CAPITOLO 9

MODELLAZIONE ELEMENTI A FLUIDO

9.1 Considerazioni generali

La soluzione completa del campo di moto di un fluido richiede la determinazione di: densità (1), pressione (1), temperatura (1), vettore velocità (3) e tensore degli sforzi (9) del fluido, i termini fra parentesi rappresentano il numero di componenti di ciascuna grandezza incognita, per un totale di 15 incognite di campo.
Allo scopo abbiamo disponibili le seguenti leggi fisiche:

- conservazione della massa (1)
- bilancio della quantità di moto (3)
- bilancio del momento delle quantità di moto (3)
- conservazione dell'energia (1, primo principio della termodinamica)
- equazione di stato (1)

I termini fra parentesi rappresentano il numero di componenti di ciascuna grandezza incognita, per un totale di 9 relazioni. Notiamo immediatamente che una relazione esplicita si può ottenere rapidamente per i fluidi più comuni dalla conservazione del momento delle quantità di moto applicata ad un volume elementare infinitesimo. Tale relazione stabilisce l'importante proprietà di simmetria del tensore degli sforzi, riducendone le relative componenti incognite a 6. Si hanno pertanto 12 incognite di campo con 6 equazioni, ragion per cui devono essere determinate 6 ulteriori relazioni fra le variabili del campo fluido per permettere la chiusura del bilancio equazioni-incognite. Tali relazioni costituiscono quello che viene genericamente detto legame costitutivo, cioè la relazione che collega il tensore degli sforzi al tensore delle velocità di deformazione. La determinazione di tale relazione si basa su considerazioni sia teoriche che sperimentali, ma la determinazione dei parametri che la caratterizzano richiede comunque una sperimentazione appropriata. Alle relazioni costitutive è solitamente demandato anche il soddisfacimento del vincolo fisico associato all'entropia che, in un sistema isolato, non può che crescere o rimanere invariata (secondo principio della termodinamica, irreversibilità di processi termodinamici reali). Assegnata la legge costitutiva il bilancio incognite-equazioni è quindi chiuso.

Per la determinazione di tutte le grandezze di campo summenzionate le leggi di cui sopra vengono scritte per elementi infinitesimi di fluido, assunto come continuo, dando origine ad un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Per la soluzione di tali equazioni occorre poi assegnare le condizioni al contorno e, nel caso instazionario le condizioni iniziali, specifiche di ciascun problema.

Molto spesso nella pratica ingegneristica è però possibile ottenere risultanti significativi utilizzando le leggi di cui sopra sotto forma di bilanci globali che, pur non permettendo certo la soluzione completa del campo di moto del fluido, rendono possibile la determinazione di significative relazioni estremamente utili per l'analisi e la progettazione di sistemi industriali a fluido, per i quali viene spesso usata la denominazione di 'idraulici', quando elaborano liquidi, e 'pneumatici' quando elaborano gas.
Tali sistemi sono modellabili con flussi interni in: tubi (tubazioni), valvole, pompe e motori/attuatori, che con accettabile approssimazione si possono ritenere sostanzialmente monodimensionali ed approssimabili ad isotermici. In realtà il fluido subisce anche apprezzabili variazioni di temperatura dovute agli attriti interni e di parete, comunque non tali da influenzare significativamente il suo movimento e vengono pertanto trascurate. A causa della monodimensionalità il bilancio del momento delle quantità di moto non è d'interesse mentre la conservazione dell'energia viene utilizzata di solito, a posteriori, per determinare la quantità di calore da smaltire a causa dell'inevitabile riscaldamento del fluido causato dagli attriti.

Si possono pertanto scrivere le sole:
- conservazione della massa (1)
- conservazione della quantità di moto o bilancio dell'energia meccanica (1)
- equazione di stato (1)

Noi faremo riferimento a tale semplificazione, utile per una significativa parte di problemi associati a impianti idraulici e pneumatici, che utilizzata in forma di bilanci globali su opportuni volumi di controllo ci permetterà di affrontare alcuni semplici e significativi problemi.

Conservazione della massa.

La conservazione della massa in un volume di controllo con un flusso entrante ed uno uscente si scrive semplicemente:

$$(9.1) \qquad (\rho A u)_{entrante} - (\rho A u)_{uscente} = \frac{d(\rho V)}{dt}$$

Conservazione della quantità di moto o bilancio dell'energia meccanica.

E' poi pratica comune non utilizzare direttamente l'equazione del bilancio della quantità di moto ma il suo integrale primo, ossia il teorema dell'energia meccanica, spesso chiamato teorema di Bernoulli, pratica impropria nel caso di bilancio globale

completo dell'energia meccanica sulle grandezze medie sezionali di flussi monodimensionali, che comunque accetteremo fra ‘’. Più accettabile è invece la generica denominazione di trinomio di Bernoulli per le espressioni: $\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+gz$ e $\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}+z$ che compariranno fra breve. Ci limitiamo qui a scrivere la relativa relazione ipotizzando che il fluido di interesse sia sostanzialmente incomprimibile, in moto sostanzialmente stazionario e soggetto al solo campo gravitazionale. Ricordiamo che l'ipotesi di incomprimibilità non è tanto legata al fatto che il fluido sia un gas o un liquido ma al rapporto fra la velocità dello stesso e la propagazioni delle piccole perturbazioni interne al campo a velocità sonica c, detto numero di Mach M. Tale rapporto deve essere significativamente minore di uno per potere parlare di fluido incomprimibile, ragion per cui i nostri richiami di fluidodinamica saranno generalmente validi per un fluido generico, gas o liquido, purché M sia significativamente minore di uno.

Bilancio dell'energia meccanica:

(9.2)

$$\frac{p_{ingresso}}{\rho_{ingresso}}+\frac{u^2_{entrante}}{2}+gz_{ingresso}=\frac{p_{uscita}}{\rho_{uscita}}+\frac{u^2_{uscente}}{2}+gz_{uscita}+Energia_dissipata$$

dove il termine *Energia_dissipata*, rappresentante l'energia dissipata per unità di massa di fluido, sarà precisato più avanti.
Una forma equivalente spesso usata si ottiene dividendo per *g* entrambi i termini ottenendo:

$$\frac{p_{ingresso}}{\gamma_{ingresso}}+\frac{u^2_{entrante}}{2g}+z_{ingresso}=\frac{p_{uscita}}{\gamma_{uscita}}+\frac{u^2_{uscente}}{2g}+z_{uscita}+\frac{Energia_dissipata}{g}$$

in cui tutti i termini hanno le dimensioni di una lunghezza e a volte permettono una più intuitiva valutazione dell'importanza relativa dei vari termini.
Come vedremo nelle applicazioni successive utilizzeremo spesso tale relazione anche per flussi instazionari ragion per cui riteniamo utile giustificare subito tale estensione in modo da evitarne usi impropri. Allo scopo notiamo che il bilancio dell'energia meccanica sopra riportato si può ricavare dall'integrazione del bilancio delle quantità di moto di un flusso stazionario lungo il tubo, ritenuto sensibilmente rettilineo.

L'ipotesi di stazionarietà implica la condizione $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ma può costituire ancora una buona approssimazione anche quando pur non essendo $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ l'integrale del termine temporale della variazione della quantità di moto, $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$, lungo il tubo si può ritenere trascurabile rispetto agli altri termini. E' importante rilevare che nella pratica ingegneristica si ricorre spesso a simili approssimazioni, che trascurano alcuni termini del problema al fine di una più semplice soluzione senza però inficiare sensibilmente la validità dei risultati ottenibili. In tali approssimazioni, anche se il tralasciare formalmente alcuni termini appare come considerare gli stessi nulli, il relativo significato fisico è invece sempre associato al fatto che essi sono trascurabili rispetto agli altri fattori che intervengono nella scrittura delle relazioni d'interesse. Poiché noi utilizzeremo prevalentemente l'equazione di 'Bernoulli' per determinare la velocità media del flusso monodimensionale in condizioni dominate dai gradienti di pressione e dal termine convettivo, $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$, della variazione della quantità di moto l'approssimazione stazionaria manterrà un significativo livello di accettabilità anche quando la velocità potrà variare temporalmente in modo non trascurabile. In ultima analisi la validazione di tale ipotesi spetta alla sperimentazione, ed infatti una lunga pratica ne ha ampiamente dimostrato il livello di validità nelle tipiche applicazione che qui esemplificheremo, ma potrà, anzi dovrà, comunque sempre essere verificata a posteriori analizzando accuratamente i risultati ottenuti. E' infatti evidente che se dopo avere risolto le equazioni che modellano il nostro sistema a fluido sulla base di una certa ipotesi, la soluzione ottenuta non verifica le ipotesi stesse la formulazione sviluppata non può che ritenersi inappropriata. D'altro canto l'ottenimento di risultati consistenti con gli assunti non può certo garantire la bontà fisica della soluzione se quest'ultima è soggetta solo ad approssimazioni plausibili ma non rigorosamente provate, ragion per cui la verifica sperimentale diventa essenziale. E' utile aggiungere che spesso tale verifica può essere assunta a priori come scontata sulla base di pratiche consolidate da una vasta letteratura. Un'ulteriore immediata applicazione di quanto appena detto viene suggerito dalla formula espressa in unità di lunghezza che chiaramente ci dice che per i fluidi più comuni, già in presenza di variazioni di pressione dell'ordine di pochi bar, si potrà spesso trascurare il termine associato a variazioni di quota poiché le variazioni di energia gravitazionale corrispondenti sono trascurabili rispetto alle quote barometriche e d'energia cinetica, ipotesi valida per molti applicazioni industriali di componenti a fluido.

Continuiamo ancora notando che il nostro volume di controllo è si prevalentemente monodimensionale ma dotato di sezione finita, per cui l'equazione di cui sopra implica che si possano definire una pressione ed una velocità mediamente uniformi nella stessa. Senza dilungarci ricordiamo che tale condizione è praticamente soddisfatta per correnti turbolente su tutta la sezione, al di fuori, al più, di una strato

genericamente sottile vicino alla parete fisica che contiene il volume di controllo. In sostanza nella sezione il flusso è dominato dalle forze d'inerzia mentre gli sforzi viscosi si evidenziano solo in prossimità della parete del tubo, quando la velocità diminuisce fini ad annullarsi per soddisfare la condizione di adesione del fluido alla parete. Si noti che si è preferito parlare di distribuzione di velocità nella sezione evitando ogni riferimento improprio ad un possibile strato limite di parete essendo tale estensione del concetto di strato limite inappropriata, anche se spesso usata in letteratura.
Come detto l'esistenza di moti stabilmente turbolenti dipende essenzialmente dal prevalere delle forze d'inerzia sulle forze viscose, condizione come noto sintetizzata da un numero di Reynolds medio sulla sezione sufficientemente elevato. Nel caso di flussi prevalentemente monodimensionali tale numero di Reynolds è definito da:

$$R = \frac{\rho D_i u}{\mu} = \frac{D_i u}{\nu}$$

essendo D_i una dimensione caratterizzante la sezione di riferimento, spesso definita per una generica sezione col termine di diametro idraulico equivalente, o semplicemente diametro idraulico dato da:

$D_i = \frac{4A}{P}$ (A area, P perimetro sezione)

Chiaramente per tubi a sezione circolari D_i altro non è che il diametro reale del tubo.
Con tale definizione si può approssimativamente ritenere che il flusso sia sicuramente turbolento per $R > 4000$ e laminare al di sotto di 2000, mentre per valori compresi fra 2000 e 4000 si ha una condizione di flusso misto, detto di transizione. In generale la transizione presenta una isteresi nel senso che, in assenza di perturbazioni, per numeri di Reynolds in crescita da valori inferiori a 2000 il flusso tende a rimanere significativamente laminare ben dentro l'intervallo critico e, viceversa, in diminuizione da valori maggiori di 4000 il flusso tende a permanere turbolento.
La condizione $R > 4000$ è generalmente soddisfatta, e sarà assunta come vera nella maggior parte della nostra trattazione, salvo quando verranno specificamente evidenziati flussi meglio approssimabili come laminari.

Si ricorda che la viscosità dipende sia della pressione che della temperatura. In particolare la viscosità dei liquidi diminuisce significativamente all'aumentare della temperatura aumentando invece, ma con minore sensitività, all'aumento della pressione. Per i gas si hanno invece aumenti di viscosità sia all'aumentare della pressione che della temperatura. Si ricordano alcuni valori tipici di orientamento per la viscosità cinematica alla pressione atmosferica e per temperature attorno ai 20 C: acqua 10^{-6}, oli qualche decina di 10^{-6}, aria $1.5\ 10^{-5}$ m^2/s.

Nella pratica ingegneristica il termine *Energia_dissipata* viene denominato genericamente come 'perdite d'attrito' o anche 'perdite di carico', con riferimento al termine energetico associato ad un salto di pressione che eguaglia le perdite stesse. Tale dicitura richiama la semplice ed intuitiva constatazione che per vincere la resistenza d'attrito del fluido bisogna applicare una pressione. Tali perdite vengono generalmente suddivise in perdite distribuite lungo tratti di tubazione di sezione a caratteristiche costruttive sensibilmente costanti e perdite concentrate, collegate ad esempio a: brusche variazioni di sezione, intersezioni di tubazioni, brusche curve, raccordi.
Le perdite d'attrito distribuite su una tubazione di lunghezza L, diametro idraulico D_i e percorsa da un fluido alla velocità media u sono generalmente espresse tramite la relazione:

(9.3) $$Energia_dissipata = f\frac{L}{D_i}\frac{\rho u^2}{2} \qquad \text{con} \qquad f = f(R),$$ funzione dimensionale determinata sperimentalmente.
Le perdite concentrate hanno un'analoga espressione:

(9.4) $$Energia_dissipata = K\frac{\rho u^2}{2},$$ dove K è ancora una volta determinato sperimentalmente. Qualora l'elemento di concentrazione della perdita coinvolga una variazione di sezione K è generalmente espresso assumendo per u la velocità più elevata. Ricordato che tale convenzione non ha nulla di arbitrario in quanto la perdita concentrata coinvolge un volume equivalente di controllo abbastanza limitato per il quale è sempre possibile scrivere la relazione di continuità in termini volumetrici

(9.5) $$(Au)_{entrante} = (Au)_{uscente}.$$

Comunque è opportuno verificare attentamente la convenzione utilizzata per definire K ogni volta che se ne reperiscono i valori in letteratura e/o su manuali.
Può essere utile ricordare l'estensione del bilancio dell'energia meccanica testé illustrato al caso in cui il volume di controllo non sia un semplice tratto di condotta, ma contenga anche macchine utilizzatrici/operatrici, che scambino potenza con l'esterno. Scriviamo pertanto il:

Bilancio globale generalizzato dell'energia meccanica:

$$(\rho Au)_{entrante}\left(\frac{p_{ingresso}}{\rho_{ingresso}} + \frac{u^2{}_{entrante}}{2} + gz_{ingresso}\right) = (\rho Au)_{uscente}\left(\frac{p_{uscita}}{\rho_{uscita}} + \frac{u^2{}_{uscente}}{2} + gz_{usicta}\right) +$$
$$Potenza_dissipata + Potenza_esterna$$

dove il termine *Potenza_esterna* si riferisce alla potenza totale scambiata con l'esterno, positiva in uscita, mentre il termine *Potenza_dissipata* indica la potenza totale dissipata all'interno.

Come abbiamo detto precedentemente l'energia dissipata si trasforma in calore che è parzialmente smaltito lungo il circuito idraulico, principalmente per conduzione verso componenti con esso a contatto e convenzione verso l'ambiente che lo circonda. Come già detto noi riterremo che, anche in assenza di un significativo smaltimento termico distribuito, le variazioni di temperatura non siano generalmente tali da causare significativi effetti sul flusso. In tale asserzione si ritiene implicitamente che il fluido elaborato sia continuamente rinnovato, in quanto è chiaro che qualora la stessa massa fluida fosse continuamente ricircolata in un impianto chiuso che non è in grado di smaltire naturalmente il calore accumulato sotto forma di energia interna lungo il percorso la temperatura continuerebbe a salire invalidando l'assunto. Poiché questo è proprio ciò che avviene negli impianti a fluido di potenza tali impianti sono sempre dotati di un sistema di raffreddamento, concentrato in uno o più radiatori, che ha il compito di smaltire l'energia termica accumulata dal fluido a causa dell'attrito. Ecco allora che ha questo punto possiamo chiarire cosa intendevamo quando abbiamo detto che il bilancio dell'energia ci avrebbe permesso di trarre opportune conclusioni sullo smaltimento dell'accumulo dell'energia dissipata per attrito sotto forma di energia interna. Infatti se E_t è l'energia totale dissipata per unità di massa e Q la portata di massa elaborata nel circuito idraulico, la variazione media di temperatura del fluido sarà $\Delta T = \frac{E_t}{c_p}$, mentre la potenza termica totale generata e quindi da smaltire per mantenere la temperatura del fluido in limiti accettabili sarà P_t = Q E_t. Tali valori permettono il dimensionamento di massima del sistema di raffreddamento del fluido.

Equazione di stato.

L'equazione di stato di un fluido è una generica relazione del tipo:

$$\rho = \rho(p, T)$$

Per flussi idraulici e pneumatici approssimabili come incomprimibili è spesso necessario poter valutare alcuni effetti causati dalla comprimibilità sul bilancio di massa del fluido attorno alla condizione nominale di funzionamento. Infatti si ricorda che in tale bilancio interviene il termine $\frac{d(\rho V)}{dt}$, per il quale il volume funge da fattore di amplificazione delle variazioni di ρ, variazioni che invece abbiamo ritenuto inessenziali e tali da non influenzare significativamente il bilancio energetico meccanico.

Limitandosi a flussi poco comprimibili e con limitate variazioni di temperatura è spesso accettabile utilizzare un'approssimazione linearizzata dell'equazione di stato ottenuta con uno sviluppo attorno ad una densità media nota di riferimento ρ_0:

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \Delta p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \Delta T = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \Delta p + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \Delta T\right)$$

Chiaramente la densità aumenta all'aumentare della pressione, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T > 0$, mentre diminuisce all'aumentare della temperatura, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p < 0$. Tenendo conto delle condizione precedenti si definiscono allora due significative grandezze caratterizzanti i fluidi:

- il modulo di comprimibilità volumetrica (isotermico) $\beta = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$, e
- il coefficiente di dilatazione volumetrica isobarico $\alpha = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$,

per cui la formula di cui sopra si scrive:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{\beta}\Delta p - \alpha \Delta T\right)$$

Spesso è utile riferire β e α a un generico volume di riferimento, invece che ad una densità. Essendo, a parità di massa, il volume inversamente proporzionale alla densità si avrà: $\rho \approx \frac{1}{V}$ e quindi $d\rho \approx -\frac{dV}{V^2}$, per cui $\beta = -V_0 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ e $\alpha = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Avendo assunto trascurabili gli effetti termici sulla dinamica del fluido β sarà una caratteristica della massima importanza nella determinazione della dinamica dei sistemi a fluido ogniqualvolta non potremo ritenere il fluido perfettamente incomprimibile, in quanto ne caratterizzerà la relativa rigidezza.

Si noti che è anche possibile la definizione di un coefficiente di comprimibilità adiabatica β_a, collegabile a β tramite la relazione: $\beta_a = \frac{c_p}{c_v}\beta$. Essendo $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ significativamente approssimabile a uno per i liquidi, la distinzione fra i due moduli e solitamente inessenziale per tali fluidi. Per i gas la differenza può essere invece significativa, si ricordi che $\frac{c_p}{c_v}$ vale all'incirca 1.4 per gas perfetti biatomici, e

l'utilizzo del modulo adiabatico meglio approssima la realtà, in quanto per i gas l'ipotesi di adiabaticità, scambio di calore nullo, è più appropriata. Per un gas, approssimato come perfetto, ricordando la definizione di β e la relativa equazione di stato: $p = \rho RT$, si constata facilmente che $\beta = p$ e quindi $\beta_a = \frac{c_p}{c_v} p = \gamma p$. Nel prosieguo, salvo diversa ed esplicita menzione, noi utilizzeremo sempre il simbolo β sottintendendo allo stesso β_a nel caso di gas.

Si può quindi avere un'idea immediata dell'ordine di grandezza della comprimibilità di un gas mentre per i liquidi si ricordano i valori approssimativi a 20 C: per gli oli utilizzati nei circuiti idraulici, 1.5 Gpa (15000 bar), e per l'acqua, 2.1 Gpa (21000 bar). La comprimibilità volumetrica generalmente diminuisce con l'aumentare della temperatura, con variazioni che dipendono da liquido a liquido, l'acqua ad esempio non presenta significative variazioni da fra 20-100 C mentre gli oli idraulici possono subire una diminuizione di circa il 25%.
E' importante rilevare che nelle reali condizioni operative, per quanto si ponga attenzione ad evitare l'inclusione e la formazione di gas, una certa percentuale di inclusione di gas non disciolto è sempre presente. Tale inclusione può influenzare significativamente la rigidezza del fluido, esperienza spesso drammaticamente avvertita quando il calore sviluppato dall'eccessivo riscaldamento dei freni di un autoveicolo si trasmette al fluido del circuito frenante che evapora parzialmente, facendo si che la pressione esercitata sul pedale del freno produca un effetto frenante estremamente limitato, poiché frenando non si fa altro che comprimere le bolle di vapore sviluppatesi in seno al liquido (fading).
Infatti il vapore ed il liquido agiscono come due elementi elastici in serie per le quali, come ben sappiamo, si sommano le relative flessibilità (inverso delle rigidezze) per cui se una è preponderante sull'altra diventa praticamente la sola responsabile della cedevolezza globale del sistema idromeccanico.

Può essere utile evidenziare tale concetto nel nostro caso. Supponiamo che in un volume complessivo V_t ci sia una parte V_l di liquido e V_g di gas, sarà evidentemente $V_t = V_l + V_g$ e $\Delta V_t = \Delta V_l + \Delta V_g$. Chiamando β il modulo relativo a tutto il volume, dalla sua definizioni in termini volumetrici potremo scrivere la precedente relazione delle variazioni volumetriche nella forma:
$\frac{V_t}{\beta}\Delta p = \frac{V_l}{\beta_l}\Delta p + \frac{V_g}{\beta_g}\Delta p$ da cui proseguendo: $\frac{V_t}{\beta} = \frac{V_t - V_g}{\beta_l} + \frac{V_g}{\beta_g}$ per arrivare a: $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_l} + \frac{V_g}{V_t}\left(\frac{1}{\beta_g} - \frac{1}{\beta_l}\right)$ spesso più semplicemente approssimabile con

$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_l} + \frac{V_g}{V_t}\frac{1}{\beta_g}$ essendo $\beta_l >> \beta_g$.

Da tale formula si vede come per un'inclusione volumetrica di gas del 1% , $\frac{V_g}{V_t} = 0.01$, alla pressione media operativa atmosferica, $\beta_{gas} \cong 1$ bar, un fluido idraulico con $\beta_l = 15000$ bar abbia un rigidezza volumetrica effettiva di sole 100 bar, mentre alla pressione media operativa di 150 bar si abbia un valore 'solo' un dimezzato. Questa è certamente una delle ragioni che ben evidenzia l'utilità dell'utilizzo di circuiti idraulici di potenza operanti a pressioni relativamente alte. Ad ulteriore complemento si rileva che l'inclusione di aria nei circuiti idraulici operanti alla pressione atmosferica può raggiungere valori percentuali ben maggiori dell'unità, mentre ad alte pressioni medie operative l'aria tende a dissolversi nel liquido con minore degrado della rigidezza volumetrica dello stesso. Pur senza dilungarci oltre notiamo che un ulteriore diminuzione della rigidezza apparente del fluido può imputarsi anche alla deformabilità strutturale degli elementi che lo contengono. Può inoltre essere interessante rimarcare dal punto di vista fisico che le formule di composizione della comprimibilità sopra riportate sono analoghe a quelle ottenibili quando si combinino in serie due elementi deformabili di rigidezza generalizzata k_1 e k_2 per i quali la rigidezza equivalente complessiva è data dalla relazione $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. Si rammenta anche che per la combinazione in parallelo vale invece la: $k = k_1 + k_2$.

Abbiamo già richiamato come la distinzione fra flussi comprimibili e non sia associata al numero di Mach *M* e quindi alla velocità di propagazione del suono nel fluido. Può essere ora utile ricordare che la velocità del suono altro non è che la velocità di propagazione delle piccole perturbazioni di campo nel mezzo, approssimato come non dissipativo, ed è data da

$$c = \left(\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}\right)_{adiabatico} = \sqrt{\frac{\beta_a}{\rho}}\,.$$

Come già ricordato per i liquidi la differenziazione fra comprimibilità isotermica e adiabatica è inessenziale mentre per i gas è necessario usare β_a. Si ricorda che per i gas perfetti si ha la nota: $c = \sqrt{\gamma \quad RT}$

Riprendendo il bilancio di massa:

$$(\rho A u)_{entrante} - (\rho A u)_{uscente} = \frac{d(\rho V)}{dt}$$

dopo aver condotto buona parte della presentazione precedente sulla base dell'ipotesi di flusso incomprimibile parrebbe naturale riscrivere la stessa in termini puramente

volumetrici e cioè:

$$(Au)_{entrante} - (Au)_{uscente} = \frac{dV}{dt}$$

essendo quindi ogni effetto instazionario attribuibile alla sola variabilità del volume di controllo, come nel caso di un cilindro con pistone mobile o di una valvola con elemento di chiusura scorrevole.

Ricordando l'equazione di stato linearizzata $\rho = \rho_0\left(1+\frac{\Delta p}{\beta}\right)$ e trascurando le dilatazioni termiche è infatti facilmente verificabile che per i liquidi $\frac{\Delta p}{\beta}$ rimane nell'ordine di soli alcuni punti percentuali anche per variazioni di alcune centinaia di bar, mentre per i fluidi essendo $\frac{\Delta p}{\beta}$ dell'ordine di $\frac{\Delta p}{p}$ l'effetto è sostanzialmente dipendente dalla pressione media operativa, ma può comunque rimanere adeguatamente contenuto in presenza di una pressurizzazione media adeguata.
E' comunque utile esplicitare tali considerazioni eseguendo alcuni passaggi. Sostituendo allora l'equazione di stato linearizzata nel bilancio di massa abbiamo:

$$(\rho Au)_{entrante} - (\rho Au)_{uscente} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} + \rho\frac{V}{\beta}\frac{d\Delta p}{dt}$$

che assumendo $\frac{\Delta p}{\beta}$ sufficientemente minore di uno permette di semplificare ρ e riscrivere la stessa in termini puramente volumetrici:

$$(Au)_{entrante} - (Au)_{uscente} = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{d\Delta p}{dt}. \qquad (9.6)$$

Tale formula mostra come, anche per flussi ben approssimabili come incomprimibili, in presenza di relativamente elevate variazioni temporali di pressione e/o volumi non piccoli si possano introdurre eccessive approssimazioni trascurando il termine $\frac{V}{\beta}\frac{d\Delta p}{dt}$. La differenza essenziale fra liquidi e gas è allora legata alla pressione di riferimento implicita nell'equazione di stato linearizzata. Infatti, come già detto, per i liquidi tale equazione può fornire una buona approssimazione anche per variazioni di pressione di centinaia di bar e si può quindi scrivere anche assumendo come pressione di riferimento la pressione nulla, e quindi direttamente in termini di pressione assoluta: $(Au)_{entrante} - (Au)_{uscente} = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{dp}{dt}$ e non di variazione Δp.

E' anche opportuno ricordare che la pressione non può essere minore di zero, corrispondendo infatti la pressione nulla al vuoto assoluto. Una banale constatazione da cui consegue l'impossibilità di aspirare un liquido alla pressione atmosferica ad un altezza di più di $\frac{100000}{\rho g}$ metri, circa 10 m nel caso dell'acqua. Di fatto a causa delle perdite di carico e della necessità di garantire un portata adeguata, il fluido deve pervenire a destinazione con una velocità e, quindi energia cinetica, adeguata, tale altezza è in pratica assai inferiore al limite sopra riportato. Inoltre all'abbassarsi della pressione a livelli significativamente inferiori alla pressione atmosferica il fluido libera ogni gas in esso disciolto e comincia a vaporizzare diventando praticamente bifasico (gas-liquido), i gas disciolti e il suo vapore formano bolle di varie dimensioni. Tale condizione è spesso fonte di varie forme di vibrazioni, rumore e generazione di sollecitazioni dinamiche. Quando poi il liquido viene assoggettato a ricompressione si possono generare fenomeni di erosione dovute a pressioni intense e fortemente localizzate, causate dall'esplosione delle bolle, che sono spesso in grado di rompere i legami intermolecolari del materiale con cui vengono a contatto durante l'esplosione stessa, formando cavità ed erosioni distruttive. Il termine generalmente usato per tali situazioni è quello di cavitazione.

Concludiamo ricordando la scrittura del bilancio globale della quantità di moto per un flusso stazionario applicato ad un volume di controllo fisso:

$$\mathbf{F} = \int_S \rho \, \mathbf{U} \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \right) dS$$

essendo **F** la risultante di tutte le forze applicate al volume di controllo, **U** la velocità d'efflusso e *S* la superficie che racchiude il volume di controllo. Formula che risulterà utile per determinare le forze scambiate fra fluido e parti meccaniche, sia fisse che mobili.

9.2 Esempi di applicazione dei concetti richiamati.

9.2.1 Colpo d'ariete.

Perfino nelle normali condotte domestiche dell'acqua potabile è a volte possibile avvertire un colpo metallico proveniente dalle tubazioni quando si chiude bruscamente un rubinetto ben aperto. Tale 'botto' è associato alla sovrapressione che si genera a causa della comprimibilità dell'acqua. Non ci addentreremo qui in uno studio dettagliato del fenomeno ma solo in un'analisi semplificata, in grado di fornire però alcune utili indicazioni pratiche. Supponiamo allora che si sia stabilito un flusso stazionario avente velocità media u in una tubazione di lunghezza L e area A, a tale flusso sarà associata un'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \rho L A u^2$.

In conseguenza ad una chiusura istantanea della condotta il flusso viene improvvisamente bloccato all'uscita e comincerà a comprimersi propagando, alla velocità del suono e in senso retrogrado al flusso, una sovrapressione che si accompagna ad un annullamento della sua velocità. Dopo un tempo L/c tutto il fluido avrà velocità nulla e, trascurando gli effetti gravitazionali, tutta l'energia cinetica si sarà trasformata ed accumulata in energia elastica che sarà data da: $E = -\int_V p dV$. La conservazione della massa applicata alla tubazione ci dice che $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta}\frac{dp}{dt} = 0$, o anche $dV = -\frac{V}{\beta}dp$, che sostituita nell'integrale precedente permette di scrivere $E = \frac{1}{2}\frac{LA}{\beta}p^2$.

Eguagliando le due energie si ricava la variazione di pressione massima conseguente ad una soppressione istantanea del flusso:

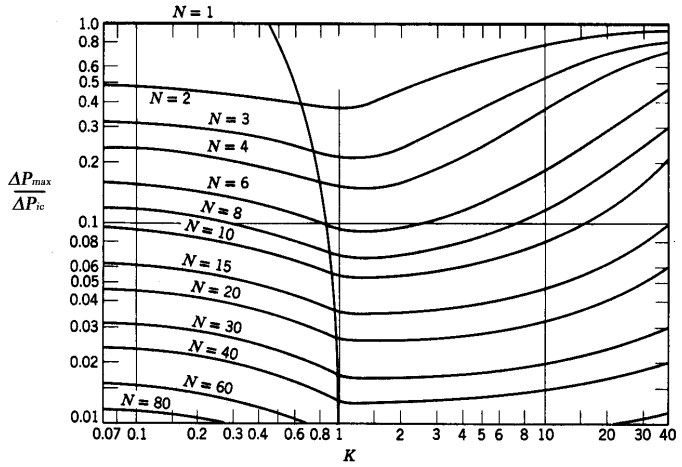
$$\Delta p_{ci} = \rho\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}u = \rho c u$$

che va rilevato non dipendere dalla pressione già esistente nella condotta.

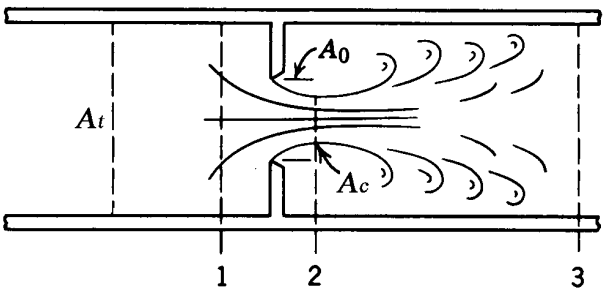
E' facile constatare che già con un modesto flusso d'acqua di circa un metro al secondo si può instaurare una sovrapressione di una decina di bar. Naturalmente una chiusura istantanea del rubinetto di casa non è ipotizzabile ma, come abbiamo già detto, zero non vuol mai dire zero ma qualcosa di piccolo rispetto ad una grandezza di riferimento. E' allora evidente che la rapidità di chiusura non è un valore assoluto ma va collegata ad un tempo caratteristico collegato al propagarsi della perturbazione ipotizzata. Tale tempo può, riferendosi ad una compressione e riespansione completa, assumersi dato da $t_c = 2L/c$, ragion per cui per evitare sovrapressioni eccessive sarà opportuno effettuare le manovre di chiusura in tempi molto maggiore di tale quantità. Tale condizione si può facilmente soddisfare in occasione di manovre di chiusura programmabili a priori ma può imporre un vincolo inaccettabile in tutte le operazioni di regolazione, sia di normale funzionamento che di emergenza, nelle quali è richiesta una certa prontezza, ragion per cui è spesso opportuno provvedere con opportuni accorgimenti di progetto su cui non è opportuno qui dilungarsi. Chiaramente l'esempio 'domestico' viene fatto solo per immediatezza intuitiva. Per un esempio più significativo basti pensare alle lunghe condotte in pressione che alimentano le turbine idrauliche e agli impianti a fluido che contengono componenti di regolazione con banda passante avente frequenze dell'ordine di $1/t_c$.

Il grafico di cui sopra permette una valutazione di approssimata della variazione di pressione massima $\Delta p_{\max}$ che si sviluppa in una condotta in cui il fluido scorre alla pressione p_0 e la chiusura avviene con legge lineare su un tempo T. I simboli

utilizzati sono: $K = \frac{\Delta p_{ic}}{2p_0}$, $T_c = \frac{2L}{c}$, $N = \frac{T}{T_c}$.



9.2.2 Flusso stazionario da una piccola apertura (orifizio)



Si supponga che in un tubo di area A_t sia inserito un diaframma con un'apertura di area A_0, centrata attorno all'asse del tubo. Se A_0 è significativamente minore di A_t (orifizio) si ha in genere una forte contrazione del flusso la cui minima sezione non si stabilisce in coincidenza del diaframma ma in una sezione contratta, detta appunto di vena contratta, poco a valle e di area $A_c = C_c A_o$, essendo C_c un opportuno coefficiente di contrazione.
Si possono allora scrivere le seguenti equazioni tra la sezione *2* e una sufficientemente a monte della *1*:
dalla (9.5)

(9.7) $$A_t u_t = A_c u_c$$

e dalla (9.2), ricordando la (9.4)

(9.8) $$\frac{2\Delta p}{\rho} = u_c^{\,2}(1+K_c) - u_t^{\,2}$$

da cui

(9.9) $$u_c = \left[(1+K_c) - \left(\frac{A_c}{A_t} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

Più usualmente però le perdite dovute alla contrazione vengono tenute in conto riscrivendo la formula di cui sopra nella forma:

(9.10) $$u_c = C_u \left[1 - \left(\frac{A_c}{A_t} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

dove C_u è un coefficiente, detto di velocità, lievemente inferiore ad uno, diciamo 0.98, spesso omesso essendo assai prossimo ad 1, il che corrisponde anche ad assumere perdite concentrate nulle e quindi $K_{vc} = 0$.

Si può allora scrivere la portata corrispondente in termine delle grandezze geometriche effettive:

(9.11) $$q = \frac{C_u C_c A_o}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{C_c A_o}{A_t} \right)^2 \right]}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

che, definendo un coefficiente d'efflusso:

$$C_e = \frac{C_u C_c}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{C_c A_o}{A_t} \right)^2 \right]}}$$

si scrive più sinteticamente:

(9.12) $$q = C_e A_o \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \, .$$

Nella prassi C_e è il coefficiente di più facile valutazione sperimentale, dipende dal numero di Reynolds ed è sensibilmente compreso fra 0.6 e 0.7 per rapporti di contrazione che soddisfino la relazione: 0.2 <= $\frac{A_o}{A_t}$ <=.6. Per mantenersi consistenti

con la relazione sopra illustrata per il calcolo della portata da un orifizio sarà alloro opportuno calcolare la relativa velocità d'efflusso con:

(9.13) $$u_o = C_e \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} .$$

Va anche notato che nelle formule precedenti si è sempre assunto $\Delta p \geq 0$ e che un'eventuale variazione del segno del salto di pressione starebbe ad indicare l'inversione del flusso attraverso l'orifizio. Chiaramente sia la portata che la velocità d'efflusso sono grandezze con un verso e quindi segno e un'inversione di flusso può essere sempre possibile. In relazione a tale eventualità, sarà opportuno scrivere:

$$q = C_e A_o \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}} \operatorname{sgn}(\Delta p)$$

nella quale, qualora si evidenzino asimmetrie geometriche, si dovrà inoltre avere cura di utilizzare un C_e appropriato all'inversione. Una simile precauzione può essere evitata solo se è possibile garantire l'impossibilità di inversione del flusso sulla base di considerazioni fisiche, ragion per cui $\Delta p \leq 0$ diventerà invece una sicura indicazione di errori di calcolo e/o di modellazione.

La presenza del termine $\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$ nelle formule presentate evidenzia chiaramente che tali formule non sono utilizzabili per flussi laminari. In tale caso è infatti noto che la portata è invece proporzionale a Δp, per cui si può scrivere:

(9.14) $$q = C_{el} A_o \Delta p .$$

Si riportano quindi brevemente le espressioni di C_{el} per due geometrie di orifizi più comuni, valide quando la dimensione massima degli stessi è molto minore della dimensione del tubo:

$C_{el} = \frac{d}{12.6\mu}$ per orifizi circolari, $C_{el} = \frac{\text{dimensione_minima}}{10.2\mu}$ per orifizi rettangolari e corone circolari di altezza molto inferiore alla circonferenza media.

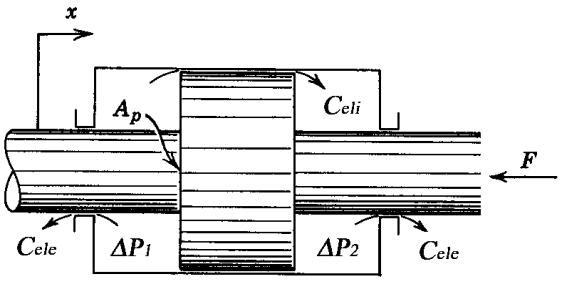
Anche se non è un orifizio ricordiamo qui la formula per il C_{el} del flusso piano fra due piastre di lunghezza *L* distanti *h*, con *h/L* molto minore di uno: $C_{el} = \frac{h^2}{12\mu L}$.

Essendo *h/L* molto minore di uno il flusso è sostanzialmente bidimensionale sia per intagli rettangolari che circolari e tale formula è assai utile per determinare le perdite di flusso conseguente ai giochi costruttivi.

Come già precedentemente ricordato a commento del bilancio di energia meccanica nelle condotte si rileva che le espressioni sopra ricavate valgono per flussi stazionari ma verranno da noi utilizzate anche nel caso non stazionario essendo tale fenomeno

dominato dalle variazioni di pressione e dai termini inerziali convettivi.

9.2.3 Molla-smorzatore a fluido.



Con riferimento alla figura si assuma che il cilindro-pistone contenga un fluido inizialmente pressurizzato uniformemente in modo da non avere squilibri di pressione sulle due facce. Assumendo che ogni successivo movimento sia effettuato in modo da causare variazioni di pressione tali da permettere di utilizzare il bilancio di massa basato sull'equazione di stato linearizzata (9.6) ricordando la (9.14), potremo scrivere:

$$\begin{cases} \Delta\dot{p}_1 = \dfrac{\beta}{A_p x}\left(-A_p\dot{x} - C_{eli}A_{eli}\left(\Delta p_1 - \Delta p_2\right) - C_{ele}A_{ele}\Delta p_1\right) \\ \Delta\dot{p}_2 = \dfrac{\beta}{A_p\left(l-x\right)}\left(A_p\dot{x} + C_{eli}A_{eli}\left(\Delta p_1 - \Delta p_2\right) - C_{ele}A_{ele}\Delta p_2\right) \end{cases} \tag{9.15}$$

dove l è la corsa del pistone e i termini di scambio di fluido, fra le due camere e verso l'esterno, sono formulati assumendo un flusso laminare, ritenendo quindi che gli accoppiamenti cilindro-pistone e stelo-supporti siano sufficientemente precisi da garantire giochi tali da mantenere il numero di Reynolds ben dentro i limiti di laminarità in ogni condizione operativa. C_{eli} è il coefficiente di efflusso laminare interno attraverso l'area anulare A_{eli} attorno al pistone, C_{ele} è il coefficiente di efflusso laminare verso l'esterno attraverso i supporti dello stelo.
Supponendo che l'attrito che si stabilisce fra cilindro e pistone e fra stelo e supporti sia approssimabile con una dissipazione viscosa di coefficiente r, la forza generata dalla molla-smorzatore sarà:

$$F = \left(\Delta p_1 - \Delta p_2\right)A_p - r\dot{x} \tag{9.16}$$

Le formule di cui sopra possono essere sintetizzate nella seguente forma matriciale:
- equazione di stato:

$$(9.17)\quad \begin{Bmatrix}\Delta\dot{p}_1\\ \Delta\dot{p}_2\end{Bmatrix}=\frac{\beta}{A_p}\begin{bmatrix}-\dfrac{C_{eli}A_{eli}+C_{ele}A_{ele}}{x} & \dfrac{C_{eli}A_{eli}}{x}\\ \dfrac{C_{eli}A_{eli}}{(l-x)} & -\dfrac{C_{eli}A_{eli}+C_{ele}A_{ele}}{(l-x)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta p_1\\ \Delta p_2\end{Bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{1}{l-x}\end{bmatrix}\dot{x}$$

- equazione di uscita:

$$(9.18)\qquad F=\begin{bmatrix}A_p & -A_p\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta p_1\\ \Delta p_2\end{Bmatrix}-r\dot{x}$$

Le quali mostrano come il sistema risponda con la generazione di una forza ad un movimento assegnato $x,\dot{x}$. Si deve rilevare che il comportamento della molla-smorzatore a fluido non solo sia non lineare ma è anche caratterizzato da un sistema di equazioni differenziali che non permettono di definire la forza come puntualmente dipendente dai valori istantanei di $x,\dot{x}$ poiché la stessa viene a dipendere dall'integrazione di un sistema di equazioni differenziali e quindi dalla storia del movimento.

Solo nel caso in cui il coefficiente di comprimibilità sia talmente elevato e i movimenti sufficientemente lenti da rendere le derivate delle variazioni di pressione trascurabile rispetto alla variazione temporale delle pressioni nelle due camere il sistema sarà approssimabile con la semplice equazione algebrica:

$$F=-\left(A_p^2\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{C_{eli}A_{eli}+C_{ele}A_{ele}}{x} & \dfrac{C_{eli}A_{eli}}{x}\\ \dfrac{C_{eli}A_{eli}}{(l-x)} & -\dfrac{C_{eli}A_{eli}+C_{ele}A_{ele}}{(l-x)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{1}{l-x}\end{bmatrix}-r\right)\dot{x}$$

In tal modo è si possibile una relazione algebrica che permette di determinare la forza esercitabile dalla molla-smorzatore a fluido, ma il comportamento rimane comunque non lineare ed una linearizzazione è possibile solo per piccole perturbazioni attorno ad una condizione di riferimento.

Si noti che una forza dipendente dalla sola posizione è possibile solo con tenute perfette e senza nessun attrito di contatto, nel qual caso si ha una *molla a fluido*.

$$C_{eli}A_{eli}=C_{ele}A_{ele}=0\qquad \begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{1}{l-x}\end{bmatrix}x$$

$$F=\begin{bmatrix}A_p & -A_p\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}=-\beta\quad A_p\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{l-x}\right)x$$

9.2.4 Attuatore idraulico lineare.

Se nel cilindro precedente, che supponiamo attuato con un liquido, apriamo due luci

di alimentazione che, grazie ad una valvola di distribuzione, possiamo collegare sia ad una elevata pressione di alimentazione, ritenuta costante, p_a e a una pressione di scarico p_s, generalmente la pressione atmosferica, otteniamo un attuatore, leggasi anche motore, idraulico lineare.
Utilizzando i concetti qui presentati il comportamento di tale sistema è modellabile tramite il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari.

Bilancio di massa nelle due camere, dalle (9.15) e (9.12):

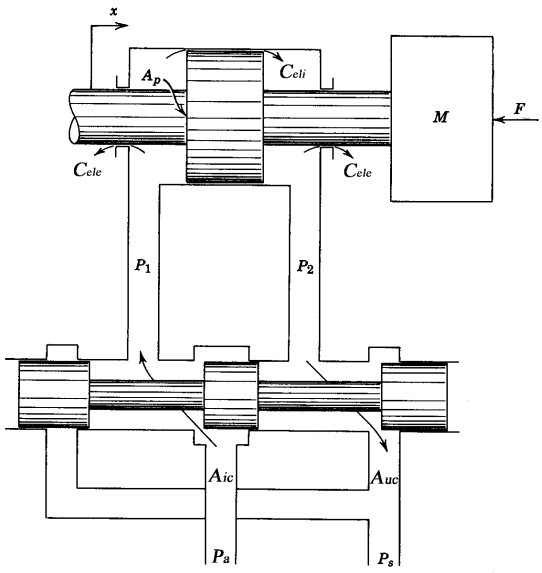
$$\dot{p}_1 = \frac{\beta}{A_p x}\left(-A_p \dot{x} - C_{eli} A_{eli}\left(p_1 - p_2\right) - C_{ele} A_{ele}\left(p_1 - p_e\right)\right) + \frac{\beta C_e A_{ic}}{A_p x}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_a - p_1\right)}$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\beta}{A_p\left(l-x\right)}\left(A_p \dot{x} + C_{eli} A_{eli}\left(p_1 - p_2\right) - C_{ele} A_{ele}\left(p_2 - p_e\right)\right) - \frac{\beta C_e A_{uc}}{A_p\left(l-x\right)}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_2 - p_s\right)}$$

Equazione di moto:

$$M\ddot{x} = p_1 A_p - p_2 A_p + F - r\dot{x}$$

essendo F_e una generica forza esterna applicata alla stelo.



Anch'esse sono sintetizzabili in forma matriciale nella seguente:

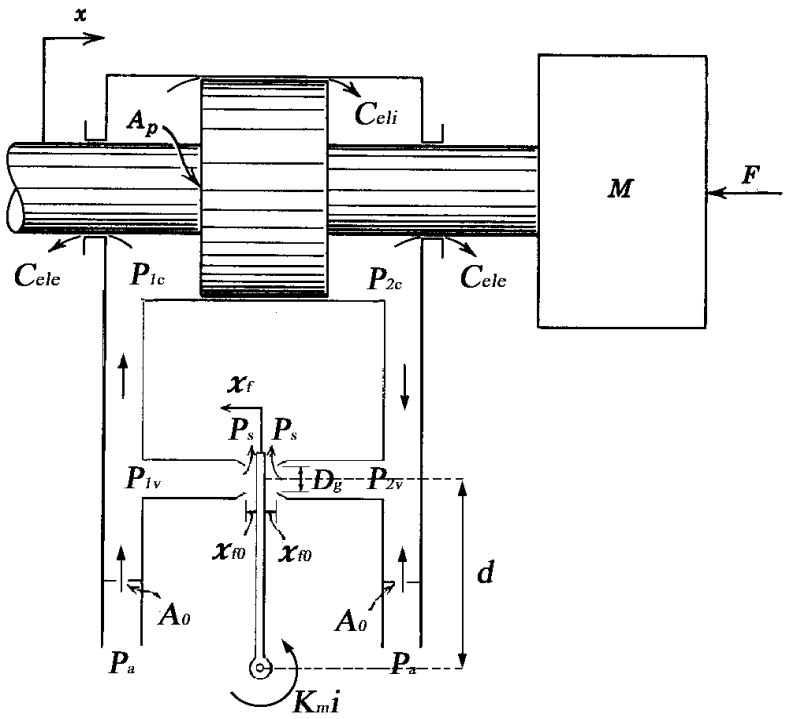
$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{M} & \frac{A_p}{M} & -\frac{A_p}{M} \\ 0 & -\beta\frac{1}{x} & -\frac{C_{eli}A_{eli}+C_{ele}A_{ele}}{A_p x} & \frac{C_{eli}A_{eli}}{A_p x} \\ 0 & \beta\frac{1}{(l-x)} & \frac{C_{eli}A_{eli}}{A_p(l-x)} & -\frac{C_{ele}A_{ele}}{A_p(l-x)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\beta C_e}{A_p x}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_a - p_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta C_e}{A_p(l-x)}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{ic} \\ A_{uc} \end{Bmatrix} +$$

$$+\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{C_{ele}A_{ele}}{A_p x} \\ \frac{C_{ele}A_{ele}}{A_p(l-x)} \end{bmatrix} p_e + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

Dalla quale si vede che si può controllare il movimento del pistone e la forza generato controllando la portate di fluido nelle camere del cilindro tramite le aperture A_{ic}, A_{uc}.

9.2.5 Valvola a doppio getto controllata da un motore elettrico in continua e accoppiata ad un attuatore lineare.



Il completamento dell'esempio precedente richiederebbe la modellazione della valvola distributrice e del suo sistema di attuazione. Se si astrae dal sistema di attuazione del pistone della valvola distributrice, generalmente di tipo elettrico o misto elettroidraulico, la relativa modellazione non è dissimile da quella del cilindro attuatore, ragion per cui non dovrebbe essere difficile completare l'esempio precedente fino a contenere tutti i suoi componenti. Una corretta formulazione necessita però di un approfondimento, non tanto concettuale ma preminentemente associato ad alcuni dettagli che richiederebbe un'estensione che mal si concilia con le finalità esemplificative della nostra presentazione. Si preferisce pertanto completare l'esempio facendo riferimento ad una valvola di controllo del flusso a flappeggio, quale quella schematizzata in figura.

Bilancio di massa nelle camere della valvola:

$$\dot{p}_{1v} = \frac{\beta C_{eo} A_o}{V}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_a - p_{1v})} - \frac{\beta C_{eic} A_{ic}}{V}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{1v} - p_{ic})} - \frac{\beta C_{eg}\pi D_g (x_{0f} - x_f)}{V}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{1v} - p_s)}$$

$$\dot{p}_{2v} = \frac{\beta C_{eo} A_o}{V}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_a - p_{2v})} + \frac{\beta C_{euc} A_{uc}}{V}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{uc} - p_{2v})} - \frac{\beta C_{eg}\pi D_g (x_{0f} + x_f)}{V}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{2v} - p_s)}$$

Bilancio di massa nelle camere del cilindro:

$$\dot{p}_{1c} = \frac{\beta}{A_1 x}\left(-A_1\dot{x} - C_{eli}A_{eli}(p_{1c} - p_{2c}) - C_{ele1}A_{ele1}(p_{1c} - p_e)\right) + \frac{\beta C_{eic} A_{ic}}{A_1 x}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{1v} - p_{1c})}$$

$$\dot{p}_{2c} = \frac{\beta}{A_2 (l-x)}\left(A_2\dot{x} + C_{eli}A_{eli}(p_{1c} - p_{2c}) - C_{ele2}A_{ele2}(p_{2c} - p_e)\right) - \frac{\beta C_{euc} A_{uc}}{A_2 (l-x)}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_{2v})}$$

Forza esercitata dal getto sul flap della valvola:

$$F_1 - F_2 = (p_{1v} - p_{2v})\frac{\pi D_g^2}{4} + \alpha 8\pi C_{eg}\left((x_{0f} - x_f)^2 (p_{1v} - p_s) + (x_{0f} + x_f)^2 (p_{2v} - p_s)\right)$$

α è un coefficiente correttivo della spinta dinamica teorica del getto sul flap che, a causa delle piccole dimensioni dello stesso, solitamente non raggiunge il valore teorico ottenibile dal bilancio della quantità di moto.
Equazione di moto del flap:

$$\frac{J}{d^2}\ddot{x}_f = -\frac{c}{d^2}\dot{x}_f - \frac{k}{d^2}\dot{x}_f - (F_1 - F_2) + \frac{K_m}{d} i$$

Equazione di moto del pistone attuatore:

$$M\ddot{x} = -r\dot{x} + p_{1c}A_1 - p_{2c}A_2 + F_e$$

Equazione del motore di coppia, assunto a corrente continua, comandato in tensione che controlla il movimento del flap della valvola:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -K_m\dot{\theta} + V_c$$