CAPITOLO 2

Dinamica del corpo rigido nel moto piano
Scrittura delle equazioni di moto mediante approcci energetici

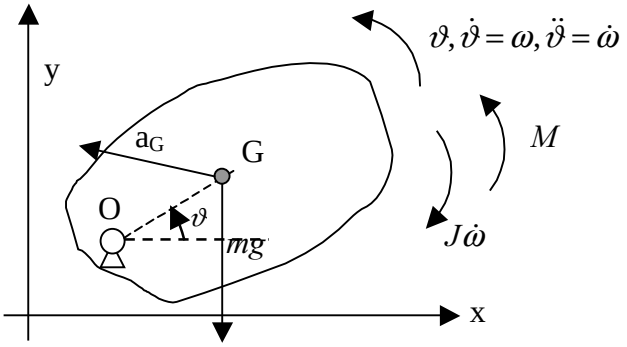
2.1 Il principio dei lavori virtuali

L'approccio visto nel capitolo precedente, studia l'equilibrio dinamico di un sistema meccanico basandosi sull'equilibrio di forze e momenti. In particolare, si è visto che grazie al principio di D'Alembert, è possibile riportare il problema dinamico ad un problema statico equivalente, introducendo un opportuno sistema di forze e coppie di inerzia.

Alternativamente esiste anche un approccio basato su considerazioni di tipo energetico, noto come *principio dei lavori virtuali* (o P.L.V), che può enunciarsi come segue: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio dinamico, in un sistema meccanico con vincoli lisci ovvero in assenza di attrito, è che sia nullo il lavoro virtuale per qualsiasi spostamento virtuale del sistema compiuto dalle forze e coppie attive, comprendendo tra esse la forza e la coppia d'inerzia.

Nel caso di vincoli fissi e lisci, questo metodo consente di ottenere una sola equazione pura di moto che esclude "automaticamente" le incognite di reazione vincolare e, nel caso in cui il sistema sia dotato di un solo grado di libertà, questa equazione consente di risolvere direttamente il problema dinamico senza dover calcolare le incognite aggiuntive rappresentate dalle reazioni vincolari.

Per fare un esempio di questo procedimento ci riferiamo nuovamente al caso del corpo rigido di piccolo spessore del precedente capitolo.



Nel caso in esame, data la presenza di una cerniera a terra in *O*, lo spostamento virtuale del corpo sarà di tipo rotatorio, descritto dalla rotazione virtuale $\delta\vartheta$ del

corpo rigido (assunta, per convenzione, positive se anti-oraria). Applicando il *principio dei lavori virtuali*:

$$\delta^* L = \vec{M} \times \delta\vec{\vartheta} + m\vec{g} \times \delta\vec{s}_G + \vec{F} \times \delta\vec{s}_P - J\dot{\vec{\omega}} \times \delta\vec{\vartheta} - m\vec{a}_G \times \delta\vec{s}_G = 0 \tag{2.1}$$

in cui è:

$$\delta\vec{\vartheta} = \delta\vartheta\vec{k} \quad \delta\vec{s}_G = \delta\vec{\vartheta} \wedge (G - O) \quad \delta\vec{s}_P = \delta\vec{\vartheta} \wedge (P - O)$$

con $\vec{k}$ versore perpendicolare al piano contenente il corpo.

Svolgendo i prodotti indicati e raccogliendo a fattor comune la rotazione virtuale $\delta\vartheta$ si ha:

$$\delta^* L = \left(M - J_G\dot{\omega} - mg\overline{OG}\cos\vartheta - m\dot{\omega}\overline{OG}^2 \right)\delta\vartheta = 0 \tag{2.2}$$

che, semplificando per $\delta\vartheta \neq 0$, risulta in questo caso coincidere con la (1.14), ottenuta scrivendo l'equilibrio dei momenti.

2.1 Il teorema dell'energia cinetica

La Meccanica Razionale ci ha proposto il teorema dell'energia cinetica in due forme, ovvero:

$$\frac{dT}{dt} = \Pi \tag{2.3}$$

e

$$\Delta T = L \tag{2.4}$$

dove T è l'energia cinetica del corpo rigido, Π è la potenza e L il lavoro delle forze esterne.

Infatti, ritornando all'esempio considerato, si può scrivere, utilizzando il teorema di Konig, l'energia cinetica T del corpo come:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_G \times \vec{v}_G + \frac{1}{2}J_G\vec{\omega} \times \vec{\omega} \tag{2.5}$$

per cui

(2.6) $$\frac{dT}{dt} = m\vec{a}_G \times \vec{v}_G + J_G \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega}$$

mentre

(2.7) $$\Pi = \vec{M} \times \vec{\omega} + m\vec{g} \times \vec{v}_G$$

Sostituendo nella (2.3) le (2.6) e (2.7), otteniamo:

(2.8) $$m\vec{a}_G \times \vec{v}_G + J\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = \vec{M} \times \vec{\omega} + m\vec{g} \times \vec{v}_G$$

ovvero

(2.9) $$\vec{M} \times \vec{\omega} + m\vec{g} \times \vec{v}_G - m\vec{a}_G \times \vec{v}_G - J\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = 0$$

che esprime l'annullamento complessivo delle potenze di tutte le forze e coppie (comprese quelle di inerzia) agenti sul sistema. Il principio illustrato da questa equazione è noto anche come *bilancio di potenze*, in quanto la potenza Π_{in} della forze e della coppia d'inerzia è pari a

(2.10) $$\Pi_{in} = -m\vec{a}_G \times \vec{v}_G - J\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\omega} = -\frac{dT}{dt}$$

e quindi la (2.3) può essere riscritta anche come

(2.11) $$\Pi + \Pi_{in} = 0$$

Ricordando, poi, che dall'analisi cinematica risulta che

(2.12) $$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

sostituendo la (2.12) nella (2.9) e risolvendo i prodotti scalari, otteniamo:

(2.13) $$\left(M - mg\overline{OG}\cos\theta - J_G\dot{\omega} - m\dot{\omega}\overline{OG}^2 \right)\omega = 0$$

che semplificata per $\omega \neq 0$ fornisce un'equazione pura identica alla (2.2).

La validità di questa equazione non è limitata ad un singolo corpo rigido, ma vale per qualunque sistema formato da *n* corpi, potendosi riscrivere nella forma

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\Pi + \Pi_{in} \right)_k = 0 \tag{2.14}$$

Nelle applicazioni di dinamica, il *teorema dell'energia cinetica* (ovvero *l'equazione di bilancio delle potenze*) può risultare di più spontaneo utilizzo rispetto a quella dei lavori virtuali vista in precedenza, poiché più direttamente collegata al moto dei corpi rigidi componenti il sistema, prestandosi a una importante interpretazione fisica: durante il moto del sistema, negli istanti in cui la somma delle potenze delle forze attive risulta positiva l'energia cinetica del sistema viene incrementata, mentre al contrario quando tale somma risulta negativa, il sistema riduce la propria energia cinetica. In questi termini, le inerzie presenti nel sistema (masse e momenti di inerzia) possono essere visti come "serbatoi di energia" che nelle fasi di accelerazione immagazzinano l'energia fornita in eccesso al sistema rispetto a quella necessaria per vincere le resistenze, mentre nelle fasi di decelerazione restituiscono l'energia immagazzinata per supplire a un deficit di potenza motrice rispetto a quella necessaria per vincere le resistenze.

.

2.3 Le equazioni di Lagrange

E' stato messo in luce come l'analisi dinamica di un sistema composto da più corpi possa essere convenientemente risolta mediante la scrittura del *teorema dell'energia cinetica* (o dell'equivalente *bilancio di potenze*) in quanto, in presenza di soli vincoli ideali, ne deriva una equazione pura del moto. Nel caso si debbano determinare le forze scambiate tra i vari componenti, le azioni interne, e le reazioni vincolari è stato invece proposto il metodo degli equilibri dinamici, principio di d'Alembert.

Si vuole inoltre presentare una ulteriore possibilità di scrittura delle equazioni di moto tramite la scrittura delle equazioni di Lagrange. Tale metodo energetico trova inoltre un importante applicazione, come vedremo in seguito, nel caso di sistemi a più gradi di libertà.

Limitandoci ora al caso di un sistema piano composto da un corpo rigido di massa m e momento d'inerzia baricentrico J e dotato di un solo grado di libertà soggetto a vincoli bilateri. Sia detta inoltre *q* la variabile indipendente scelta per il sistema l'equazione di Lagrange nella sua forma più nota si presenta come:

(2.15) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}}\right)-\frac{dT}{dq}=Q$$

dove con T si è indicata l'energia cinetica del sistema e con Q la componente lagrangiana delle sollecitazioni attive.

L'energia cinetica del sistema può essere scritta come:

(2.16) $$T=\frac{1}{2}m\vec{v}_G\times\vec{v}_G+\frac{1}{2}J\vec{\omega}\times\vec{\omega}$$

dove con $\vec{v}_{G_i}$ e con $\vec{\omega}_i$ sono state indicate rispettivamente la velocità del baricentro e la velocità angolare del corpo rigido.

Tali grandezze, definite in precedenza le variabili fisiche y_i, sono funzioni dell'unica variabile libera q, tramite le relazioni che ne governano la cinematica e la geometria (tali legami possono avere anche una dipendenza esplicita dal tempo nel caso in cui vincoli esterni o interni variano la loro configurazione con legge assegnata nel tempo):

$$y_i=y_i(q)$$

L'equazione di Lagrange può essere scritta nella forma:

(2.17) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}}\right)-\frac{dT}{dq}+\frac{dD}{d\dot{q}}+\frac{dV}{dq}=Q$$

in cui il termine $\frac{dV}{dq}$ esprime il lavoro virtuale di tutte le forze che ammettono un potenziale, ed il termine $\frac{dD}{d\dot{q}}$ il lavoro dovuto ai termini dissipativi.

La funzione dissipativa D sarà pertanto definita come una potenza associata alla velocità di deformazione o meglio la metà della potenza sviluppata dalle forze applicate dagli elementi dissipativi. Spesso potrà essere ricondotta per un generico elemento viscoso all'espressione:

(2.18) $$D=\frac{1}{2}r\Delta\dot{l}$$

avendo indicato $\Delta\dot{l}$ con la velocita di deformazione dell'elemento dissipativo.

Inoltre V rappresenta l'energia potenziale delle forze agenti che ammettono un potenziale (le forze peso, le forze elastiche). In Q rimangono le componenti lagrangiane di tutte le forze agenti sul sistema escluse le forze d'inerzia, quelle

dissipative e quelle che ammettono un potenziale. Il termini Q viene calcolato come il rapporto tra il lavoro virtuale di tali forze per uno spostamento virtuale della variabile indipendente δq e lo spostamento virtuale.

Con riferimento all'esempio, utilizzando come variabile libera l'angolo α di rotazione del corpo, misurato positivamente in senso antiorario a partire dalla posizione orizzontale e definendo conseguentemente

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \tag{2.18}$$

avremo che

$$\frac{dT}{d\dot{\alpha}} = \frac{d}{d\dot{\alpha}}\left[(\frac{1}{2} J_G + \frac{1}{2} m\overline{OG}^2)\omega^2 \right] = (J_G + m\overline{OG}^2)\omega \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{dT}{d\dot{\alpha}}) = (J_G + m\overline{OG}^2)\dot{\omega} \tag{2.20}$$

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0 \tag{2.21}$$

$$D = 0 \tag{2.22}$$

$$V = mg\overline{OG}\sin\vartheta \tag{2.23}$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = mg\overline{OG}\cos\vartheta \tag{2.24}$$

$$Q = M \tag{2.25}$$

che sostituite nella (2.17) portano a

$$(J_G + m\overline{OG}^2)\dot{\omega} + mg\overline{OG}\cos\vartheta = M \tag{2.26}$$

equazione pura del tutto identica alla (2.2)