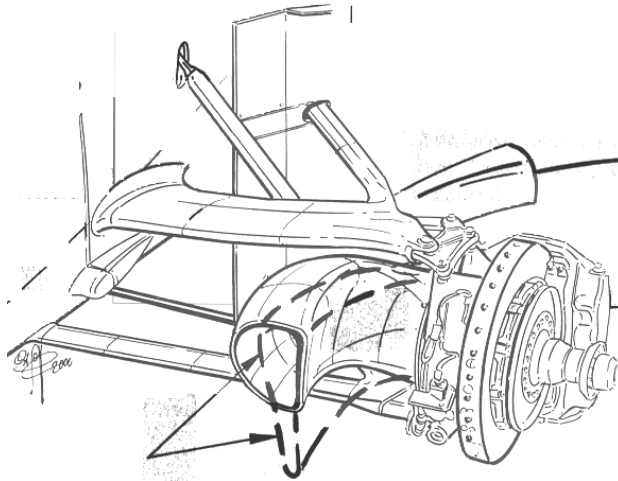


CAPITOLO 13

Sistemi immersi in campi di forza

13.1 Sistemi ad un grado di libertà

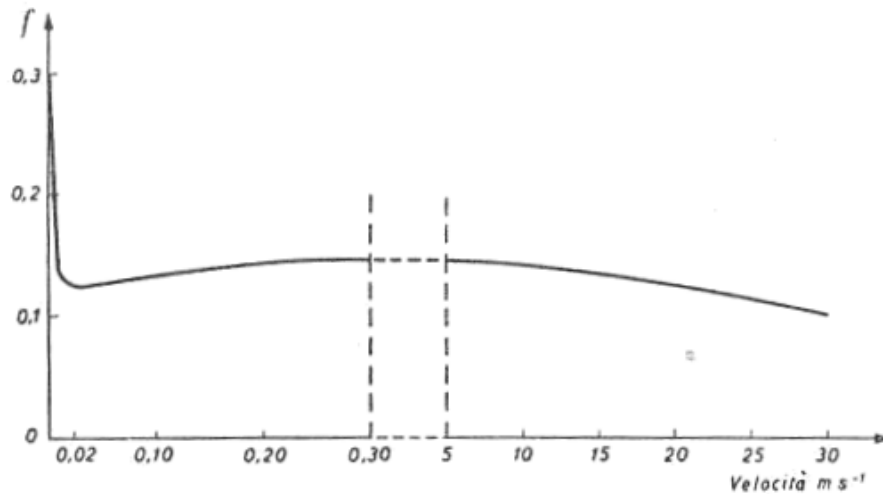


Si consideri un freno a disco e si supponga che la rigidità e lo smorzamento del vincolo della pinza in direzione verticale siano k_s , r_s e m_p sia la sua massa. Esercitando una forza N sulla pinza, nascerà una forza frenante sul disco pari a

$$F = 2Nf$$

diretta in verso opposto alla velocità periferica relativa del disco, mentre la pinza del freno sarà sottoposta a una forza uguale e opposta.

Ricordiamo che il coefficiente di attrito f varia in funzione della velocità relativa tra i due corpi che strisciano con un legge che ha l'andamento di figura.



Scrivendo l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale (approssimabile alla direzione della velocità periferica V del disco nella zona di contatto tra questo e le pastiglie) otteniamo

$$-m_p \ddot{x} - r_s \dot{x} - k_s x + 2Nf(V_{rel}) = 0$$

dove

$$f(V_{rel}) \cong f(0) + \left. \frac{df}{dV_{rel}} \right|_{V_{rel}=0} V_{rel}$$

ovvero

$$\begin{aligned} -m_p \ddot{x} - r_s \dot{x} - k_s x + 2N \left(f(0) + \left. \frac{df}{dV_{rel}} \right|_{V_{rel}=0} (V - \dot{x}) \right) &= 0 \\ m_p \ddot{x} + \left(r_s + 2N \left. \frac{df}{dV_{rel}} \right|_{V_{rel}=0} \right) \dot{x} + k_s x &= 2N \left(f(0) + \left. \frac{df}{dV_{rel}} \right|_{V_{rel}=0} V \right) \end{aligned}$$

Come si nota dal diagramma $\left. \frac{df}{dV_{rel}} \right|_{V_{rel}=0} < 0$, per cui esisterà sempre una forza N tale per cui

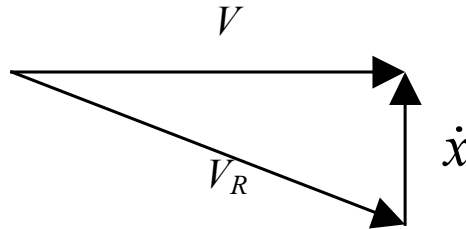
$$r_s + 2N \left. \frac{df}{dV_{rel}} \right|_{V_{rel}=0} < 0$$

dando luogo a vibrazioni autoeccitate.

Analogamente un sistema vibrante ad un grado di libertà investito da una vena fluida può dare origine a forme di instabilità.

Supponiamo ora un generico profilo in moto verticale con relativa traslazione dell'ala rispetto alla sua posizione di equilibrio. L'ala verrà investita da una velocità relativa

$$(13.1) \quad V_R = \sqrt{V^2 + \dot{x}^2}$$

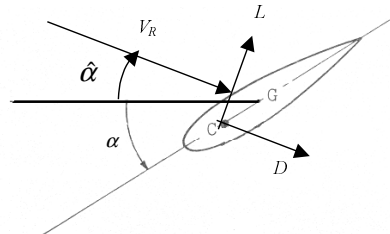
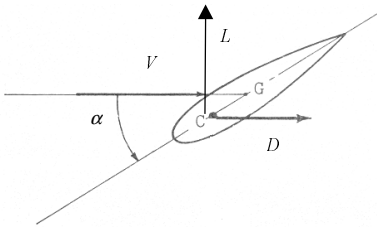


con anomalia

$$(13.2) \quad \hat{\alpha} = \tan^{-1} \frac{\dot{x}}{V}$$

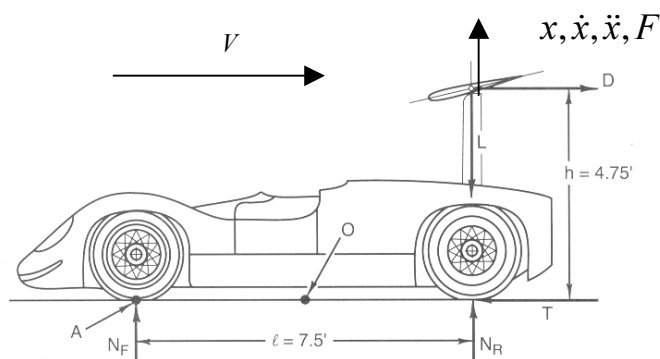
rispetto alla direzione della vena indisturbata V . Sul profilo alare, quindi, una forza di portanza (L) e di resistenza (D) che nel caso di ala ferma saranno dirette come nella figura a sinistra e varranno rispettivamente:

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} \rho A V^2 C_D(\alpha) \\ L = \frac{1}{2} \rho A V^2 C_L(\alpha) \end{cases}$$



Nel caso di profilo in traslazione con velocità \dot{x} , le forze di resistenza e portanza agiranno come nella figura di destra e varranno rispettivamente:

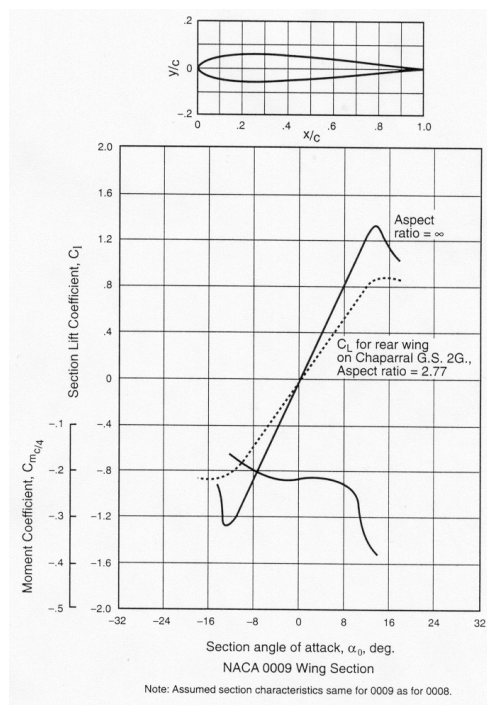
$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} \rho A V_r^2 C_D (\alpha - \hat{\alpha}) \\ L = \frac{1}{2} \rho A V_r^2 C_L (\alpha - \hat{\alpha}) \end{cases}$$



Venendo a un esempio pratico, uno dei profili alari usati nel recente passato nello

sport automobilistico era il NACA 009 che veniva montato posteriormente, collegato direttamente ai portamozzì delle ruote motrici tramite due bracci verticali. L'angolo d'incidenza statico α comunemente usato era di circa -14° così da farlo lavorare in prossimità del minimo del coefficiente di portanza C_L e ottenere la massima deportanza possibile (circa $-1,2$) a ogni velocità di avanzamento V della vettura. Il corrispondente C_D della sola ala era circa uguale per quell'angolo d'attacco a $0,12$.

A una certa velocità V , costante, e trascurando l'effetto degli spoiler anteriori, la sospensione posteriore si troverà compressa rispetto alla posizione indeformata per effetto



non solo della quota parte del peso della vettura che su di essa si scarica, ma anche per effetto della deportanza e della resistenza.

$$N_R l = W \frac{l}{2} + Dh - Ll \Rightarrow x_0 = \frac{N_R}{k_s}$$

dove W è il peso della vettura e k_s è la rigidità equivalente della sospensione posteriore (per semplicità supponiamo i montanti dell'ala rigidi).

Consideriamo, ora, il moto traslatorio lungo la verticale della sala posteriore completa di ala, su cui agisce, trascurando l'effetto della coppia aerodinamica, la forza aerodinamica per effetto della velocità V_r , dovuta sia a quella V di avanzamento, sia a quella \dot{x} di vibrazione..

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale della sola sospensione posteriore, ala compresa, avremo, con ovvio significato dei simboli:

(13.3)

$$-m_s \ddot{x} - r_s \dot{x} - k_s x - \frac{1}{2} \rho A V_r^2 C_D (-\hat{\alpha} + \alpha) \sin \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \rho A V_r^2 C_L (-\hat{\alpha} + \alpha) \cos \hat{\alpha} = 0$$

Le componenti delle forze di resistenza e portanza possono essere linearizzate, ricordando la piccolezza della velocità di vibrazione \dot{x} rispetto a quella di avanzamento per cui la (13.1) diventa

$$(13.4) \quad V_r \simeq V$$

e, conseguentemente,

$$(13.5) \quad \begin{cases} \sin \hat{\alpha} \simeq \tan \hat{\alpha} = \frac{\dot{x}}{V} \\ \cos \hat{\alpha} \simeq 1 \end{cases}$$

che, sostituendo la (13.4) e la (13.5) nella (13.3), porta a

$$(13.6) \quad -m_s \ddot{x} - r_s \dot{x} - k_s x - \frac{1}{2} \rho A V C_D (-\hat{\alpha} + \alpha) \dot{x} + \frac{1}{2} \rho A V^2 C_L (-\hat{\alpha} + \alpha) = 0$$

I coefficienti di lift e di drag possono essere linearizzati secondo Taylor nell'intorno della posizione statica di $\alpha = -12^\circ$, ovvero:

$$(13.7) \quad \begin{cases} C_D(-\hat{\alpha} + \alpha) = C_D(\alpha) - \frac{dC_D(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=-12^\circ} \hat{\alpha} \\ C_L(-\hat{\alpha} + \alpha) = C_L(\alpha) - \frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=-12^\circ} \hat{\alpha} = C_L(\alpha) - \frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=-12^\circ} \frac{\dot{x}}{V} \end{cases}$$

tenendo, anche in conto, del piccolo valore numerico della derivata del coefficiente di drag rispetto all'angolo d'incidenza. Sostituendo la (13.7) nella (13.6), si ha:

$$(13.8) \quad -m_s \ddot{x} - r_s \dot{x} - k_s x + \frac{1}{2} \rho A C_L(\alpha_0) V^2 - \frac{1}{2} \rho A \dot{x} V \left(\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=\alpha_0} + C_D(\alpha_0) \right) = 0$$

ovvero

$$-m_s \ddot{x} - \left[r_s + \frac{1}{2} \rho A V \left(\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=-12^\circ} + C_D(\alpha) \right) \right] \dot{x} - k_s x + \frac{1}{2} \rho A C_L(\alpha) V^2 = 0$$

Ora, nel caso in questione, $\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=-12^\circ}$ è negativa assumendo valori molto

maggiori di $C_D(-12^\circ)$, per cui $\left(\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=-12^\circ} + C_D(-12^\circ) \right) < 0$ ed esisterà sempre

una velocità V di avanzamento della vettura, al di sopra della quale

$$r_{eq} = \left[r_s + \frac{1}{2} \rho A V \left(\frac{dC_L(\alpha)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=\alpha_0} + C_D(\alpha_0) \right) \right] < 0$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata

$$m_s \ddot{x} - |r_{eq}| \dot{x} + k_s x = 0$$

ha entrambe le radici

$$\lambda_{1,2} = \frac{|r_{eq}| \pm \sqrt{r_{eq}^2 - 4m_s k_s}}{2m_s} = a \pm i\omega \quad \text{con } a > 0$$

che daranno luogo a un moto libero asintoticamente instabile in quanto espansivo nel tempo per effetto di una perturbazione iniziale.

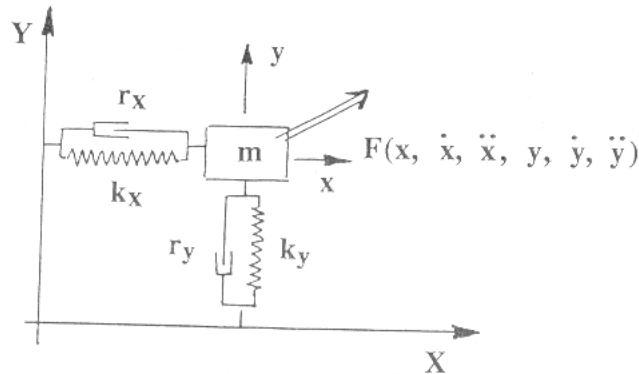
13.2 Sistemi vibranti a 2 gdl perturbati nell'intorno della posizione di equilibrio

Estendiamo ai sistemi a 2 gdl quanto già visto per i sistemi a un solo grado di libertà.

Le equazioni di equilibrio dinamico per il sistema di figura sono, ovviamente

$$(13.9) \quad \begin{cases} m\ddot{x} + r_x\dot{x} + k_x x = F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ m\ddot{y} + r_y\dot{y} + k_y y = F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases}$$

dove i termini dovuti al campo di forze sono funzioni non lineari di x e y e delle loro derivate rispetto al tempo.



Il sistema di equazioni (13.9) può essere riscritto in forma matriciale come

$$[M]\{\ddot{z}\} + [R]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{F(\{z\}, \{\dot{z}\})\}$$

con

$$\begin{aligned} \{z\} &= \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \{F(\{z\}, \{\dot{z}\})\} = \begin{Bmatrix} F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{Bmatrix} \text{ e} \\ [M] &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, [R] = \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Del sistema potremo calcolare la posizione di equilibrio statico, se esiste, definita da

$$[K]\{z_0\} = \{F(\{z_0\}, \{0\})\}$$

e quindi linearizzare il campo di forze

$$\{F(\{z\}, \{\dot{z}\})\} \simeq \{F(\{z_0\}, \{0\})\} + \left[\frac{\partial \{F\}}{\partial \{z\}} \right]_{(\{z_0\}, \{0\})} (\{z\} - \{z_0\}) + \left[\frac{\partial \{F\}}{\partial \{\dot{z}\}} \right]_{(\{z_0\}, \{0\})} \{\dot{z}\}$$

ma

$$\left[\frac{\partial \{F\}}{\partial \{z\}} \right]_{(z_0, 0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{(z_0, 0)}; \left[\frac{\partial \{F\}}{\partial \{\dot{z}\}} \right]_{(z_0, 0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}_{(z_0, 0)}$$

Indicando con il vettore $\{\bar{z}\}$ gli spostamenti a partire dalla posizione di equilibrio statico

$$\{z\} = \{z_0\} + \{\bar{z}\}$$

il sistema di equazioni differenziali di partenza può essere riscritto come

$$[M]\{\ddot{\bar{z}}\} + [R]\{\dot{\bar{z}}\} + [K]\{\bar{z}\} = \{0\}$$

con, ovviamente,

$$[R_F] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}_{(\{z_0\}, \{0\})}; [K_F] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\{z_0\}, \{0\})}$$

ovvero

$$[M]\{\ddot{\bar{z}}\} + [R_T]\{\dot{\bar{z}}\} + [K_T]\{\bar{z}\} = \{0\}$$

Il sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti la cui soluzione è del tipo

$$\{\bar{z}(t)\} = \{\bar{Z}\} e^{\lambda t}$$

dove le λ sono le radici di

$$[[M_T]\lambda^2 + [R_T]\lambda + [K_T]]\{\bar{Z}\}e^{\lambda t} = \{0\}$$

Analizziamo separatamente i vari casi che potrebbero presentarsi.

Campo di forze puramente posizionale

In questo caso il sistema si riduce a

$$[M]\{\ddot{\bar{z}}\} + [R]\{\dot{\bar{z}}\} + [K_T]\{\bar{z}\} = \{0\}$$

ovvero, trascurando lo smorzamento

$$[M]\{\ddot{\bar{z}}\} + [K_T]\{\bar{z}\} = \{0\}$$

da cui

$$[[M]\lambda^2 + [K_T]]\{\bar{Z}\}e^{\lambda t} = \{0\}$$

Essendo la matrice $[M]$ reale, simmetrica e definita positiva, tutti i suoi minori principali dominanti sono positivi, ovvero

$$p_0 = 1; p_1 = m_{11} > 0; p_2 = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} > 0$$

e analogamente ciò vale per la matrice $[K]$

$$p_0 = 1; p_1 = k_{11} > 0; p_2 = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} > 0$$

Per quanto riguarda la matrice $[K_F] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\{z_0\}, \{0\})}$

possono presentarsi due casi:

- il campo di forze è conservativo, per cui $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ e la matrice $[K_F]$ risulta simmetrica;
- il campo di forze non è conservativo, per cui $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$ e la matrice $[K_F]$ non risulta simmetrica;

In entrambi i casi, tuttavia, i valori di λ sono comunque le radici del polinomio

$$m_{11}m_{22}\lambda^4 + (m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})\lambda^2 + (k_{T11}k_{T22} - k_{T12}k_{T21}) = 0$$

$$a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0; a > 0$$

Campo di forze conservativo

Si possono presentare due casi:

- la matrice $[K_T]$ è definita positiva ovvero

$$p_0 = 1; p_1 = k_{T11} > 0; p_2 = k_{T11}k_{T22} - k_{T12}k_{T21} > 0; b > 0; c > 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2m_{11}m_{22}} \left[-(m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11}) \pm \sqrt{(m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 - 4m_{11}m_{22}(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12})} \right] < 0$$

essendo

$$b > \sqrt{b^2 - 4ac}$$

per cui i quattro autovalori sono tutti immaginari e il moto libero risultante è asintoticamente stabile, ovvero si annulla per effetto dell'inevitabile smorzamento.

- la matrice $[K_T]$ non è definita positiva ovvero o $p_1 = k_{T11} < 0$ oppure

$$p_2 = k_{T11}k_{T22} - k_{T12}k_{T21} < 0, \text{ ovvero entrambe le condizioni sono verificate.}$$

Nell'ipotesi che $p_2 = k_{T11}k_{T22} - k_{T12}k_{T21} < 0$ avremo che

$$b^2 - 4ac > b^2 > 0$$

e quindi

$$\lambda_1^2 > 0; \lambda_2^2 < 0$$

La prima radice porta a due valori opposti reali che danno luogo per la soluzione positiva a un fenomeno di instabilità statica (divergenza) essendo la soluzione del tipo

$$\{\bar{z}(t)\} = \{\bar{Z}\} e^{\lambda t}$$

Campo di forze non conservativo

Accade che $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$ e la matrice $[K]$ non risulta simmetrica.

Ricordando

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2m_{11}m_{22}} \left[-(m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11}) \pm \sqrt{(m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 - 4m_{11}m_{22}(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12})} \right]$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2a} [-b \pm \sqrt{\Delta}]$$

se risulta che

$$4m_{11}m_{22}(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}) > (m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 \Rightarrow \Delta < 0$$

avremo che

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2a} [-b \pm i\sqrt{|\Delta|}] = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 + \Delta} e^{\mp i \tan^{-1}(\Delta/b)} = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 + \Delta} e^{\mp i\alpha}$$

e quindi

$$\lambda_{I,II} = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} \sqrt{b^2 + \Delta}} e^{i\alpha/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} \sqrt{b^2 + \Delta}} (\cos \alpha/2 + i \sin \alpha/2) = \pm (\psi_1 + i\psi_2)$$

$$\lambda_{III,IV} = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} \sqrt{b^2 + \Delta}} e^{-i\alpha/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} \sqrt{b^2 + \Delta}} (\cos \alpha/2 - i \sin \alpha/2) = \pm (\psi_1 - i\psi_2)$$

Ricordando la soluzione generale

$$\{\bar{z}(t)\} = \{\bar{Z}\} e^{\lambda t}$$

sappiamo che, come più volte dimostrato, ciascuna coppia di radici coniugate fornisce una sola soluzione puramente reale delle quali quella con parte reale positiva è esponenzialmente espansiva (asintoticamente instabile), mentre l'altra è esponenzialmente decrescente (asintoticamente stabile).

Ovvero il moto libero risultante è ellittico e instabile con pulsazione ψ_2 . Il fenomeno prende il nome di flutter.

Se invece

$$4m_{11}m_{22}(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}) < (m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 \Rightarrow \Delta > 0$$

con

$$(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}) < 0$$

avremo anche che

$$b < \sqrt{\Delta}$$

e quindi, essendo

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2a} [-b \pm \sqrt{\Delta}]$$

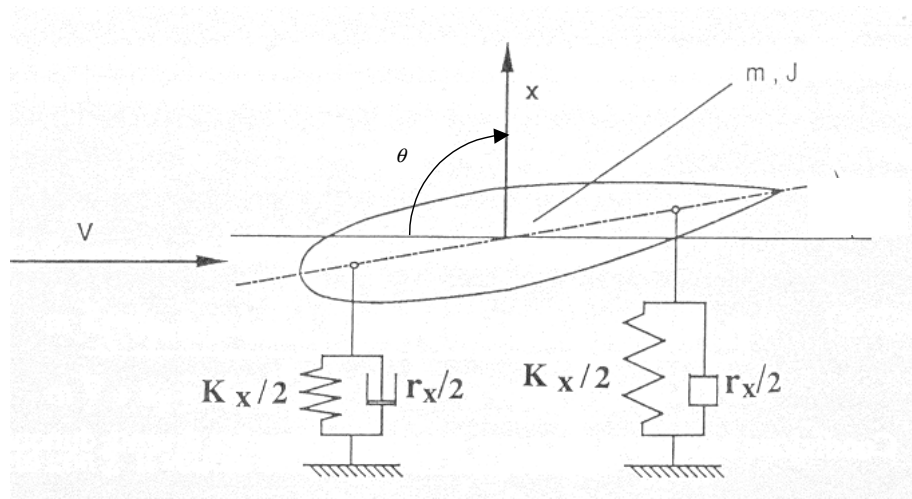
avremo due soluzioni reali opposte e due immaginarie coniugate, con quella positiva reale che porta alla divergenza.

Gli altri casi, portano a soluzioni armoniche stabili, differenti solo nei valori delle frequenze proprie da quello già trattato nel caso di campo di forze conservativo.

Banale è poi il caso in cui la matrice $[R_r]$ sia definita non positiva. Il sistema sarà soggetto a fenomeni di instabilità dinamica, con ampiezze crescenti esponenzialmente nel tempo.

13.2.1 Il flutter di un profilo alare

Qualora un profilo alare si comporti come un sistema a due gradi di libertà, ovvero oltre a traslare in direzione ortogonale alla vena possa anche variare l'incidenza rispetto a questa, potremo ricondurci al modello fisico della figura seguente.

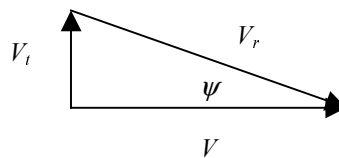


Conseguentemente le equazioni di equilibrio dinamico sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + r_x\dot{x} + k_x x &= L \cos \psi + D \sin \psi \\ J\ddot{\theta} + r_x l^2 \dot{\theta} + k_x l^2 \theta &= M \end{aligned}$$

dove ψ è l'angolo tra la velocità relativa V_r della vena e la direzione della corrente indisturbata V , supposta costante.

Si noti che nel puro moto rotatorio, ogni punto della superficie del profilo possiede una velocità di trascinamento diversa, quindi la velocità relativa V_r varia da punto a punto del profilo. Non sarebbe quindi lecito utilizzare la teoria quasi-statica senonché è possibile dimostrare che riferendosi alla velocità di trascinamento di un punto P_I del profilo alare, in genere vicino al bordo d'attacco, posto a una certa distanza b_I dall'asse di rotazione, è possibile utilizzare ancora la teoria quasi-statica. Di fatto immaginiamo che dal punto di vista delle azioni aerodinamiche il profilo trasli con la velocità di P_I .



Varrà quindi che

$$V_t = \dot{x} + b_I \dot{\theta}; V_r = \sqrt{V^2 + (\dot{x} + b_I \dot{\theta})^2}; \psi = -\tan^{-1} \left(\frac{\dot{x} + b_I \dot{\theta}}{V} \right)$$

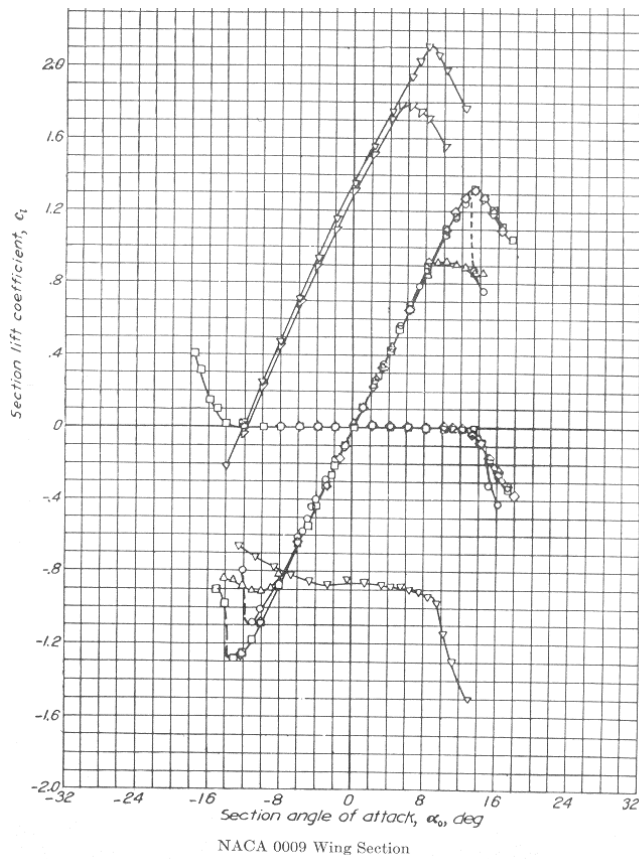
$$\sin \psi = -\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V_r} \approx -\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V}; \cos \psi = \frac{V}{V_r} \approx 1$$

Istantaneamente, quindi, l'angolo d'incidenza sarà dato da

$$\alpha = \psi + \theta \approx -\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V} + \theta$$

per cui il sistema di equazioni differenziali diventa

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_\theta l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_\theta l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V_r^2 \begin{Bmatrix} C_L(\alpha) \cos \psi + C_D(\alpha) \sin \psi \\ CC_M(\alpha) \end{Bmatrix}$$



ma linearizzando intorno alla posizione di equilibrio, che per un profilo simmetrico è $\alpha = \alpha_0 = 0$, abbiamo che

$$\frac{1}{2} \rho S V_r^2 (C_L(\alpha) \cos \psi + C_D(\alpha) \sin \psi) = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left[\cancel{C_L(0)} + \left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} (\alpha) - C_D(0) \frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V} \right]$$

$$\frac{1}{2} \rho S V_r^2 C_{C_M}(\alpha) = \frac{1}{2} \rho S V^2 C \left[\cancel{C_M(0)} + \left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} (\alpha) \right]$$

Sostituendo ad α la sua espressione e riordinando, abbiamo che il campo di forze linearizzato è equivalente a

$$-\frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{V} \left(\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) & \frac{b_1}{V} \left(\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) \\ \frac{C}{V} \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) & \frac{C b_1}{V} \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{bmatrix} 0 & -\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ 0 & -C \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

per cui

$$[R_T] = \begin{bmatrix} r_x + \frac{\rho S V}{2} \left(\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) & \frac{\rho S V b_1}{2} \left(\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) \\ \frac{\rho S V C}{2} \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) & r_x I^2 + \frac{\rho S V C b_1}{2} \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix}$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} k_x & -\frac{\rho S V^2}{2} \left(\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \\ 0 & k_x I^2 - \frac{\rho S V^2 C}{2} \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix}$$

Potremmo, quindi, avere instabilità dinamica a un grado flessionale se il termine

$$r_x + \frac{\rho S V}{2} \left(\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) < 0, \text{ mentre il profilo sarebbe instabile torsionalmente}$$

$$\text{se } r_x I^2 + \frac{\rho S V C b_1}{2} \left(\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) < 0.$$

Come è ben noto, per i profili alari normalmente usati si ha $\left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} > 0$ e

$\left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} > 0$, per cui tali possibilità non sussistono, ma il fenomeno potrebbe

avvenire per profili con elevata sezione frontale (a.es. travi a semplice o doppio T ecc.).

Tuttavia, analizzando la matrice $[K_T]$, il termine $k_{T22} = k_x I^2 - \frac{\rho S V^2 C}{2} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right)$ della matrice di rigidità modifica la frequenza propria torsionale del profilo alare riducendola al crescere della velocità, mentre quella flessionale, dipendente da k_{T11} , rimane costante. Per cui se, come accade nella realtà, la frequenza propria torsionale in assenza di vento è più alta di quella flessionale, vi sarà sempre una velocità V per cui le due frequenze diverranno coincidenti, dando luogo al fenomeno del flutter.