4. la temperatura in uscita dall'ugello,  $T_5$ ;
5. la pressione in uscita dalla turbina,  $p_4$ ;
6. il rendimento isoentropico della turbina,  $\eta_T$  (nota: questo valore può essere più basso di quanto normalmente atteso)
7. il numero di Mach in uscita all'ugello;
8. il diametro della sezione di uscita dell'ugello, supponendo che esso sia circolare.



**Soluzione**

**Domanda 1:** La temperatura ideale e reale in uscita dal compressore sono date rispettivamente da

$$T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 656.3 \text{ K} ; T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 708.7 \text{ K}$$

**Domanda 2:** La potenza termica in camera di combustione è data da  $W_t = G(h_3 - h_2) = G c_p (T_3 - T_2) = 43.98 \text{ MW}$

**Domanda 3:** La temperatura in uscita dalla turbina si ottiene uguagliando la potenza del compressore a quella della turbina

$$G c_p (T_3 - T_4) = G c_p (T_2 - T_1) \rightarrow T_4 = T_3 - (T_2 - T_1) = 987.6 \text{ K}$$

**Domanda 4:** La temperatura in uscita dall'ugello si ottiene dal bilancio energetico dello stesso

$$G h_4 = G \left( h_5 + \frac{w_5^2}{2} \right) \rightarrow G c_p (T_4 - T_5) = G \frac{w_5^2}{2} \text{ da cui } T_5 = T_4 - \frac{w_5^2}{2 c_p} = 870.6 \text{ K}$$

**Domanda 5:** per ottenere la pressione in uscita alla turbina consideriamo il fatto che l'espansione nell'ugello è isoentropica

$$p_4 = p_5 \left( \frac{T_4}{T_5} \right)^{\frac{c_p}{R}} = 0.6 \text{ bar}$$

**Domanda 6:** la temperatura ideale di uscita dalla turbina è data da

$$T_{4i} = T_3 \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 589.6 \text{ K} \text{ e quindi il suo rendimento isoentropico vale } \eta_T = \frac{T_3 - T_{4i}}{T_3 - T_4} = 0.54$$

**Domanda 7:** la velocità del suono in uscita all'ugello è data da (per un gas ideale)

$$c_5 = \sqrt{k R T_5} = 591.4 \text{ m/s, per cui si ha } M = \frac{w_5}{c_5} = 0.82 \text{ (il moto è subsonico, non è quindi}$$

necessario un ugello di De Laval)

**Domanda 7:** la sezione ed il diametro di uscita dell'ugello si ricavano da

$$G = \rho_5 w_5 A_5 = \rho_5 w_5 \frac{\pi D_5^2}{4} \text{ dove } \rho_5 = \frac{1}{v_5} = \frac{p_5}{R T_5} = 0.16 \text{ kg/m}^3, \text{ da cui infine } D_5 = \sqrt{\frac{4G}{\pi \rho_5 w_5}} = 0.97 \text{ m}$$

□

**ESERCIZIO C.39 (2003 - Per l'anno 2003 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Una turbina a vapore a contropressione è alimentata da un generatore di vapore a ricircolo secondo lo schema rappresentato in Figura 3. In particolare, nel separatore S la miscela liquido-vapore in uscita dal fascio evaporatore 2-3 viene separata in vapore saturo secco (che

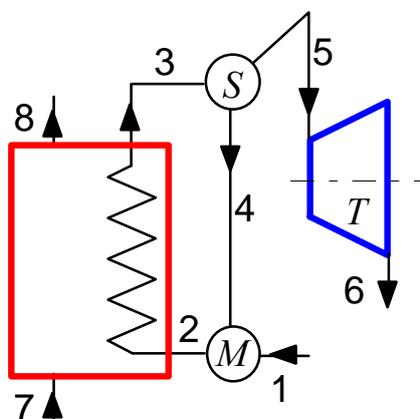
alimenta la turbina, punto 5) e liquido saturo (punto 4). Quest'ultimo viene ricircolato e mescolato all'acqua in ingresso nello scambiatore a miscelamento M, e successivamente reimpresso nel fascio evaporatore. Si ha quindi, ovviamente,  $x_5 = 1$ ,  $x_4 = 0$ .

Il generatore è alimentato da gas di combustione che può essere considerato gas ideale con  $c_p = 1100 \text{ J/(kg K)}$  costante e  $k = 1.31$ . Il sistema è in condizioni stazionarie e tutti i componenti possono essere considerati adiabatici verso l'esterno. Sono noti i seguenti dati

- Potenza meccanica erogata dalla turbina  $W'_m = 11.8 \text{ MW}$
- Pressione del vapore all'ammissione in turbina,  $p_5 = 100 \text{ bar}$
- Il generatore di vapore può essere considerato isobaro, ovvero  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$
- Pressione in uscita alla turbina  $p_6 = 4 \text{ bar}$
- Rendimento isoentropico della turbina  $\eta_T = 0.79$ ;
- Temperatura di ingresso dell'acqua  $T_1 = 20 \text{ °C}$ ;
- Temperatura e pressione di ingresso dei gas di combustione  $T_7 = 936 \text{ °C}$ ,  $p_7 = 1.2 \text{ bar}$ ;
- Temperatura e pressione di uscita dei gas di combustione  $T_8 = 730 \text{ °C}$ ,  $p_8 = 1.2 \text{ bar}$ ;
- Titolo in uscita dal fascio evaporatore  $x_3 = 0.59$

Determinare:

1. la portata di acqua necessaria ad ingresso generatore  $G_1$ ;
2. la portata di gas di combustione necessaria,  $G_7$ ;
3. il titolo e la temperatura del vapore in uscita alla turbina,  $x_6$ ,  $T_6$ ;
4. il rendimento exergetico del generatore di vapore (considerando le sezioni di ingresso e uscita 7,8,1,5);
5. il rendimento exergetico della turbina;
6. la portata di vapore nel fascio evaporatore,  $G_3$ .



### Soluzione

Dalle tabelle termodinamiche si ricavano i seguenti valori delle grandezze di stato nelle sezioni di interesse:

Punto	$p$	$T$	$h$	$s$	$a_f$	$v$	$x$
	bar	°C	kJ/kg	kJ/kg K	kJ/kg	m <sup>3</sup> /kg	
1	100	20	93.3	0.294	5.520927488	0.000997	
3	100	311.1	2217.8	4.746	802.6309705	0.011647562	0.62
4	100	311.1	1407.7	3.360	405.965085	0.001452567	0
5	100	311.1	2724.9	5.614	1050.950265	0.018029794	1

6i	4	143.7	2204.4	5.614	530.4620362	0.34697578	0.75
6	4	143.7	2300.7	5.845	557.8757388	0.367798686	0.79

dove i dati di input sono indicati nelle caselle in colore (la entalpia,  $h_6$  verrà determinata successivamente).

**Domanda 1:** La portata di fluido in ingresso generatore e uguale a quella di ingresso in turbina. Quest'ultima è ottenibile da

$$W'_m = G_5 (h_5 - h_6) = G_5 \eta_t (h_5 - h_{6i})$$

da cui

$$G_5 = G_1 = \frac{W'_m}{\eta_t (h_5 - h_{6i})} = 27.8 \text{ kg/s}$$

**Domanda 2:** la portata di gas nel generatore di vapore è ottenibile dal bilancio dello scambiatore di calore avente ingressi ed uscite nelle sezioni 1,5,7,8: adottando questo sistema, il valore della portata nel circuito di ricircolo è ininfluenza.

$$G_5 (h_5 - h_1) = G_7 (h_7 - h_8)$$

considerando i fumi un gas ideale a  $c_p$  costante si ha

$$G_7 (h_7 - h_8) = G_7 c_p (T_7 - T_8)$$

da cui

$$G_7 = \frac{G_5 (h_5 - h_1)}{c_p (T_7 - T_8)} = 323 \text{ kg/s}$$

**Domanda 3:** il titolo e la temperatura in uscita sono desumibili direttamente dai diagrammi o le tavole del vapore una volta note  $p_6$  e  $h_6$  (vedi tabella sopra) dove

$$h_6 = h_5 - \eta_t (h_5 - h_{6i}) = 2300.7 \text{ kJ/kg}$$

**Domanda 4-5:** i rendimenti exergetici del generatore di vapore e della turbina sono ricavabili direttamente dalle relative definizioni

$$\epsilon_t = \frac{W'_m}{W'_{m,a}} = \frac{W'_m}{G_5 (a_{f5} - a_{f6})} = 0.86$$

$$\epsilon_g = \frac{G_5 (a_{f5} - a_{f1})}{G_7 (a_{f7} - a_{f8})} = \frac{G_5 (a_{f5} - a_{f1})}{G_7 c_p \left( T_7 - T_8 - 298.15 \ln \frac{T_7}{T_8} \right)} = 0.53$$

**Domanda 6:** dal bilancio di massa ed energia del separatore (sistema adiabatico e rigido con un ingresso, 3, e due uscite, 4 e 5) si ha

$$\begin{cases} G_3 = G_4 + G_5 \\ G_3 h_3 = G_4 h_4 + G_5 h_5 \end{cases} \text{ nelle incognite } G_3 \text{ e } G_4. \text{ Eliminando } G_4 \text{ si ha } G_3 = G_5 \frac{h_5 - h_4}{h_3 - h_4} = 45.2 \text{ kg/s}$$

Lo studente interessato può dimostrare che  $G_5 = G_3 x_3$ .

□

**ESERCIZIO C.40 (2004 - Per l'anno 2004 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Si deve realizzare il sistema di ventilazione per un locale fumatori, secondo lo schema di Figura 1. Il ventilatore V deve essere in grado di asportare una portata volumetrica  $G_v = 3080 \text{ m}^3/\text{h}$  attraverso il condotto di mandata AB ed il filtro F1, scaricando all'esterno. L'aria viene introdotta nella locale attraverso il condotto di aspirazione CD ed il filtro F2. Il locale è mantenuto in depressione di 50 Pa rispetto all'atmosfera esterna. Sono noti i seguenti dati:

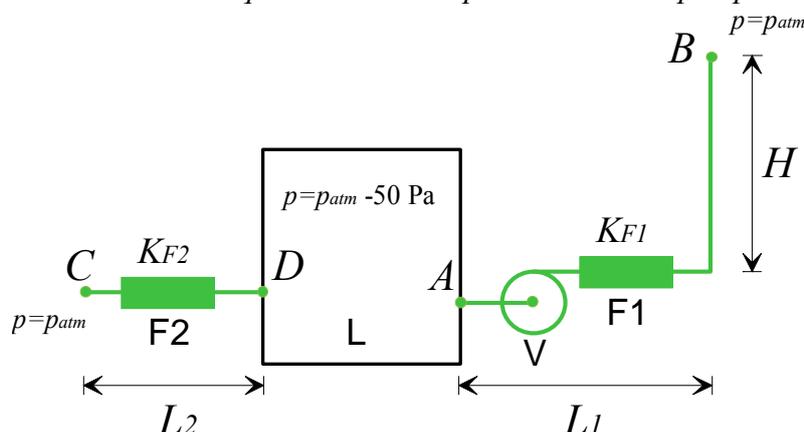
- quote geometriche (vedi figura 1)  $L_1 = 2.2 \text{ m}$ ,  $L_2 = 4.2 \text{ m}$ ,  $H = 10.2 \text{ m}$ .

- proprietà fisiche dell'aria a 20°C: densità  $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , viscosità dinamica  $\mu = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$ ;
- coefficiente di perdita concentrata per il filtro F1  $K_{F1} = 5$  (si considera che i filtri vengano attraversati dal fluido alla stessa velocità che esso ha nella condotta principale);
- coefficiente di perdita di carico distribuita nei condotti  $\lambda = 0.02$ .

Assumendo valori ragionevoli per i coefficienti ed altri eventuali dati mancanti, determinare:

1. Il diametro della tubazione di mandata AB, assumendo che sia di sezione circolare e che il fluido vi scorra con velocità  $w = (10.4) \text{ m/s}$ .
2. la prevalenza del ventilatore;
3. la potenza resa dal ventilatore al fluido;
4. la potenza assorbita dal ventilatore, assumendo per lo stesso un rendimento  $\eta_p = 0.6$ ;
5. Il coefficiente di perdita di carico da assegnare al filtro F2,  $K_{F2}$ , per mantenere nel locale la depressione desiderata, ipotizzando che il diametro del condotto di aspirazione sia pari a 1.5 volte quello della tubazione di mandata ( $D_{CD} = 1.5 D_{AB}$ ).

*Suggerimenti: in queste condizioni, l'aria può essere trattata come un fluido incomprimibile, al pari dell'acqua. Il ventilatore equivale in tutto e per tutto ad una pompa.*



### Soluzione

**Domanda 1:** Il diametro della tubazione di mandata si ottiene dall'espressione della portata volumetrica

$$G_v = w A = w \frac{\pi D_t^2}{4} \Rightarrow D_t = \sqrt{\frac{4 G_v}{\pi w}} = 0.324 \text{ m}$$

**Domanda 2:** Si può applicare l'equazione di Bernoulli al circuito aperto AB, dal locale all'uscita. Se si considerano i punti A e B appartenenti rispettivamente al locale ed all'atmosfera esterna immediatamente dopo lo sbocco dal camino, le velocità del fluido sono nulle in entrambi i casi.

$$\frac{p_B - p_A}{\rho g} + (z_B - z_A) = h' - h_{ac} - h_{ad} \rightarrow h' = h_{ac} + h_{ad} + \frac{p_B - p_A}{\rho g} + (z_B - z_A)$$

Le perdite distribuite valgono  $h_{ad} = \lambda \frac{(L_1 + H)}{D_t} \frac{w^2}{2g} = 4.2 \text{ m}$

Le perdite concentrate sono dovute al filtro, alla curva a 90° e all'imbocco e lo sbocco del condotto; assumendo un coefficiente  $K_c = 0.5$  per la curva e un coefficiente  $K_i = K_s = 1$  per imbocco e sbocco si ha

$$h_{ac} = (K_c + K_i + K_s + K_{F1}) \frac{w^2}{2g} = 41.4 \text{ m}$$

per cui si ha infine  $h' = 4.2 + 41.4 + \frac{50}{9.81 \cdot 1.2} + 10.2 = 60 \text{ m}$

**Domande 3-4:** La potenza resa dal ventilatore al fluido vale  $W_p = G g h' = 604 \text{ W}$

quella assorbita è data da  $W_{p,a} = \frac{G g h'}{\eta_p} = 1007 \text{ W}$

**Domanda 5:** è necessario applicare di nuovo l'equazione di Bernoulli al tratto di circuito CD

$$\frac{P_D - P_C}{\rho g} = -h_{ac} - h_{ad}$$

La velocità nel tratto CD vale  $w' = w \left( \frac{D_t}{D'_t} \right)^2 = w \left( \frac{1}{1.5} \right)^2 = 4.62 \text{ m/s}$

Le perdite concentrate nel tratto 1-c valgono  $h_{ac} = (2 + K_{F2}) \frac{w'^2}{2g}$  e le perdite distribuite

$$h_{ad} = \lambda \frac{H_2}{D'_t} \frac{w'^2}{2g}$$

Sostituendo le espressioni precedenti nell'equazione di Bernoulli e ricavando  $K_{F2}$  si ha

$$K_{F2} = \frac{(P_C - P_D)}{\rho} \frac{2}{w'^2} - \left( \lambda \frac{H_2}{D'_t} + 2 \right) = 1.73$$



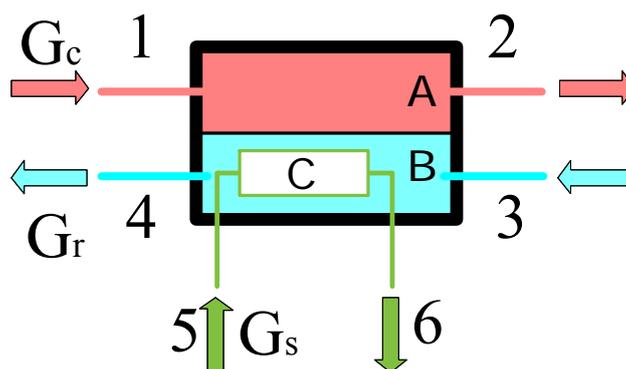
**ESERCIZIO C.41 (2004 - Per l'anno 2004 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Lo scambiatore a tre corpi per una caldaia domestica per riscaldamento e produzione di acqua calda sanitaria è schematizzabile come in Fig.2. I gas combusti provenienti dal bruciatore (corpo A) cedono calore all'acqua del riscaldamento che scorre nel corpo B. L'acqua calda sanitaria scorre nel corpo C, interno al corpo B. Sono noti i seguenti dati:

- Gas combusti (corpo A): temperatura di ingresso  $T_1 = 600^\circ\text{C}$ , temperatura di uscita  $T_2 = 114^\circ\text{C}$ ;
- Acqua riscaldamento (corpo B): temperatura di ingresso  $T_3 = 51^\circ\text{C}$ , temperatura di uscita  $T_4 = 80^\circ\text{C}$ , portata  $G_R = 3.4 \text{ kg/min}$
- Acqua sanitaria (corpo C): temperatura di ingresso  $T_5 = 10^\circ\text{C}$ , temperatura di uscita  $T_6 = 64^\circ\text{C}$ , portata  $G_S = 0.5 \text{ kg/min}$ .
- Calore specifico dei gas di combustione  $c_{pg} = 1100 \text{ J/kg K} = \text{costante}$ ; calore specifico dell'acqua  $c_{pa} = 4186 \text{ J/kg K} = \text{costante}$ ;

Nelle ulteriori ipotesi che il sistema sia in condizioni stazionarie, isobaro ed adiabatico verso l'esterno, determinare:

1. La portata di gas combusti necessaria,  $G_c$ ;
2. la potenza termica scambiata tra i gas combusti e l'acqua di riscaldamento,  $W_{11}$ ;
3. la potenza termica scambiata tra l'acqua di riscaldamento e l'acqua sanitaria,  $W_{12}$ ;
4. la nuova temperatura di uscita dell'acqua di riscaldamento,  $T'_4$ , quando si interrompe l'erogazione di acqua sanitaria ( $G_S = 0$ ), a parità di ogni altra condizione e una volta che il relativo transitorio si è estinto.



**Soluzione**

**Domanda 1:** Il bilancio di energia dell'intero scambiatore è dato da

$$G_C c_{pc} (T_1 - T_2) = G_R c_{pa} (T_4 - T_3) + G_S c_{pa} (T_6 - T_5)$$

da cui (dopo aver convertito le portate in kg/s) si ricava  $G_C = \frac{G_R c_{pa} (T_4 - T_3) + G_S c_{pa} (T_6 - T_5)}{c_{pc} (T_1 - T_2)} =$

0.016 kg/s

**Domanda 2:** La potenza termica scambiata tra i gas combustibili e l'acqua di riscaldamento è pari a quella perduta dai gas combustibili ovvero  $W_{t1} = G_C c_{pc} (T_1 - T_2) = 8.76 \text{ kW}$ .

Tale potenza non è pari a quella acquistata dall'acqua di riscaldamento,  $G_R c_{pa} (T_4 - T_3)$ , perché una parte viene ceduta all'acqua sanitaria.

**Domanda 3:** La potenza termica scambiata tra l'acqua di riscaldamento e l'acqua sanitaria è pari a quella acquistata dall'acqua sanitaria, ovvero  $W_{t2} = G_S c_{pa} (T_6 - T_5) = 1.88 \text{ kW}$ .

**Domanda 4:** Si riscrive il bilancio per uno scambiatore classico a superficie (o alternativamente si annulla  $G_S$  nel bilancio della domanda 1) per ottenere

$$T'_4 = T_3 + \frac{G_C c_{pc} (T_1 - T_2)}{G_R c_{pa}} = 87.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

□

**ESERCIZIO C.42 (2004 - Per l'anno 2004 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Il sistema di recupero del calore dal compressore di una centrale termoelettrica è schematizzabile come in Figura 3. L'aria calda, in uscita dal compressore C, cede calore all'acqua nello scambiatore di recupero a superficie SR. Il vapore saturo secco in uscita da detto scambiatore (punto 5) viene miscelato nello scambiatore a miscelamento SM con il vapore surriscaldato proveniente dallo scarico della turbina ad alta pressione (non rappresentata, punto 6) ed inviato all'ingresso della turbina a vapore a bassa pressione.

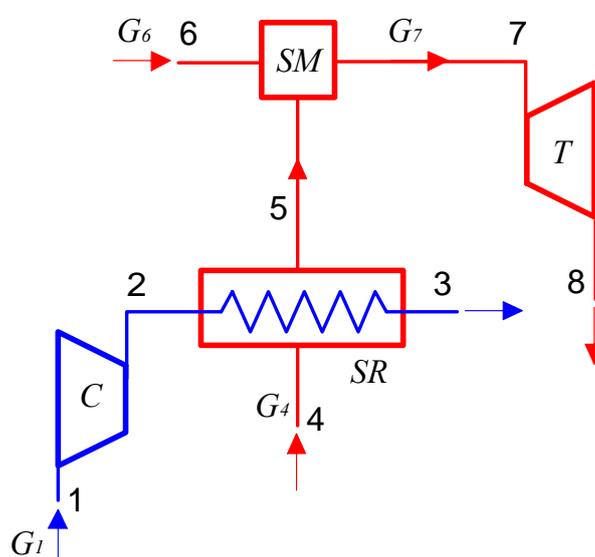
Il sistema è in condizioni stazionarie e tutti i componenti possono essere considerati adiabatici verso l'esterno. Il fluido di lavoro del compressore può essere considerato per semplicità aria standard (gas ideale con  $c_p = 1005 \text{ J/kg K} = \text{costante}$  ed  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ). Sono noti i seguenti dati

- Rendimento isoentropico del compressore C,  $\eta_c = 0.702$ ;
- Rapporto di compressione del compressore C,  $r_p = 14.4$ ;
- Temperatura e pressione di ingresso aria nel compressore C,  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ;
- Temperatura di uscita aria dallo scambiatore SR,  $T_3 = 250 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- Pressione del fluido negli scambiatori SR e SM e all'ammissione in turbina T,  $p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 30 \text{ bar}$
- Pressione in uscita alla turbina T  $p_8 = 0.05 \text{ bar}$

- Rendimento isoentropico della turbina T,  $\eta_T = 0.751$ ;
- Temperatura di ingresso dell'acqua nello scambiatore SR,  $T_4 = 30\text{ }^\circ\text{C}$ ;
- Temperatura di ingresso del vapore surriscaldato nello scambiatore a miscelamento  $T_6 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ ;
- Portata di aria nel compressore  $G_1 = 52\text{ kg/s}$
- Portata di vapore surriscaldato in ingresso allo scambiatore SM  $G_6 = 30\text{ kg/s}$ ;
- 

Determinare:

1. la potenza assorbita dal compressore;
2. la portata di vapore saturo secco in uscita dallo scambiatore SR,  $G_5$ ;
3. la portata di vapore in uscita dallo scambiatore SM,  $G_7$ ;
4. la temperatura del vapore in ingresso turbina,  $T_7$ ;
5. il titolo e la temperatura del vapore in uscita alla turbina,  $x_8$ ,  $T_8$ ;
6. la potenza erogata dalla turbina.



### Soluzione

**Domanda 1:** La temperatura ideale e reale in uscita dal compressore sono date rispettivamente da

$$T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 627.9\text{ K} ; T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_c} = 758.1\text{ K}$$

la potenza assorbita dal compressore vale quindi

$$W'_{mC} = G_1 (h_1 - h_2) = G_1 c_p (T_1 - T_2) = -24.3\text{ MW}$$

**Domanda 2:** Dalle tabelle termodinamiche o dal diagramma si ricavano i seguenti valori delle grandezze di stato nelle sezioni di interesse:

punto	pressione	temperatura	entalpia	entropia	titolo
	bar	°C	kJ/kg	kJ/kg K	
4	30	30	128.5	0.436	
5	30	233.9	2804.3	6.187	1
6	30	500	3456.5	7.234	
7	30	461.5	3370.0	7.119	
8i	0.05	32.9	2170.9	7.119	0.84
8r	0.05	32.9	2458.7	8.059	0.96

dove i dati di input sono indicati nelle caselle in colore (alcuni di essi, in colore più scuro, verranno determinati successivamente).

Il bilancio dello scambiatore a superficie SR si può scrivere come

$$G_4(h_5 - h_4) = G_1 c_p (T_2 - T_3) \text{ da cui sfruttando i dati della tabella si trova } G_4 = 4.59 \text{ kg/s.}$$

**Domanda 3:** Il bilancio dello scambiatore a miscelamento SM è dato da

$$G_5 + G_6 = G_7$$

$$G_5 h_5 + G_6 h_6 = G_7 h_7$$

da cui si ricavano  $G_7 = 34.6 \text{ kg/s}$  e  $h_7 = 3370 \text{ kJ/kg}$

**Domanda 4:** la temperatura del punto 7 ( $T_7 = 461.5 \text{ °C}$ ) si ricava direttamente dalle tabelle o dal diagramma di stato, noti  $p$  ed  $h$ .

**Domanda 5** titolo e temperatura a valle della turbina si ricavano classicamente con il seguente procedimento: si ricava l'entalpia di uscita in condizioni ideali per la trasformazione isoentropica, a partire da pressione ed entropia,  $h_{8i} = 2170 \text{ kJ/kg}$ , dopodichè si ricava  $h_8$  sfruttando la definizione di rendimento isoentropico della turbina

$$h_8 = h_7 - \eta_t (h_7 - h_{8i}) = 2458.7 \text{ kJ/kg.}$$

Si ricavano quindi temperatura e titolo con il diagramma di stato o le tavole termodinamiche, vedi tabella.

**Domanda 6** La potenza erogata dalla turbina è ottenibile da

$$W'_{mT} = G_7 (h_7 - h_8) = 31.5 \text{ MW}$$



**ESERCIZIO C.43 (2005 - Per l'anno 2005 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Lo schema di figura 1 rappresenta in maniera semplificata e fuori scala l'impianto di alimentazione di un'abitazione tramite l'acquedotto cittadino. Si suppone per semplicità che non vi siano al momento altri utenti collegati alla condotta principale e che il sistema sia in condizioni stazionarie. Il fluido è acqua alla temperatura di  $21 \text{ °C}$  (densità  $\rho = 997 \text{ kg/m}^3$ , viscosità dinamica  $\mu = 0.978 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$ ). Il sistema è a regime, e la pressione in A ed E è pari a quella atmosferica. Sono noti inoltre i seguenti dati:

- quote geometriche (vedi figura 1)  $H_1 = 30 \text{ m}$ ,  $H_2 = 12 \text{ m}$ ,  $L = 500 \text{ m}$ ; il tratto DE ha lunghezza trascurabile.
- portata nel circuito,  $G = 1.73 \text{ kg/s}$ ;
- diametri delle condotte AB,  $D_{AB} = 200 \text{ mm}$ , e CD,  $D_{CD} = 25 \text{ mm}$ ;
- coefficiente di perdita concentrata per la diramazione a T, localizzata in BC,  $K_B = 0.7$  (facendo riferimento alla velocità del fluido a valle);
- coefficiente di perdita di carico distribuita nei condotti per moto turbolento  $\lambda = 0.030$ , per moto laminare ( $Re < 2000$ )  $\lambda = 64/Re$ .

Assumendo valori ragionevoli per i coefficienti di perdita di carico concentrata ed altri eventuali dati mancanti, determinare:

1. la pressione relativa nel punto D;
2. il coefficiente di perdita di carico della valvola DE;
3. il nuovo valore della portata se all'interno del ramo di derivazione CD si inserisce una pompa di prevalenza  $h' = 15$  m, supponendo invariati tutti i coefficienti di perdita di carico concentrata e distribuita;
4. la potenza assorbita da tale pompa, assumendo per la stessa un rendimento  $\eta_p = 0.7$ ;
5. specificare se conviene localizzare tale pompa in prossimità del punto C o del punto D, giustificando qualitativamente la scelta;
6. (*facoltativo*) spiegare qualitativamente cosa accade alla pressione in D se altri utenti prelevano acqua dalla condotta principale tramite il punto B.

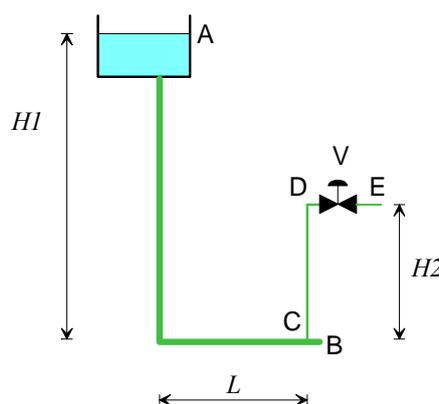


Figura 1

### Soluzione

**Domanda 1:** La velocità media di portata nei due rami si ottiene come segue

$$G = \rho w A = \rho w \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow w_{AB} = \sqrt{\frac{4G}{\rho \pi D_{AB}^2}} = 0.055 \text{ m/s} \quad w_{CD} = \sqrt{\frac{4G}{\rho \pi D_{CD}^2}} = 3.54 \text{ m/s}$$

il numero di Reynolds nei due rami vale rispettivamente

$$Re_{AB} = \frac{\rho w_{AB} D_{AB}}{\mu} = 11267, \quad Re_{CD} = \frac{\rho w_{CD} D_{CD}}{\mu} = 90135$$

quindi il moto è turbolento in entrambi i tratti.

Si può applicare l'equazione di Bernoulli al circuito aperto AD, dal serbatoio al punto a monte della valvola.

$$\frac{p_D - p_A}{\rho g} + \frac{w_{CD}^2}{2g} + (z_D - z_A) = -h_{ac} - h_{ad}$$

Essendo la pressione in A pari a quella atmosferica, la pressione relativa in D vale

$$p_D - p_A = -\rho \frac{w_{CD}^2}{2} + \rho g [(z_A - z_D) - h_{ac} - h_{ad}]$$

le perdite di carico distribuite sono date da

$$h_{ad} = \frac{\lambda}{2g} \left( \frac{H_1 + L}{D_{AB}} w_{AB}^2 + \frac{H_2}{D_{CD}} w_{CD}^2 \right) = 9.2 \text{ m} \quad (\text{dovute in grandissima parte al ramo CD del circuito})$$

e quelle concentrate (assumendo per le curve  $K=0.5$  e per il restringimento dal serbatoio al condotto AB  $K=1$ )

$$h_{ac} = (1+0.5) \frac{w_{AB}^2}{2g} + (0.7+0.5) \frac{w_{CD}^2}{2g} = 0.77 \text{ m}$$

Da cui si ha infine

$$p_D - p_A = 0.85 \text{ bar}$$

**Domanda 2:** Il rubinetto DC deve poi realizzare una perdita di carico pari a quella necessaria a riportare il fluido a pressione atmosferica, quindi applicando Bernoulli al tratto DE

$$\frac{p_E - p_D}{\rho g} = -h_{ac} = -K_R \frac{w_{CD}^2}{2g} \quad \text{da cui} \quad K_R = 2 \frac{p_D - p_E}{\rho w_{CD}^2} = 13.6$$

**Domanda 3:** In questo caso la velocità nelle tubazioni cambia, e l'equazione di Bernoulli applicata all'intero circuito fornisce

$$\frac{w_{CD}^2}{2g} + (z_E - z_A) = h' - h_{ac} - h_{ad} = h' - \left[ (1+0.5) \frac{w_{AB}^2}{2g} + (0.7+0.5+K_R) \frac{w_{CD}^2}{2g} + \frac{\lambda}{2g} \left( \frac{H_1+L}{D_{AB}} w_{AB}^2 + \frac{H_2}{D_{CD}} w_{CD}^2 \right) \right]$$

e inoltre il bilancio di massa dà

$$G = \rho w'_{AB} \frac{\pi D_{AB}^2}{4} = \rho w'_{CD} \frac{\pi D_{CD}^2}{4} \quad \rightarrow \quad w'_{AB} = \frac{D_{CD}^2}{D_{AB}^2} w'_{CD}$$

si può sostituire  $w_{AB}$  nella precedente e ricavare la velocità nel ramo CD, e da essa la portata richiesta

$$\frac{w_{CD}^2}{2g} \left[ (1.5) \frac{D_{CD}^2}{D_{AB}^2} + (1+1.2+K_R) + \lambda \left( \frac{D_{CD}^2}{D_{AB}^2} \cdot \frac{H_1+L}{D_{AB}} + \frac{H_2}{D_{CD}} \right) \right] = (z_A - z_E) + h' \quad \text{da cui} \quad w'_{CD} = 4.54 \text{ m/s}$$

$$G' = \rho w'_{CD} \frac{\pi D_{CD}^2}{4} = 2.22 \text{ kg/s}$$

**Domanda 4:** La potenza assorbita dalla pompa è data da

$$W_{p,a} = \frac{G g h'}{\eta_p} = 466 \text{ W}$$

**Domanda 5:** La pompa va localizzata in prossimità di C per evitare che le perdite di carico nel ramo CD contribuiscano ad abbassare la pressione all'aspirazione e quindi la mettano a rischio di cavitazione; meglio ancora sarebbe posizionare la pompa nel ramo AB del circuito.

**Domanda 6:** se un altro utente preleva acqua dal punto B, le perdite di carico nel tratto AB aumentano e conseguentemente la portata nel ramo CD si riduce. Dato il grande diametro di AB, tale riduzione è trascurabile finché gli utenti sono pochi.

□

**ESERCIZIO C.44 (2005 - Per l'anno 2005 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Il sistema di compressori interrefrigerato rappresentato in Figura 2 è destinato a comprimere il metano fino alla pressione finale  $p_4 = 49$  bar, a partire dalle condizioni iniziali  $p_1 = 2$  bar,  $T_1 = 25$  °C. Sono inoltre noti i seguenti dati:

- portata volumetrica di metano in ingresso,  $G_{v1} = 630 \text{ m}^3/\text{h}$ ;
- pressione intermedia  $p_2 = p_3 = 10$  bar;
- temperatura di uscita dal refrigeratore intermedio  $T_3 = 80$  °C.
- rendimento isoentropico del compressore A,  $\eta_{cA} = 0.92$  e del compressore B,  $\eta_{cB} = 0.85$ ;

Nelle ulteriori ipotesi che il sistema sia in condizioni stazionarie, i compressori possano essere considerati adiabatici ed il metano un gas ideale ( $c_p = \text{costante} = 2253.7 \text{ J/kg K}$  ed  $R = 518.46 \text{ J/kg K}$ ) determinare:

1. la temperature di uscita del metano dai due stadi,  $T_2$  e  $T_4$  ;
2. la potenza totale necessaria per la compressione,  $W'_{mA} + W'_{mB}$
3. la portata volumetrica di metano in uscita,  $G_{v4}$  ;
4. il diametro della tubazione di mandata,  $D_4$ , assunta in essa una velocità del metano  $w_4 = 10 \text{ m/s}$ ;
5. la potenza termica scambiata nel refrigeratore intermedio,  $W_t$ ;
6. determinare la minima potenza meccanica teoricamente richiesta per effettuare la compressione del metano fino alle stesse condizioni di temperatura e pressione del punto 4, e conseguentemente il rendimento exergetico del sistema,  $\varepsilon$  (a tal fine si consideri la potenza termica  $W_t$  scambiata con una sorgente a temperatura dello stato morto,  $T_0 = 25 \text{ °C}$ );
7. (facoltativo) discutere l'ipotesi di aver considerato il metano un gas ideale nelle condizioni del punto 4, sulla base del diagramma del fattore di comprimibilità allegato (temperatura critica del metano  $T_c = 190.9 \text{ K}$ , pressione critica  $p_c = 4.64 \text{ MPa}$ ).

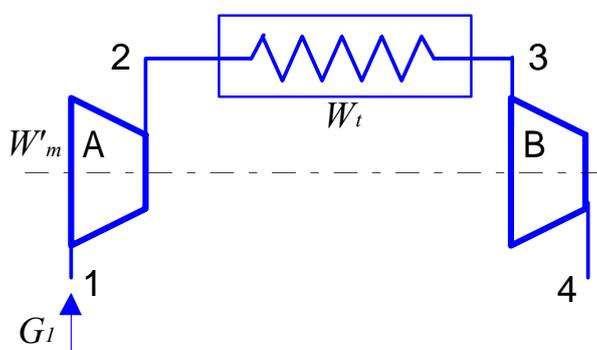


Figura 2

### Soluzione

**Domanda 1:** La temperature di uscita del metano sono date da

$$T_{2i} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} = 431.75 \text{ K} = 158.6 \text{ °C} \quad ; \quad T_{4i} = T_3 \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{R/c_p} = 509 \text{ K} = 235.9 \text{ °C}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2i} - T_1}{\eta_{cA}} = 443.4 \text{ K} = 170.22 \text{ °C} \quad ; \quad T_4 = T_3 + \frac{T_{4i} - T_3}{\eta_{cB}} = 536.5 \text{ K} = 263.4 \text{ °C}$$

**Domanda 2:** La potenza meccanica totale assorbita dai due compressori vale

$$W'_{mA} + W'_{mB} = G c_p [(T_1 - T_2) + (T_3 - T_4)] = -104.5 \text{ kW} \text{ (il segno negativo indica che è assorbita).}$$

dove la portata in massa di metano,  $G$ , è calcolata come segue

$$v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0.773 \text{ m}^3/\text{kg} \quad ; \quad G = \frac{G_{v1}}{v_1} = 0.226 \text{ kg/s} \text{ , dove } G_{v1} = \frac{630}{3600} = 0.175 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Domanda 3:** La portata volumetrica in uscita vale

$$G_{v4} = G \cdot v_4 = 0.0129 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{dove} \quad v_4 = \frac{RT_4}{p_4} = 0.057 \text{ m}^3/\text{kg}$$

**Domanda 4:** Il diametro della tubazione di mandata si calcola come

$$D_4 = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4G_{v4}}{w_4 \pi}} = 0.040 \text{ m}$$

**Domanda 5:** La potenza termica scambiata dal refrigeratore intermedio è data da  $W_i = G c_p (T_3 - T_2) = -46.04 \text{ kW}$  (il segno negativo indica che viene ceduta all'esterno).

**Domanda 6:** La potenza meccanica minima necessaria, essendo il calore scambiato con una sorgente alla temperatura dello stato morto, è data dalla portata per la differenza di exergia tra ingresso ed uscita, ovvero

$$W'_{m,\min} = G(a_{f1} - a_{f4}) = G[(h_1 - h_4) - T_0(s_1 - s_4)] = G \left[ c_p (T_1 - T_4) - T_0 \left( c_p \ln \frac{T_1}{T_4} - R \ln \frac{p_1}{p_4} \right) \right] = -144.2 \text{ kW}$$

per cui il rendimento exergetico è  $\varepsilon = \frac{W'_{m,\min}}{W'_{m,\text{tot}}} = \frac{-84.2}{-104.5} = 0.86$

**Domanda 7:** alle condizioni del punto 4 la temperatura e la pressione ridotta valgono rispettivamente

$$T_r = \frac{T}{T_c} = 2.8 \quad p_r = \frac{p}{p_c} = 1.06$$

In queste condizioni, dal diagramma si ricava  $Z > 0.95$ , per cui l'ipotesi di gas ideale risulta perfettamente accettabile.

Piuttosto l'aver assunto il calore specifico costante è solo approssimativamente compatibile con un salto di temperatura superiore a  $200 \text{ }^\circ\text{C}$ .



**ESERCIZIO C.45 (2005 - Per l'anno 2005 si dovevano risolvere almeno due esercizi tra i tre proposti)**

Una centrale geotermica lavora secondo lo schema rappresentato in Figura 3. Il vapore endogeno viene fatto espandere nella turbina T e successivamente entra nel condensatore isobaro C, dove viene condensato e successivamente ripompato nel pozzo geotermico tramite lo scarico 3. Per mantenere tale condensatore in condizioni stazionarie, una parte del condensato viene prelevata tramite l'uscita 4 ed inviata allo scambiatore a superficie S, ove viene raffreddata tramite un flusso di aria esterna, e successivamente reimpressa, previa una laminazione 6-7, nel condensatore tramite l'ingresso 7. L'intero sistema è in condizioni di regime stazionario e la trasformazione nella pompa 4-5 può essere considerata reversibile.

Sono noti i seguenti dati

- Temperatura e pressione di ingresso del vapore,  $T_1 = 460 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 60 \text{ bar}$ ;
- Portata di vapore in ingresso,  $G_1 = 50 \text{ kg/s}$ ;
- Rendimento isoentropico della turbina T,  $\eta_t = 0.785$ ;
- Temperatura al condensatore,  $T_2 = T_3 = T_4 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- Titolo in uscita dal condensatore,  $x_3 = x_4 = 0$ ;
- Temperatura di uscita acqua dallo scambiatore S,  $T_6 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ;
- pressione nei punti 5 e 6,  $p_5 = p_6 = 2 \text{ bar}$ ;
- Temperatura di ingresso ed uscita aria dallo scambiatore S,  $T_8 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_9 = 22 \text{ }^\circ\text{C}$ ;

Determinare:

1. la potenza erogata dalla turbina  $W'_m$ ;
2. il titolo un uscita alla turbina,  $x_2$ ;

3. la portata di acqua di ricircolo necessaria,  $G_4$ ;
4. la portata di aria necessaria per lo scambiatore S,  $G_8$ ; l'aria può essere considerata per semplicità gas ideale con  $c_p = \text{costante} = 1005 \text{ J/kg K}$  ed  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ;
5. la massima potenza meccanica ottenibile dal vapore endogeno in condizioni ideali, e conseguentemente il rendimento exergetico dell'impianto; a tal fine si considerino la temperatura e la pressione dello stato morto  $T_0 = 15 \text{ °C}$ ,  $p_0 = 1 \text{ bar}$  (*suggerimento: si consideri la massima potenza ottenibile dal vapore riportandolo allo stato morto in un sistema aperto a regime*).
6. (*facoltativo*) Si giustifichi qualitativamente la scelta di aggiungere il condensatore C all'impianto, anziché scaricare il vapore direttamente nell'atmosfera.

NB: Le portate  $G_4$  e  $G_8$  risulteranno molto più grandi di  $G_1$ .

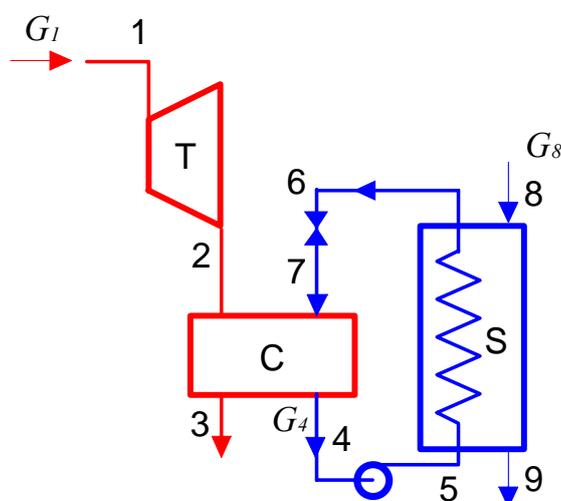


Figura 3

### Soluzione

**Domanda 1:** Dalle tabelle termodinamiche o dal diagramma si ricavano i seguenti valori delle grandezze di stato nelle sezioni di interesse:

pto	pressione	temp.	entalpia	entropia	exergia	titolo
	bar	°C	kJ/kg	kJ/kg K	kJ/kg	
1	60	460	3326.1	6.753	1381.9	
2i	0.056	35	2071.8	6.753	127.6	
2	0.056	35	2341.5	7.628	145.1	0.91
3	0.056	35	146.7	0.505	2.7	0
4	0.056	35	146.7	0.505	2.7	0
5	2	35	146.9	0.505	2.9	
6	2	25	105.0	0.367	0.8	
7	0.056	25	105.0	0.368	0.6	
st. morto 0	1	15	63.1	0.224	0.0	

dove i dati usati come input sono indicati nelle caselle in colore .

In particolare, l'entalpia  $h_2$  si ricava a partire da quella ideale,  $h_{2i}$ , mediante la definizione di rendimento isoentropico

$$\eta_t = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2i}} \rightarrow h_2 = h_1 - \eta_t (h_1 - h_{2i}) = 2341.5 \text{ kJ/kg}$$

La potenza erogata dalla turbina vale quindi

$$W'_m = G_1 (h_1 - h_2) = 49.2 \text{ MW}$$

**Domanda 2:** Il titolo in uscita alla turbina  $x_2$  si ricava direttamente dalle tabelle termodinamiche o dal diagramma e vale

$$x_2 = 0.91$$

**Domanda 3:** La portata  $G_4$  si ricava dal bilancio di massa ed energia del condensatore, che in questo caso è considerato uno scambiatore a miscelamento a regime con due ingressi e due uscite

$$G_2 + G_7 = G_4 + G_3$$

$$G_2 h_2 + G_7 h_7 = G_4 h_4 + G_3 h_3$$

Le entalpie sono tutte note (vedi tabella); è nota anche la portata  $G_2 = G_1$  ;

Inoltre il bilancio di massa dell'intero sistema e quello del lato primario dello scambiatore a superficie danno

$$G_3 = G_1 ; G_7 = G_4 ;$$

per cui sostituendo nelle precedenti si ha

$$G_1 h_2 + G_4 h_7 = G_4 h_4 + G_1 h_3 \rightarrow G_4 = G_1 \frac{h_2 - h_3}{h_4 - h_7} = 2625 \text{ kg/s}$$

**Domanda 4:** la portata di aria nello scambiatore a superficie si ricava dal bilancio energetico del medesimo

$$G_4 (h_3 - h_6) = G_9 (h_9 - h_8) = G_9 c_p (T_9 - T_8) \rightarrow G_9 = G_4 \frac{(h_3 - h_6)}{c_p (T_9 - T_8)} = 15615 \text{ kg/s}$$

(nota: questo valore è altissimo e dimostra che lo scambiatore non potrebbe essere realizzato in questo modo: si ricorre infatti ad una torre di raffreddamento a umido).

**Domanda 5:** La massima potenza ricavabile dal vapore endogeno si otterrebbe in un sistema aperto a regime che riporta il medesimo allo stato morto, e vale quindi

$$W'_{m,\max} = G_1 (a_{f,1} - a_{f,0}) = 69.1 \text{ MW}$$

Conseguentemente il rendimento exergetico dell'impianto vale

$$\varepsilon = \frac{W'_m}{W'_{m,\max}} = 0.71$$

**Domanda 6** Scaricando il vapore nell'atmosfera, la pressione all'uscita della turbina dovrebbe essere maggiore od uguale ad 1 bar (in questo caso la turbina viene detta a contropressione), per cui si otterrebbe una potenza minore all'asse della stessa. Inoltre le sostanze inquinanti contenute nel vapore endogeno verrebbero scaricate nell'atmosfera, ed infine bisognerebbe usare acqua di sorgente per reintegrare il contenuto del pozzo geotermico. Volendo analizzare il problema anche quantitativamente, in questo caso, lasciando invariati gli altri dati, da una turbina a contropressione che scarica ad 1 bar ( $T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ) si otterrebbero solo 34.4 MW, con un rendimento exergetico dell'impianto di 0.5.



**Nota bene: prima di cominciare scrivere chiaramente il proprio nome e cognome sui fogli e sui diagrammi allegati.**

**I dati del compito sono personalizzati secondo le iniziali: nel seguito,  $N$  indica il numero corrispondente alla iniziale del nome e  $C$  quello corrispondente alla iniziale del cognome secondo la tabella seguente**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

**PROBLEMA 1, peso = 40%.**

Una linea di pompaggio (vedi Figura 1) posta nel fondovalle invia ad un bacino, posto sulla sommità di una collina, una portata costante di acqua pari a  $(250+N)$  kg/s. La condotta di adduzione dell'acqua ha una lunghezza di 2000 m (il tratto AB è di lunghezza trascurabile). Le condotte di discesa dell'acqua sono due identiche in parallelo, ciascuna con un diametro di 0.2 m ed una lunghezza di  $(1000+100*C)$  m. Al termine di dette condotte, l'acqua viene accelerata in un ugello ben rastremato fino alla velocità  $w_D = (50+C/2)$  m/s. Ipotizzando che il sistema funzioni in condizioni stazionarie, che il fattore di Darcy-Weisbach in entrambi i tubi sia pari a  $\lambda = 0.03$ , e che le perdite di carico concentrate siano trascurabili, si determini:

1. la velocità media dell'acqua all'interno delle condotte di discesa,  $w_{CD}$ ;
2. il dislivello  $H$  tra la superficie libera dell'acqua presente nel bacino, posto sulla sommità della collina, e la bocca di uscita dell'acqua dalla condotta di discesa che assicura la stessa portata in ingresso ed in uscita al bacino;
3. il diametro della condotta di immissione nel bacino, se in essa si vuole assicurare una velocità  $w_{AC} = 3$  m/s;
4. la prevalenza della pompa in ingresso,  $h'_p$ ;
5. la potenza assorbita e resa da tale pompa, se essa ha rendimento  $\eta_p = 0.6+(C/200)$ ;
6. la pressione relativa all'ingresso della tubatura di adduzione (punto B).
7. la potenza meccanica erogata da una turbina idraulica posta a valle delle tubazioni di discesa, se il rendimento idraulico di tale turbina è pari a  $\eta_T = 0.9-(C/200)$ , ed il rendimento globale del sistema, inteso come (potenza erogata dalla turbina)/(potenza assorbita dalla pompa).

Per l'acqua si assumano le seguenti proprietà: densità  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, viscosità  $\mu = 1$  mPas

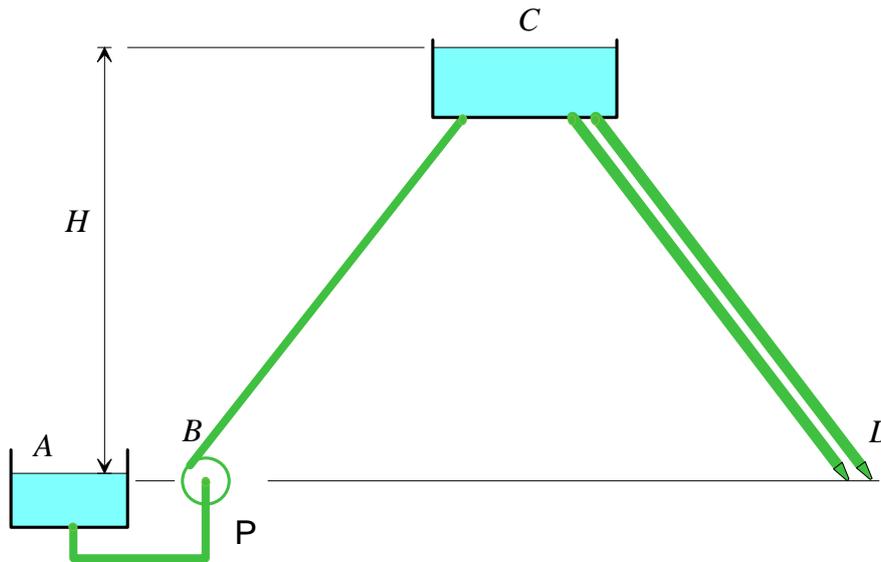


Figura 1

**PROBLEMA 2, peso =40%.**

Un ugello riceve in ingresso aria a pressione, temperatura e velocità pari rispettivamente a  $p_1 = 15+0.1C$  bar,  $T_1 = 800$  °C,  $w_1 = 50$  m/s; la sezione di ingresso ha un'area  $A_1 = 100+5N$  mm<sup>2</sup>; la pressione in uscita vale  $p_2 = 2$  bar.

Considerando la trasformazione del fluido adiabatica e reversibile, si determinino:

1. il numero di Mach in ingresso;
2. la temperatura e la velocità di uscita del fluido,  $w_2, T_2$ ;
3. la sezione di uscita,  $A_2$ ;
4. il numero di Mach in uscita,  $M_2$ ;
5. la pressione e la temperatura del gas nella sezione di gola,  $p_3, T_3$ ;
6. l'area della sezione di gola dell'ugello,  $A_3$ ;

Si consideri l'aria un gas ideale ( $c_p =$  costante= 1004 J/kg K ed  $R = 287.13$  J/kg K).

**PROBLEMA 3, peso = 60%.**

Il sistema di compressori interrefrigerato rappresentato in Figura 2 è destinato a comprimere il fluido R134a fino alla pressione finale  $p_4 = 20$  bar, a partire dalle condizioni iniziali  $p_1 = 0.3$  bar,  $x_1 = 1$ . Sono inoltre noti i seguenti dati:

- portata volumetrica di fluido in uscita,  $G_{v4} = 40 + N \text{ m}^3/\text{h}$ ;
- pressione intermedia  $p_2 = p_3 = 10 \text{ bar}$ ;
- temperatura di uscita del fluido dal refrigeratore intermedio  $T_3 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- temperature di ingresso e di uscita dell'acqua dal refrigeratore intermedio  $T_5 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_6 = 40 + (0.5 C) \text{ }^\circ\text{C}$ .
- rendimento isoentropico del compressore A,  $\eta_{cA} = 0.8 + (N/200)$  e del compressore B,  $\eta_{cB} = 0.8$ ;

Nelle ulteriori ipotesi che il sistema sia in condizioni stazionarie, i compressori possano essere considerati adiabatici, determinare:

1. la temperature di uscita del fluido dai due stadi,  $T_2$  e  $T_4$  ;
2. la potenza totale necessaria per la compressione,  $W'_{mA} + W'_{mB}$
3. la potenza termica scambiata nel refrigeratore intermedio,  $W'_I$  ;
4. la portata di acqua necessaria per il refrigeratore intermedio;
5. il rendimento exergetico del refrigeratore intermedio;
6. il rendimento exergetico del compressore B;
7. tracciare le trasformazioni subite dal fluido R134a sul diagramma  $p-h$  allegato.

NOTE: si può considerare l'acqua un fluido incomprimibile con  $c = \text{costante} = 4186 \text{ J/kg K}$  e  $\nu = 0.001 \text{ m}^3/\text{kg}$ . Si assuma per lo stato morto la temperatura  $T_0 = 298.15 \text{ K}$ .

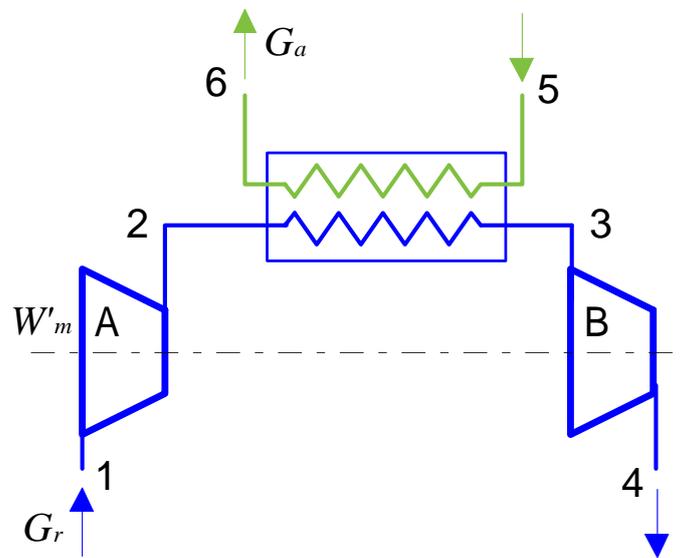
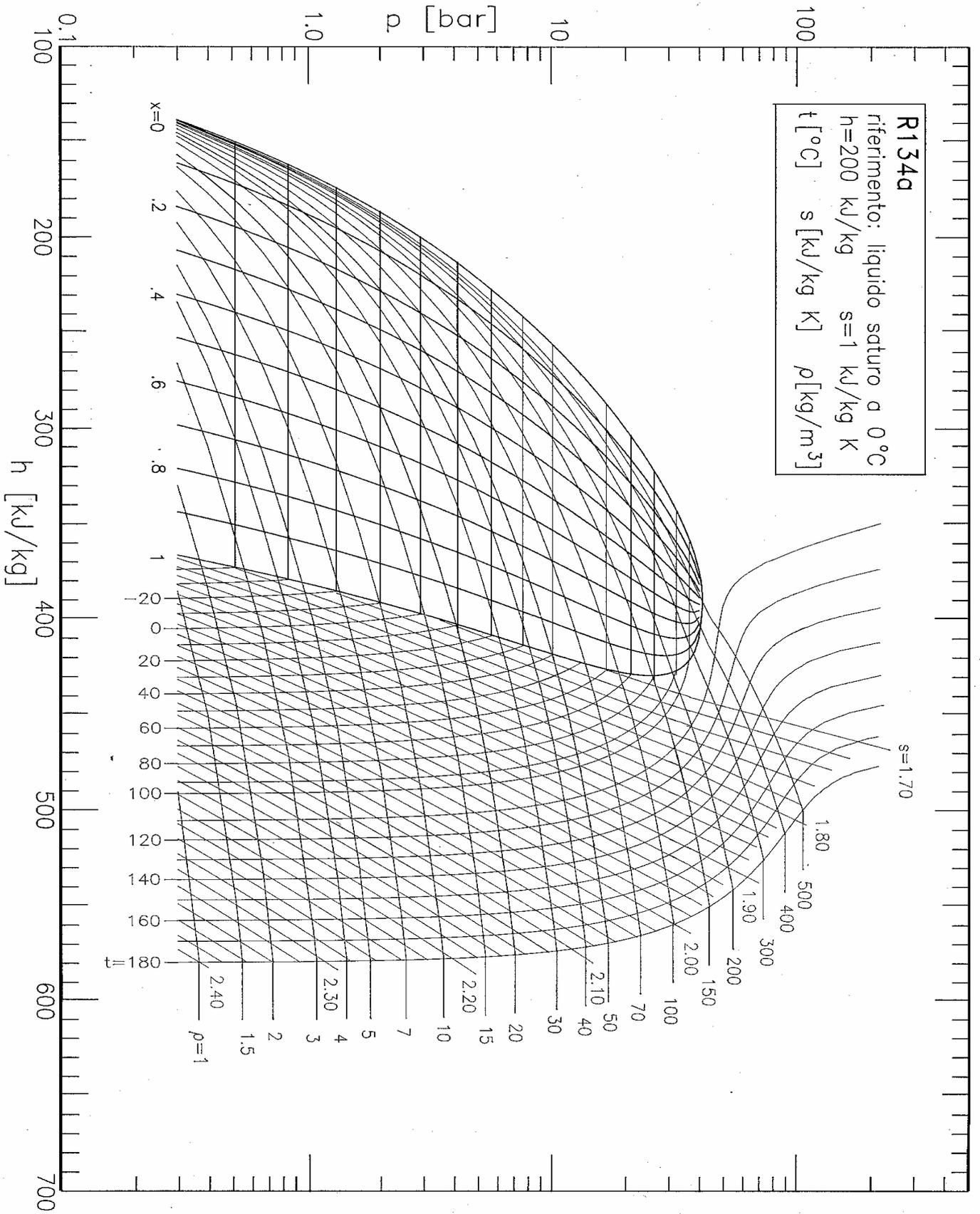


Figura 2



NOTA BENE:

i valori delle entalpie differiscono da quelli delle tabelle riportate sulle dispense di un valore costante pari a 226.8 kJ/kg

## SOLUZIONI

I valori numerici sono ottenuti per lo "studente" Daniel Bernoulli, ( $N = 4$ ,  $C = 2$ ). I risultati personalizzati sono calcolabili tramite il file EXCEL SOL06.XLS, disponibile in rete a partire da oggi pomeriggio.

### PROBLEMA 1

**Domanda 1:** La velocità media di portata nel ramo discendente si ottiene come segue

$$G = \rho w_{CD} 2 A_{CD} = \rho w_{CD} 2 \frac{\pi D_{CD}^2}{4} \Rightarrow w_{CD} = \frac{4G}{2\rho\pi D_{CD}^2} = 4.05 \text{ m/s}$$

detta velocità differisce da quella di uscita  $w_D$  a causa della presenza dell'ugello terminale.

Il numero di Reynolds nel ramo discendente vale

$$Re_{CD} = \frac{\rho w_{CD} D_{CD}}{\mu} = 985240 \text{ quindi il moto è turbolento.}$$

### Domanda 2:

Si può applicare l'equazione di Bernoulli al circuito aperto CD, dalla superficie libera del bacino allo sbocco del tubo discendente a valle dell'ugello. Bisogna considerare una sola delle due tubazioni in parallelo.

$$\frac{p_D - p_C}{\rho g} + \frac{w_D^2 - w_C^2}{2g} + (z_D - z_C) = -h_{ad,CD} - h_{ac,CD} + \alpha$$

dove sono stati cancellati i termini nulli o trascurabili. In particolare, la pressione è pari a quella atmosferica sia in ingresso che in uscita, la velocità sulla superficie libera è nulla, e si è assunto  $\alpha = 1$  per il moto turbolento.

le perdite di carico distribuite si possono calcolare come  $h_{ad,CD} = \frac{\lambda}{2g} \frac{L_{CD}}{D_{CD}} w_{CD}^2 = 150 \text{ m}$ . Sostituendo nell'equazione di Bernoulli:

$$(z_C - z_D) = H = h_{ad,CD} + \frac{w_D^2}{2g} = \frac{w_D^2}{2g} \left( \lambda \frac{L_{CD}}{D_{CD}} + 1 \right) = 216 \text{ m}$$

In altri termini, l'energia potenziale disponibile nel bacino viene utilizzata per vincere le perdite di carico nella tubazione discendente e per imprimere la velocità di uscita  $w_D$  al fluido.

**Domanda 3:** Il diametro della tubazione ascendente si ricava dall'equazione di continuità

$$D_{AC} = \sqrt{\frac{4G}{\rho\pi w_B}} = 0.3 \text{ m}$$

**Domanda 4:** La prevalenza della pompa si può ricavare dall'equazione di Bernoulli applicata al ramo AC del circuito

$$\frac{p_C - p_A}{\rho g} + \frac{w_C^2 - w_A^2}{2g} + (z_C - z_D) = -h_{ad,AC} - h_{ac,CD} + h'$$

le perdite distribuite nel ramo ascendente valgono  $h_{ad,AC} = \frac{\lambda}{2g} \frac{L_{AC}}{D_{AC}} w_B^2 = 84 \text{ m}$ , da cui si ricava la prevalenza della pompa

$$h' = H + h_{ad,AC} = 300 \text{ m}$$

**Domanda 5:** La potenza resa ed assorbita dalla pompa sono date da

$$W_{p,r} = G g h' = 745 \text{ kW} \quad , \quad W_{p,a} = \frac{G g h'}{\eta_P} = 1226 \text{ kW}$$

**Domanda 6:** La pressione relativa a valle della pompa (punto B) può essere calcolata applicando l'equazione di Bernoulli alla sola pompa (tratto AB)

$$\frac{p_B - p_A}{\rho g} + \frac{w_B^2}{2g} = h' \quad \rightarrow \quad p_B - p_A = \rho g \left( h' - \frac{w_B^2}{2g} \right) = 29.4 \text{ bar}$$

(dato che nel punto A si ha la pressione atmosferica, questa rappresenta la pressione relativa in B).

**Domanda 7:** all'uscita della tubazione discendente è disponibile una energia per unità di peso data da  $w_D^2/2$ ; la potenza disponibile è allora data da

$$W_{disp} = (\text{portata in peso}) \cdot (\text{energia per unità di peso}) = G g \frac{w_D^2}{2} = 330 \text{ kW}$$

La potenza erogata dalla turbina è  $W_{tur} = \eta_T W_{disp} = 290.7 \text{ kW}$

Ed infine il rendimento globale del sistema è dato da  $\eta_G = \frac{W_{tur}}{W_{p,a}} = 0.24$

## PROBLEMA 2

**Domanda 1:** La velocità del suono in uscita, per un gas ideale, è

$$c_1 = \sqrt{k R T_1} = 656.9 \text{ m/s}$$

e quindi si ha

$$M_1 = \frac{w_1}{c_1} = 0.076$$

**Domanda 2:** La temperatura di uscita dell'aria è ottenibile immediatamente da

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p} = 600.8 \text{ K} = 327.7 \text{ °C}$$

Per quanto riguarda la velocità di uscita, si ricorre al bilancio di energia per un sistema adiabatico e indeformabile

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{w_2^2}{2} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} - h_2$$

ed essendo il gas ideale

$$w_2 = \sqrt{2 c_p (T_1 - T_2) + w_1^2} = 975.1 \text{ m/s}$$

**Domanda 3:** La sezione di uscita può essere ricavata dal bilancio di massa

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_2 w_2 A_2 \quad \rightarrow \quad \frac{w_1 A_1}{v_1} = \frac{w_2 A_2}{v_2} = -104.5 \text{ kW (il segno negativo indica che è assorbita).}$$

dove i volumi specifici sono dati da

$$v_1 = \frac{R T_1}{p_1} = 0.2027 \text{ m}^3/\text{kg} \quad ; \quad v_2 = \frac{R T_2}{p_2} = 0.8626 \text{ m}^3/\text{kg}$$

pertanto si ha

$$A_2 = A_1 \frac{w_1 v_2}{w_2 v_1} = 26.2 \text{ mm}^2.$$

**Domanda 4:** La velocità del suono in uscita, per un gas ideale, è

$$c_2 = \sqrt{k R T_2} = 491.6 \text{ m/s}$$

e quindi si ha

$$M_2 = \frac{w_2}{c_2} = 1.98$$

pertanto, dato che il moto è subsonico in ingresso e supersonico in uscita, si tratta di un ugello di De Laval.

**Domanda 5:** La temperatura nella sezione ristretta può essere ricavata dal bilancio di energia e dal fatto che  $M_3=1$  ovvero  $w_3=c_3$

$$c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} = c_p T_3 + \frac{w_3^2}{2} \quad \rightarrow \quad w_3^2 = c_3^2 = R k T_3$$

$$c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} = \left( c_p + \frac{Rk}{2} \right) T_3 \quad \rightarrow \quad T_3 = \frac{c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2}}{c_p + \frac{Rk}{2}} = \frac{T_1 + \frac{w_1^2}{2 c_p}}{1 + \frac{Rk}{2 c_p}} = \frac{T_1 + \frac{w_1^2}{2 c_p}}{1 + \frac{k-1}{2}} = 895.1 \text{ K}$$

La pressione  $p_3$  si può ottenere semplicemente dall'espansione isoentropica

$$p_3 = p_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{c_p/R} = 8.06 \text{ bar}$$

**Domanda 6:** Per la sezione di gola si ricorre di nuovo al bilancio di massa

$$\rho_1 w_1 A_1 = \rho_3 w_3 A_3 \quad \rightarrow \quad \frac{w_1 A_1}{v_1} = \frac{w_3 A_3}{v_3}$$

dove il volume specifico  $v_3$  è dato da

$$v_3 = \frac{R T_3}{p_3} = 0.3188 \text{ m}^3/\text{kg} \quad \text{pertanto si ha } A_3 = A_1 \frac{w_1 v_3}{w_3 v_1} = 15.7 \text{ mm}^2, \text{ che come atteso, è più piccola di } A_2.$$

### PROBLEMA 3

**Domanda 1:** Dalle tabelle termodinamiche o dal diagramma si ricavano i seguenti valori delle grandezze di stato nelle sezioni di interesse:

pto	pressione	vol	temp.	entalpia	entropia	exergia	titolo
	bar	m <sup>3</sup> /kg	°C	kJ/kg	kJ/kg K	kJ/kg	
1	0.3	0.5958	-49.68	202.0	0.911	-69.8	1
2i	10.0	0.0230	59.81	275.4	0.911	3.7	
2	10.0	0.0249	75.24	291.6	0.959	5.7	
3	10.0	0.020	40	254.0	0.845	2.1	
4i	20.0	0.0097	71.15	267.8	0.845	15.9	
4	20.0	0.0099	73.61	271.3	0.855	16.4	

dove i dati usati come input sono indicati nelle caselle in colore.

In particolare, le entalpie  $h_2$  e  $h_4$  si ricavano a partire da quella ideale,  $h_{2i}$ ,  $h_{4i}$ , mediante la definizione di rendimento isoentropico del compressore

$$\eta_c = \frac{h_{2i} - h_1}{h_2 - h_1} \rightarrow h_2 = h_1 + \frac{(h_{2i} - h_1)}{\eta_c} = 291.6 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta_c = \frac{h_{4i} - h_3}{h_4 - h_3} \rightarrow h_4 = h_3 + \frac{(h_{4i} - h_3)}{\eta_c} = 271.3 \text{ kJ/kg}$$

Questo permette di determinare direttamente le temperature  $T_2$  e  $T_4$  tramite il diagramma o le tabelle termodinamiche.

**Domanda 2:** E' necessario innanzitutto determinare la portata massica di R134a nel sistema

$$G_r = \frac{G_{v4}}{v_4} = 1.23 \text{ kg/s}$$

La potenza assorbita dai due compressori vale

$$W'_m = W'_{mA} + W'_{mB} = G_r (h_1 - h_2) + G_r (h_3 - h_4) = -131.4 \text{ kW}$$

**Domanda 3:** La potenza scambiata nel refrigeratore intermedio è

$$W_i = G_r (h_3 - h_2) = 46 \text{ kW}$$

**Domanda 4:** la portata di acqua nello scambiatore a superficie intermedio si ricava dal bilancio energetico del medesimo

$$G_r (h_2 - h_3) = G_a (h_6 - h_5) = G_a c_{p,a} (T_6 - T_5) \rightarrow G_a = G_r \frac{(h_2 - h_3)}{c_{p,a} (T_6 - T_5)} = 1 \text{ kg/s}$$

**Domanda 5:** il rendimento exergetico dello scambiatore intermedio è dato per definizione da

$$\varepsilon = \frac{G_a (a_{f,6} - a_{f,5})}{G_r (a_{f,2} - a_{f,3})} = \frac{G_a c_p \left[ (T_6 - T_5) - T_0 \ln \frac{T_6}{T_5} \right]}{G_r [(h_2 - h_3) - T_0 (s_2 - s_3)]} = 0.35$$

dove l'acqua di raffreddamento è stata considerata un fluido incomprimibile.

**Domanda 6:** il rendimento exergetico di un compressore è dato per definizione da

$$\varepsilon = \frac{\text{potenza minima necessaria}}{\text{potenza reale}} = \frac{W'_{m,a}}{W'_m} = \frac{\mathcal{G}(a_{f2} - a_{f1})}{\mathcal{G}(h_2 - h_1)} = 0.83$$