

L'equazione generale del moto vario monodimensionale si scrive, con ovvio significato dei simboli [Citrini e Nosedà, 1987]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) + \frac{p}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0 \quad (1)$$

Una seconda relazione differenziale è data dall'equazione di continuità per le correnti:

$$V \cdot \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial x} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \left( \rho \cdot \frac{dA}{dp} + A \cdot \frac{d\rho}{dp} \right) \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Vi sono poi l'equazione di stato del fluido (ove  $\varepsilon$  è il modulo di comprimibilità cubica del fluido,  $2 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup> a 10 °C per l'acqua):

$$dp/d\rho = \varepsilon/\rho \quad (3)$$

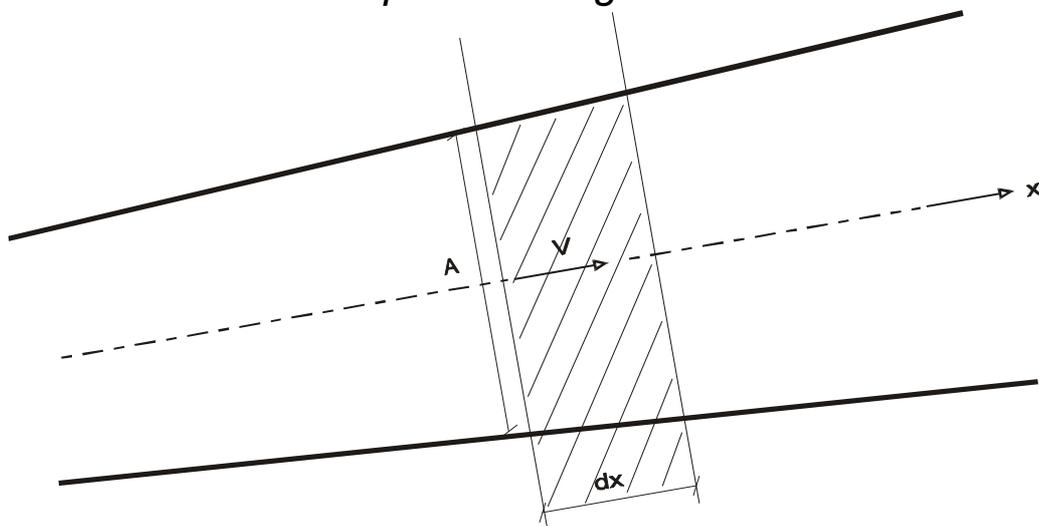
e l'equazione del legame sforzo-deformazione per la tubazione:

$$A = A[p(x,t)] \quad (4)$$

che per tubazione circolare con diametro  $D$ , di materiale elastico per il quale valga la legge di Hooke  $\sigma = E \cdot \delta D/D$  e che sia poco deformabile (modulo elastico  $E$  molto grande), di spessore  $e$  piccolo rispetto a  $D$  ( $e < D/30$ ) e quindi con sforzo  $\sigma$  legato a  $p$  secondo l'espressione di Mariotte  $\sigma = p \cdot D/(2 \cdot e)$ , e libera di deformarsi longitudinalmente per effetto Poisson, porta a:

$$dA/dp = dA/dD \cdot dD/dp = (A \cdot D)/(E \cdot e) \quad (4')$$

**Figura 1** – Corrente in pressione gradualmente variata.



Tenendo conto, oltre che delle relazioni (3) e (4'), anche delle ulteriori ipotesi che:

- il termine cinetico  $V^2/(2 \cdot g)$  del trinomio di Bernoulli sia trascurabile rispetto al carico piezometrico  $h = z + p/\gamma$ ,

- siano trascurabili le derivate parziali  $\partial\rho/\partial x$ ,  $\partial\gamma/\partial x$  e  $\partial A/\partial x$ ,

si dimostra che l'equazione del moto (1) e l'equazione di continuità (2) si trasformano nelle seguenti equazioni, pure esse alle derivate parziali:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + J = 0 \quad (1')$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2')$$

in cui  $c$  è la celerità di propagazione delle perturbazioni, pari a:

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon/\rho}{1 + \frac{\varepsilon \cdot D}{e \cdot E}}} \quad (5)$$

Nel caso più generale di tubi elastici, di spessore anche non piccolo rispetto al diametro e posti in opera con condizioni di rinterro e di ancoraggio tali da limitare le deformazioni longitudinali, la celerità di propagazione delle perturbazioni  $c$  dovrebbe calcolarsi invece come:

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon/\rho}{1 + \lambda \cdot \frac{\varepsilon \cdot D}{e \cdot E}}} \quad (5)$$

essendo ad esempio, detto  $\mu$  il coefficiente di Poisson:

$\lambda = 5/4 - \mu$  nel caso di tubazione ancorata soltanto all'estremo di monte, con appoggi liberi che consentano deformazioni longitudinali;

$\lambda = 1 - \mu^2$  nel caso di deformazioni longitudinali completamente impedita da ancoraggi continui o dal tipo di rinterro della tubazione;

$\lambda = 1$  nel caso di tubazione con ancoraggi continui, ma con giunti che consentano deformazioni longitudinali;

Se le perdite di carico sono trascurabili ( $J \cong 0$ ) la (1') e la (2'), attraverso un'ulteriore opportuna derivazione rispetto al tempo  $t$  piuttosto che rispetto allo spazio  $x$ , possono essere trasformate nell'una o nell'altra delle seguenti equazioni, la cui forma matematica è quella tipica delle equazioni d'onda di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

i cui integrali generali sono esprimibili come:

$$\Delta h = h - h_0 = F(x - c \cdot t) + f(x + c \cdot t)$$

$$\Delta V \cdot c/g = (V_0 - V) \cdot c/g = F(x - c \cdot t) - f(x + c \cdot t)$$

ove le funzioni  $F$  ed  $f$  sono da definire per ogni caso specifico in relazione alle condizioni al contorno e rappresentano rispettivamente la propagazione della perturbazione verso monte (la  $F$ ) e verso valle (la  $f$ ) [Joukowsky, 1898]. Lo stesso Autore mostrò che nella fase di colpo diretto, cioè prima che si manifestino le onde riflesse, si ha:

$$f(x + c \cdot t) = 0$$

$$\Delta h = F(x - c \cdot t) = \Delta V \cdot c/g$$

Più generale, dopo la fase di colpo diretto si ha la sovrapposizione fra onde incidenti e onde riflesse, cioè anche  $f \neq 0$ . La soluzione analitica di tale problema nel caso di  $J \cong 0$  e  $c \cong$  costante consiste nelle cosiddette "equazioni concatenate di Allievi" [Allievi, 1902] [Allievi, 1913] [Citrini e Nosedà, 1987].

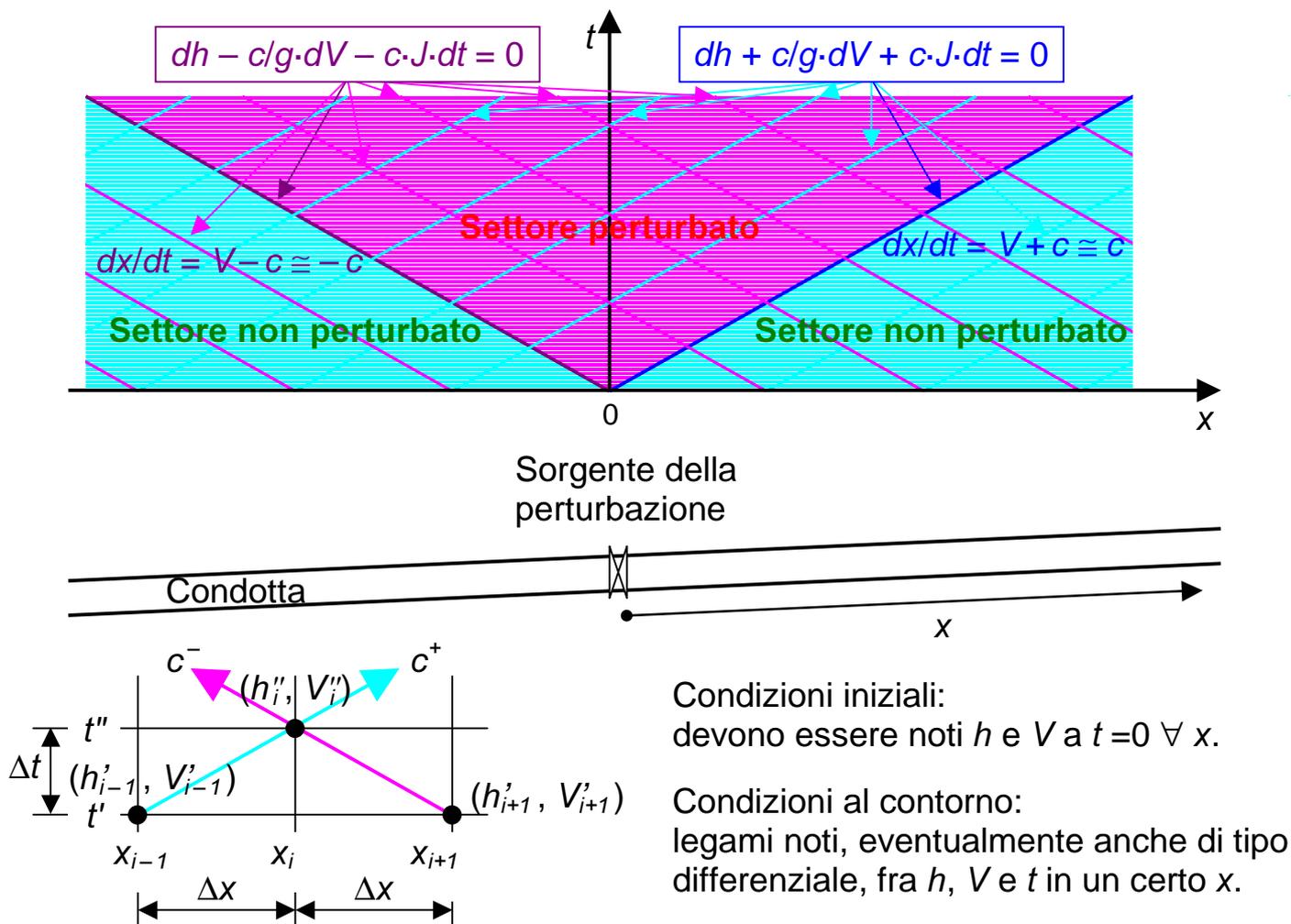
Qualora invece  $J \neq 0$  e/o  $c$  non costante l'integrazione del sistema delle equazioni (1') e (2') comporta inevitabilmente l'applicazione di metodi numerici alle differenze finite, con risultati che possono essere anche sensibilmente diversi da quelli forniti dalle equazioni concatenate di Allievi.

Applicando la teoria delle “linee caratteristiche”, le equazioni del moto e di continuità (1') e (2') alle derivate parziali si modificano nelle seguenti due equazioni alle derivate totali (dette “di compatibilità”), particolarmente adatte sia alla risoluzione numerica che alla comprensione del fenomeno fisico [Evangelisti, 1965]:

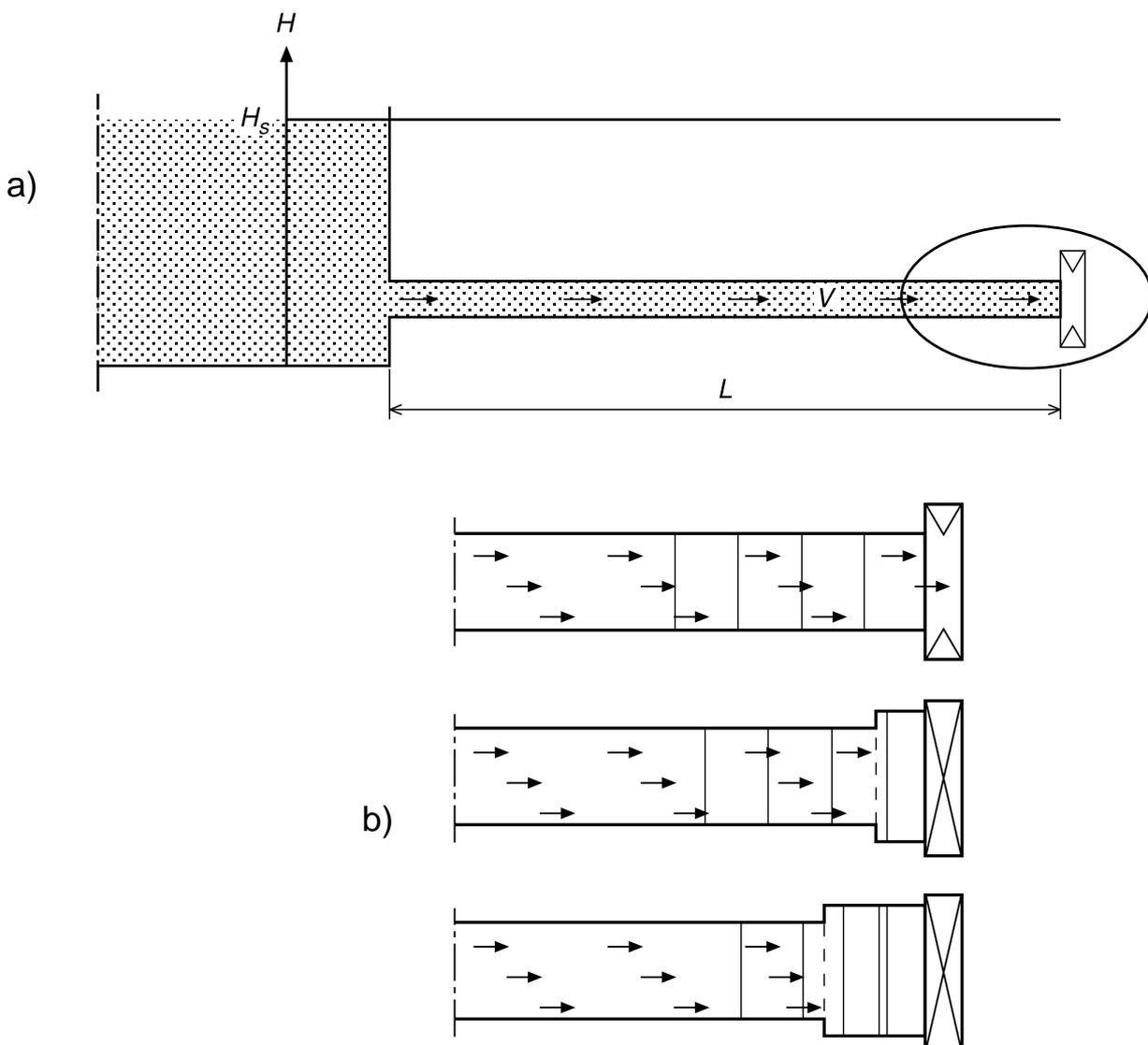
$$dh + \frac{c}{g} \cdot dV + c \cdot J \cdot dt = 0 \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = c \quad (7)$$

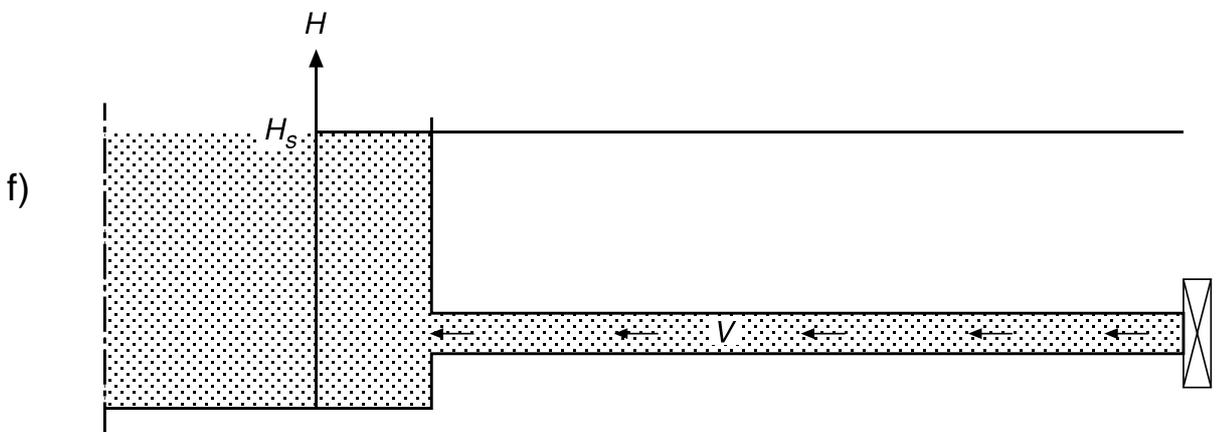
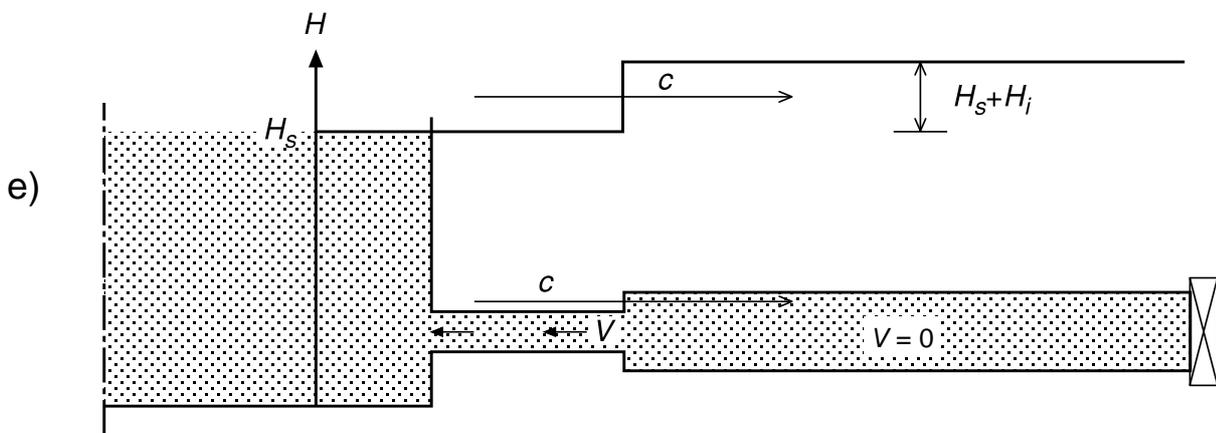
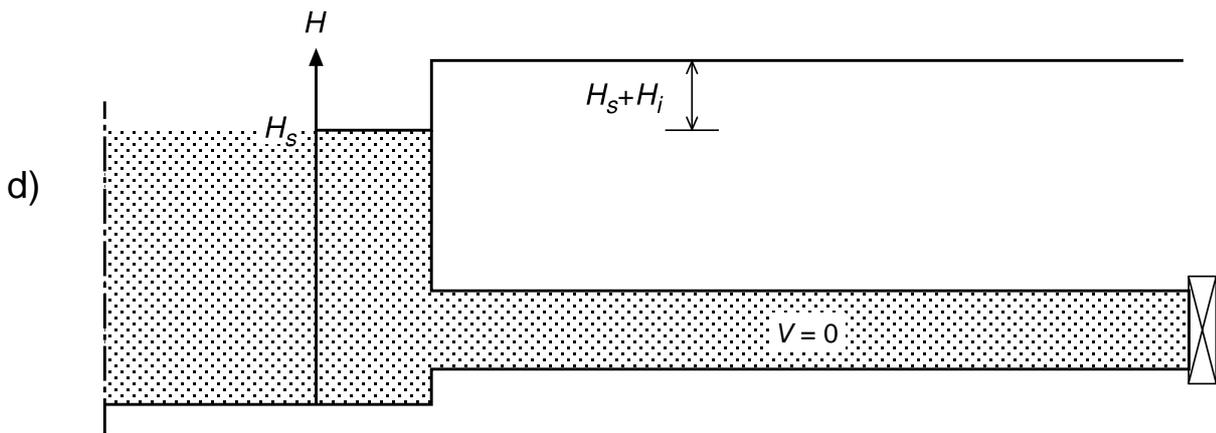
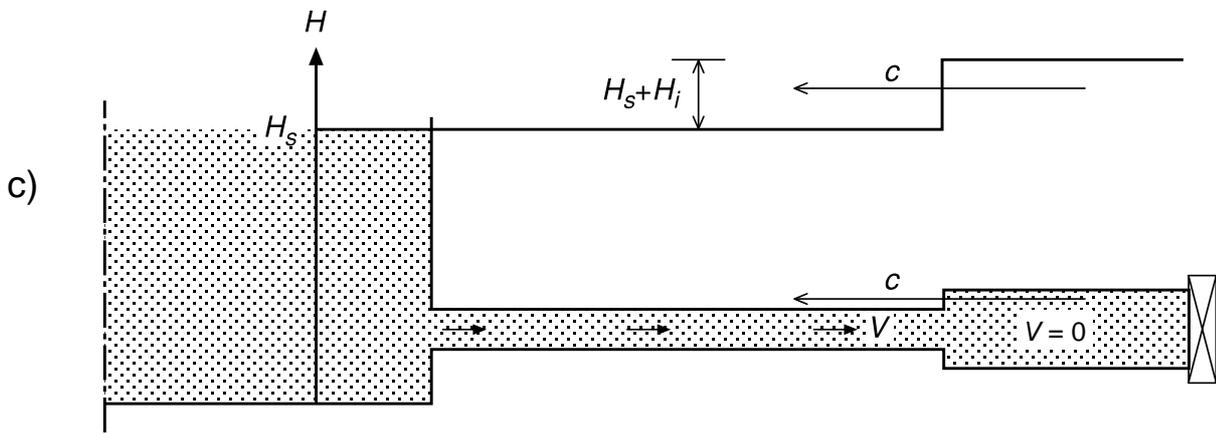
$$dh - \frac{c}{g} \cdot dV - c \cdot J \cdot dt = 0 \quad \text{per} \quad \frac{dx}{dt} = -c$$

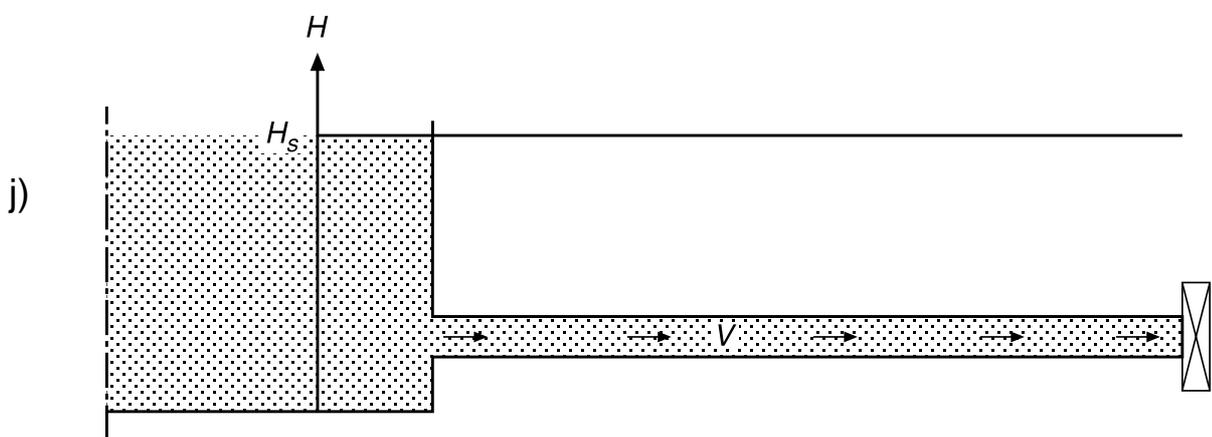
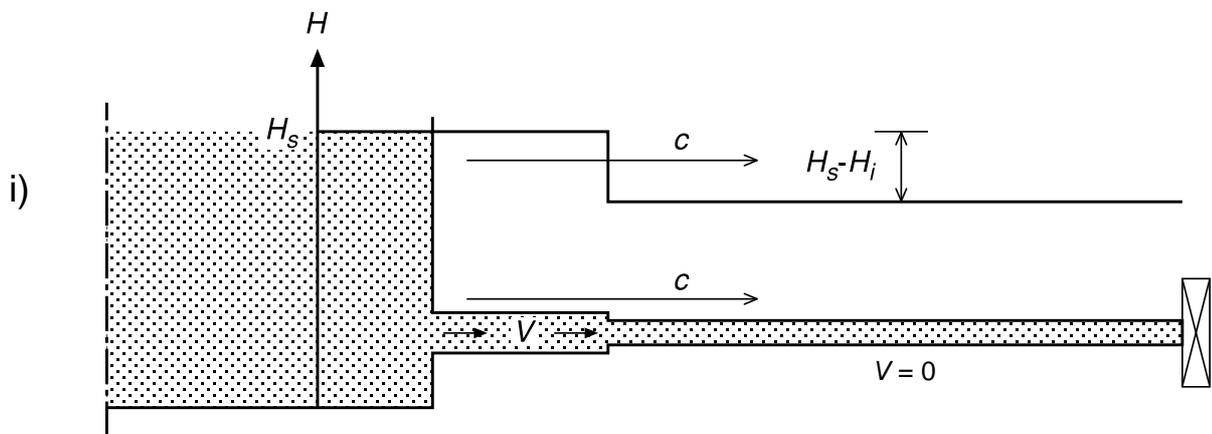
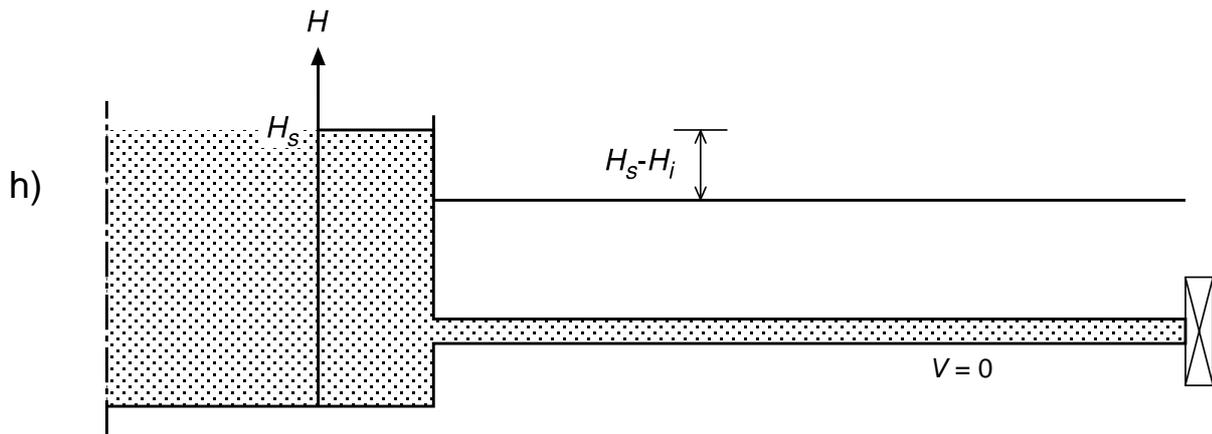
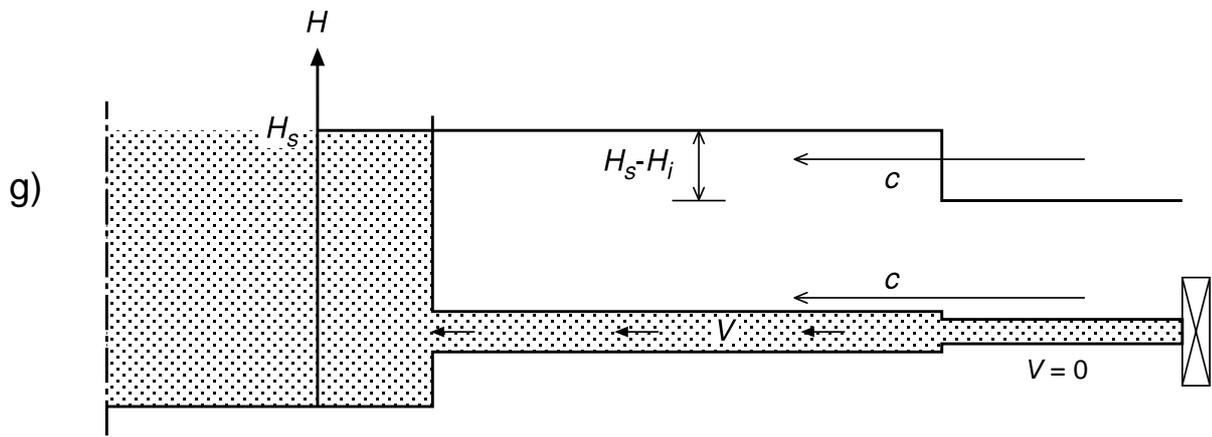
Esse esprimono il legame tra le variabili dipendenti  $h(x,t)$  e  $V(x,t)$  lungo le due famiglie di linee caratteristiche reali e distinte  $dx/dt = c$  e  $dx/dt = -c$  che sul piano  $(x,t)$ , detto anche “piano orario” o “piano cinematico”, caratterizzano, insieme alle condizioni iniziali e a quelle al contorno, la propagazione delle perturbazioni, rispettivamente verso valle con celerità  $c$  (ovvero “ $c^+$ ”) e verso monte con celerità  $-c$  (“ $c^-$ ”).



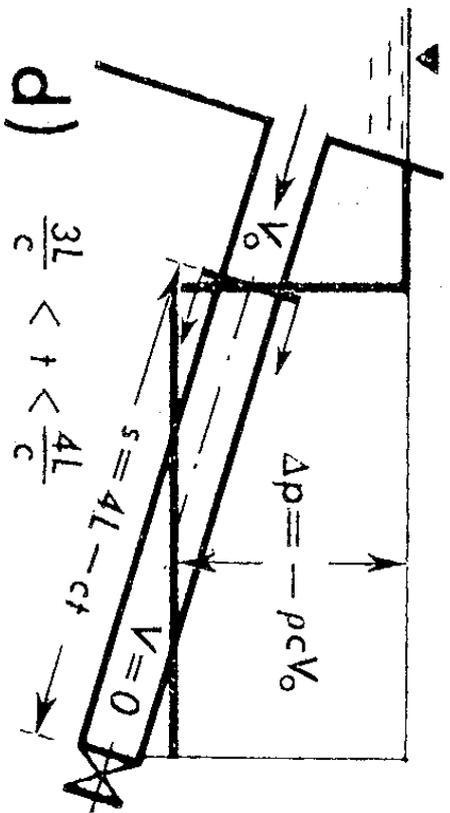
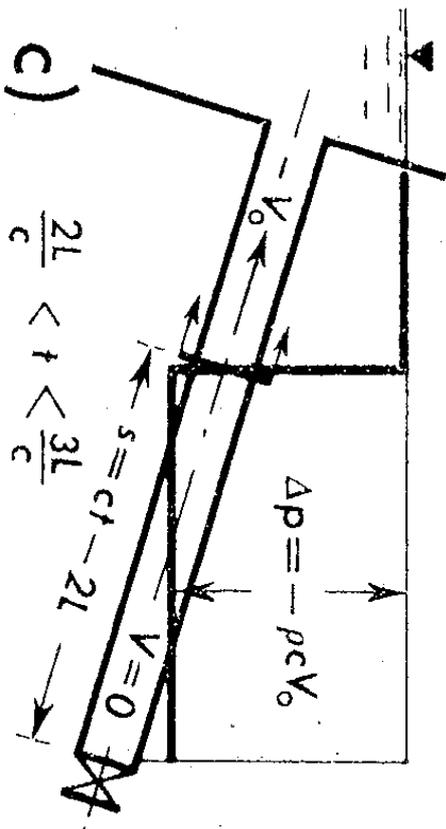
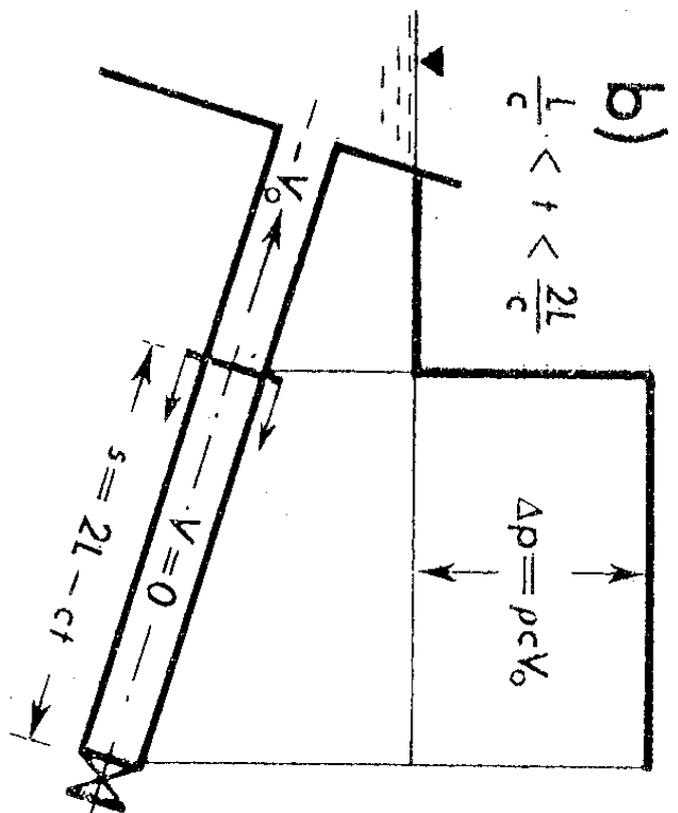
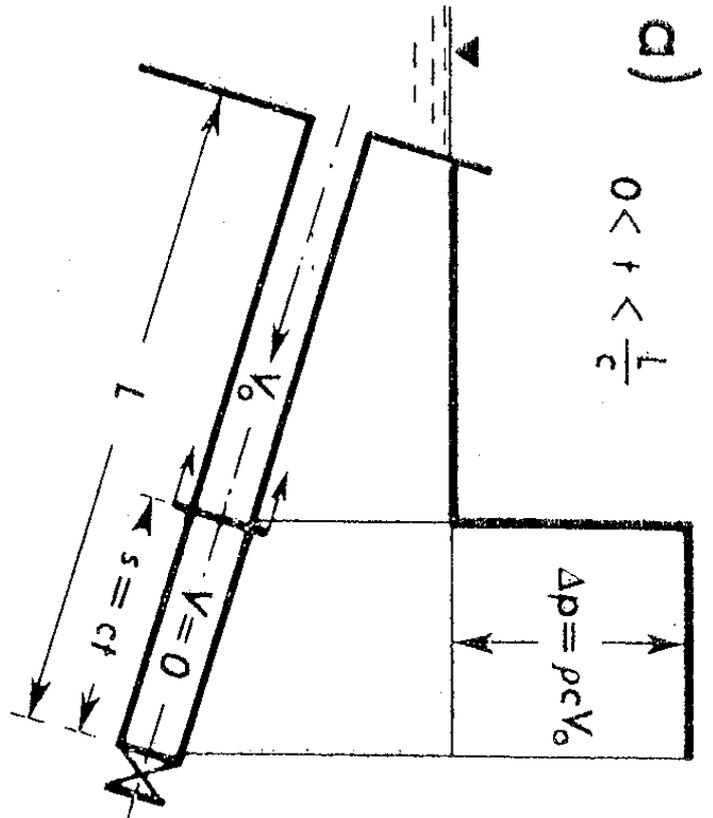
- Figura 8-1** – Colpo d'ariete in un tubo, con perdite di carico trascurabili, posto a valle di un serbatoio a seguito di chiusura istantanea della valvola:
- a) situazione a regime,
  - b) progressivo arresto della colonna liquida (colpo diretto),
  - c) propagazione verso monte della perturbazione di colpo diretto,
  - d) riflessione al serbatoio della perturbazione di colpo diretto,
  - e) propagazione verso valle della perturbazione di colpo diretto riflessa dal serbatoio,
  - f) riflessione della perturbazione alla valvola di chiusura (contraccolpo),
  - g) propagazione verso monte della perturbazione di contraccolpo,
  - h) riflessione al serbatoio della perturbazione di contraccolpo,
  - i) propagazione verso valle della perturbazione di contraccolpo riflessa dal serbatoio,
  - j) riflessione della perturbazione alla valvola di chiusura e inizio del secondo ciclo della propagazione oscillatoria.



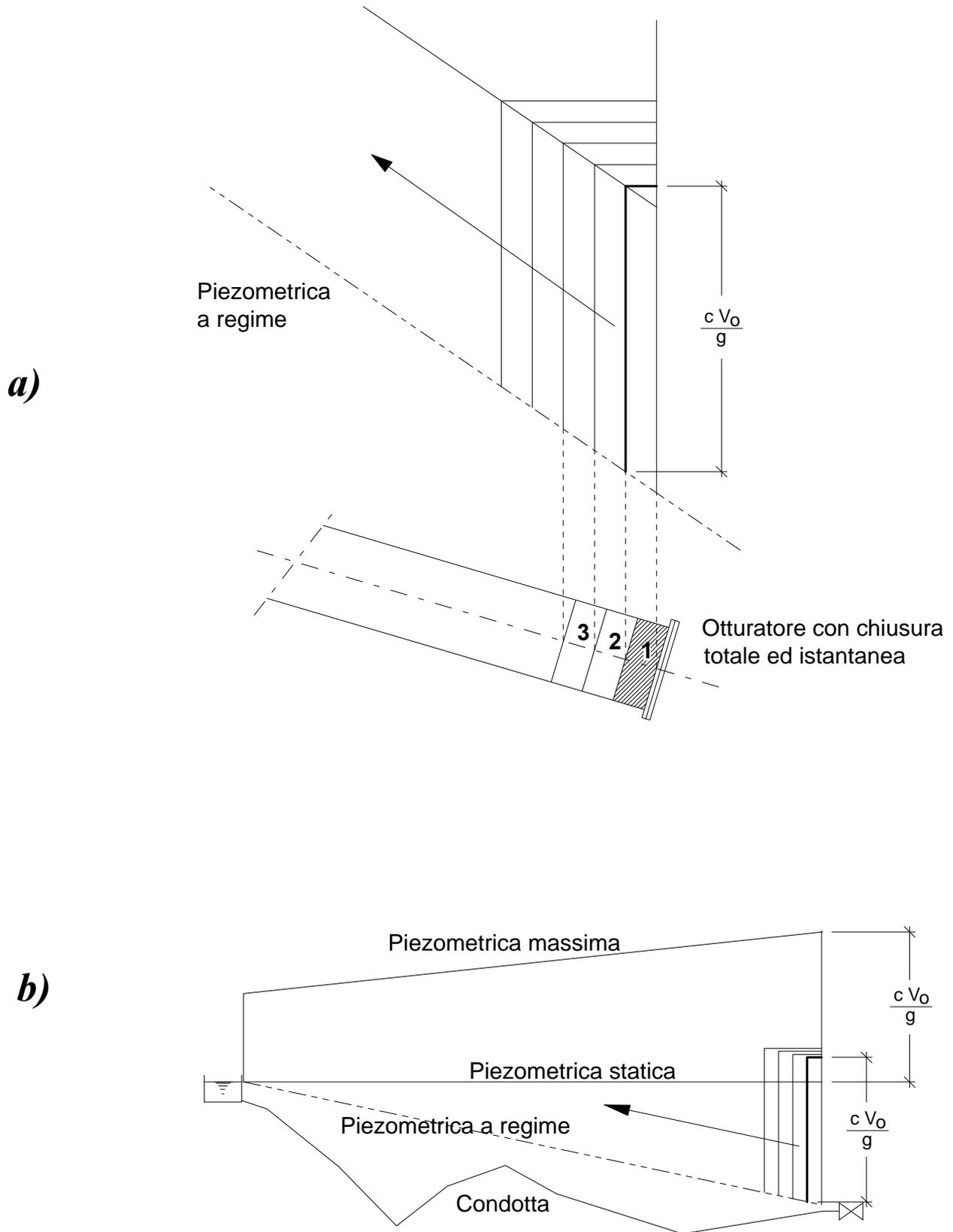




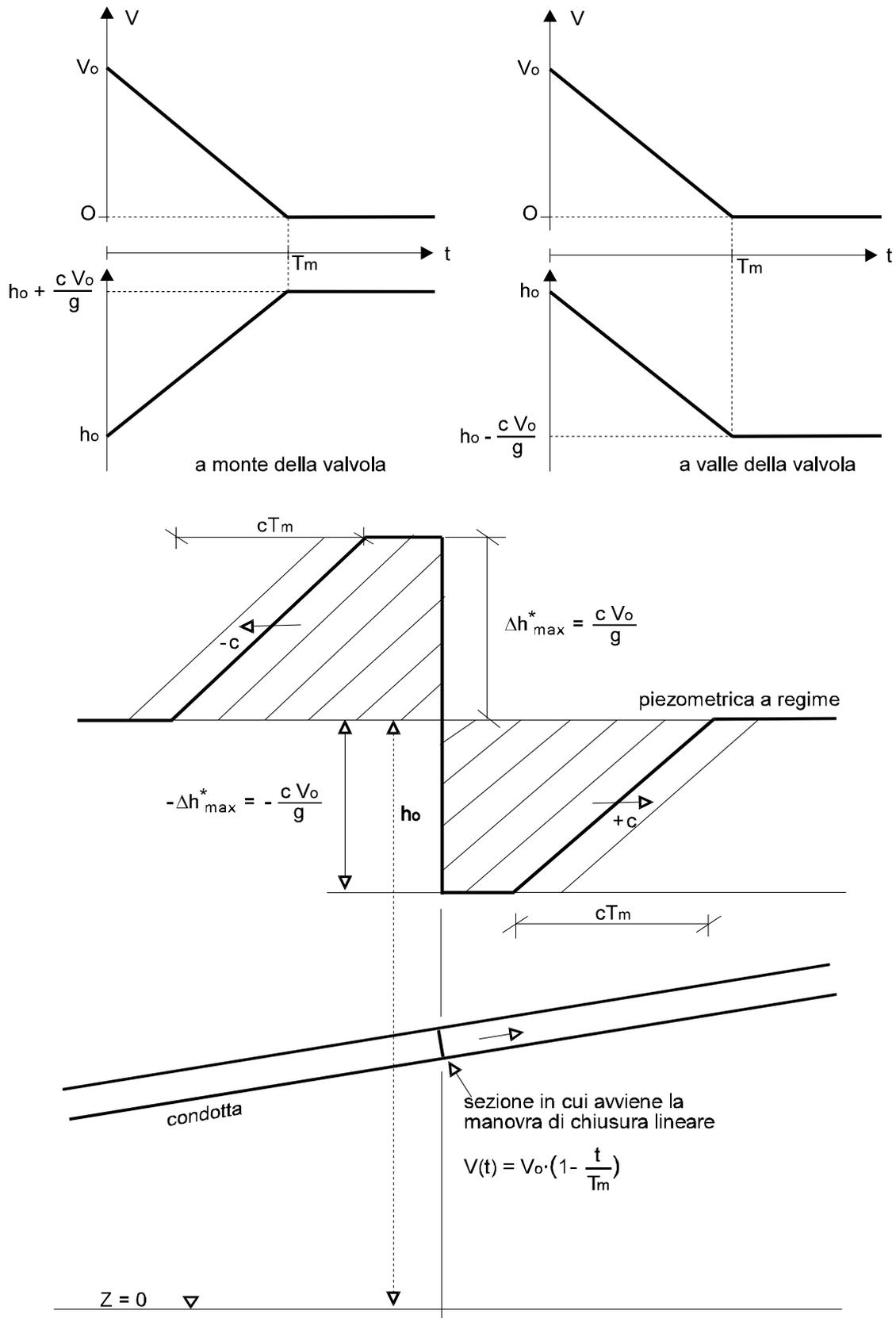




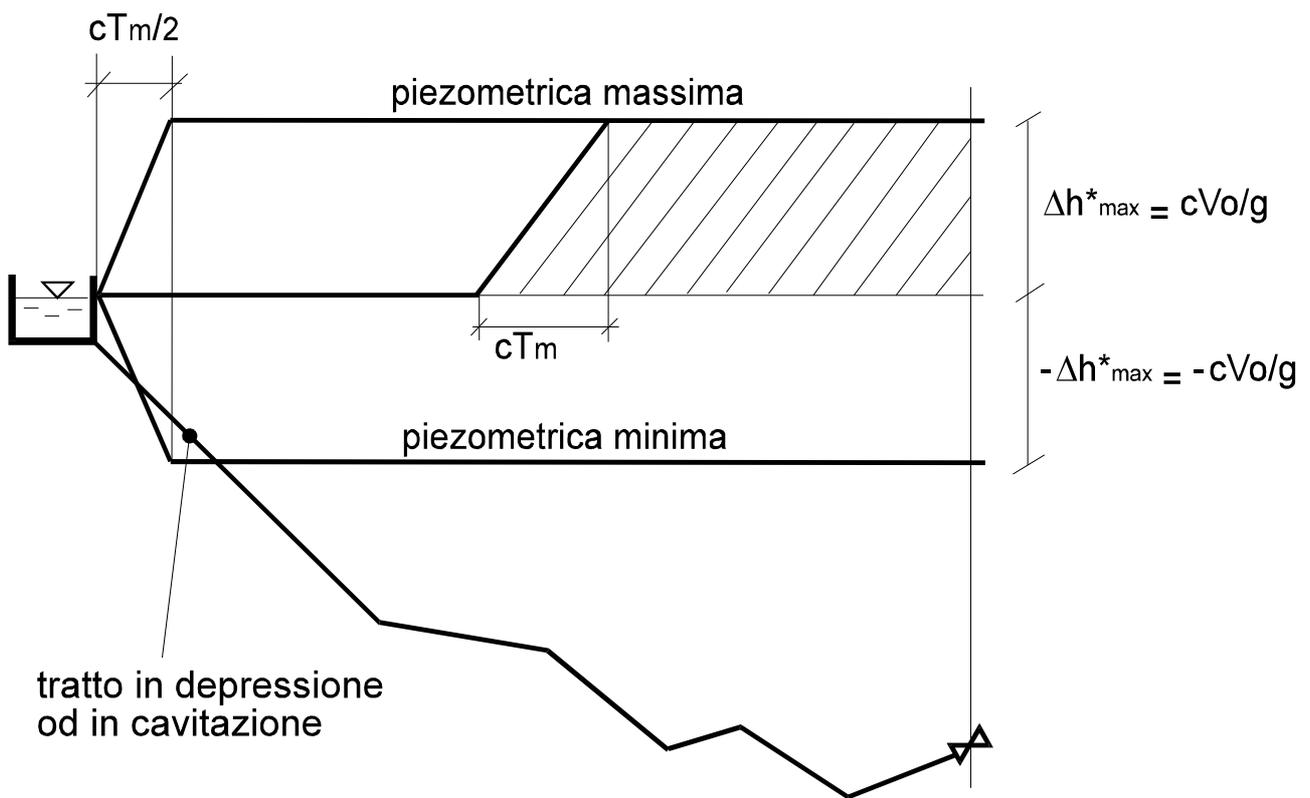
**Figura 3** – Colpo d'ariete per chiusura totale ed istantanea in una condotta a gravità con perdite di carico non trascurabili.



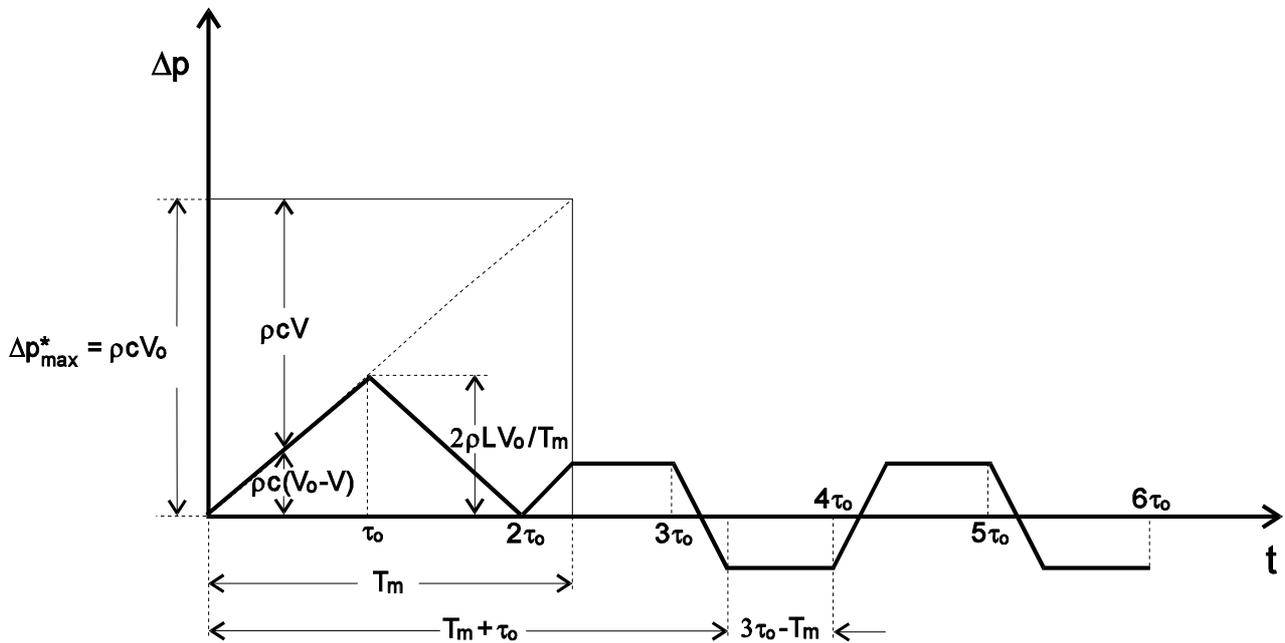
**Figura 2** – Propagazione, a monte ed a valle della sezione di manovra in una condotta indefinitamente lunga e con perdite di carico trascurabili ( $J = 0$ ), della perturbazione generata da una completa chiusura, quest'ultima effettuata secondo un andamento linearmente decrescente della velocità  $V(t)$  da  $V = V_0$  a  $V = 0$ .



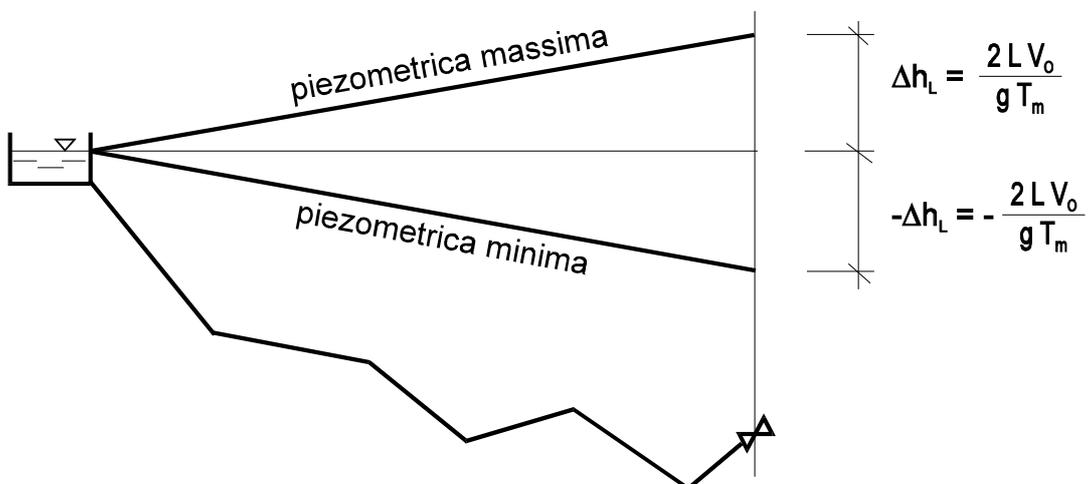
**Figura 8** – Propagazione ed inviluppo, a monte della sezione di manovra, della sovrappressione generata da una completa chiusura di tipo “rapido”, cioè di durata  $T_m \leq 2 L/c$ , nel caso di cadente  $J$  trascurabile.



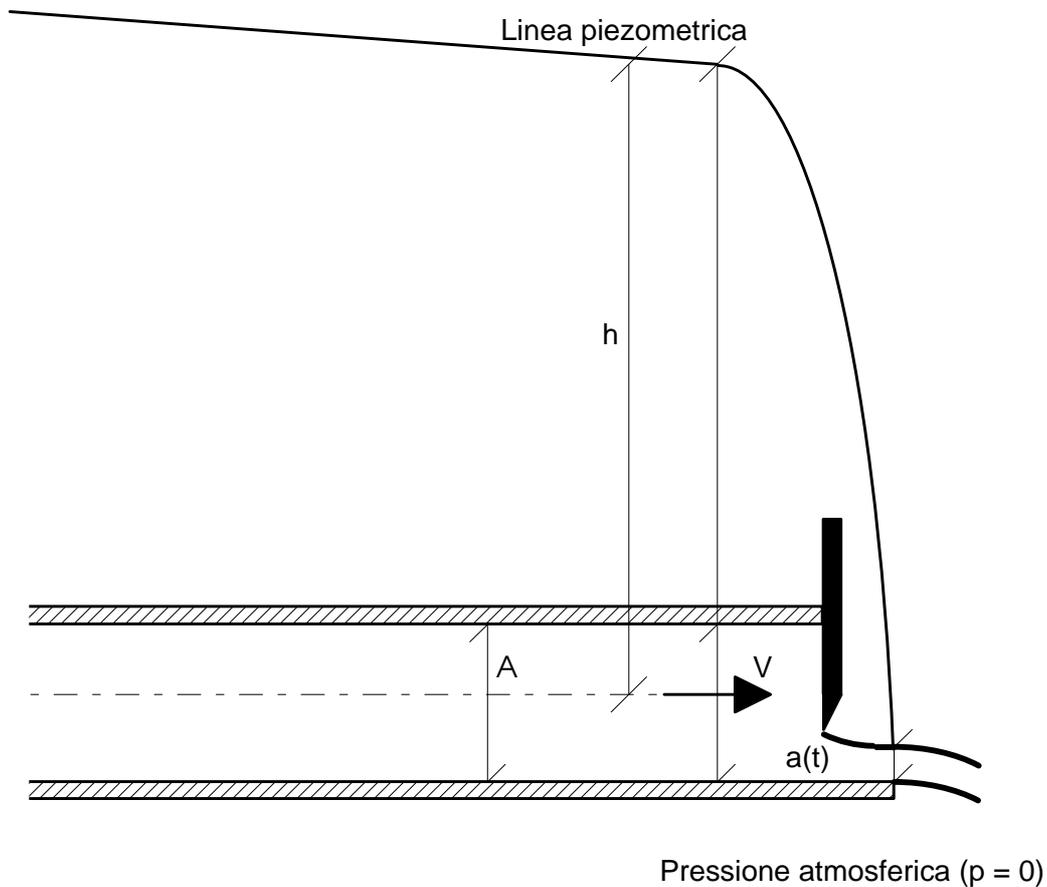
**Figura 9** – Andamento nel tempo, alla sezione di manovra, della sovrappressione generata da una completa chiusura di tipo “lento”, cioè di durata  $T_m > 2 L/c$ , nel caso di cadente  $J$  trascurabile.



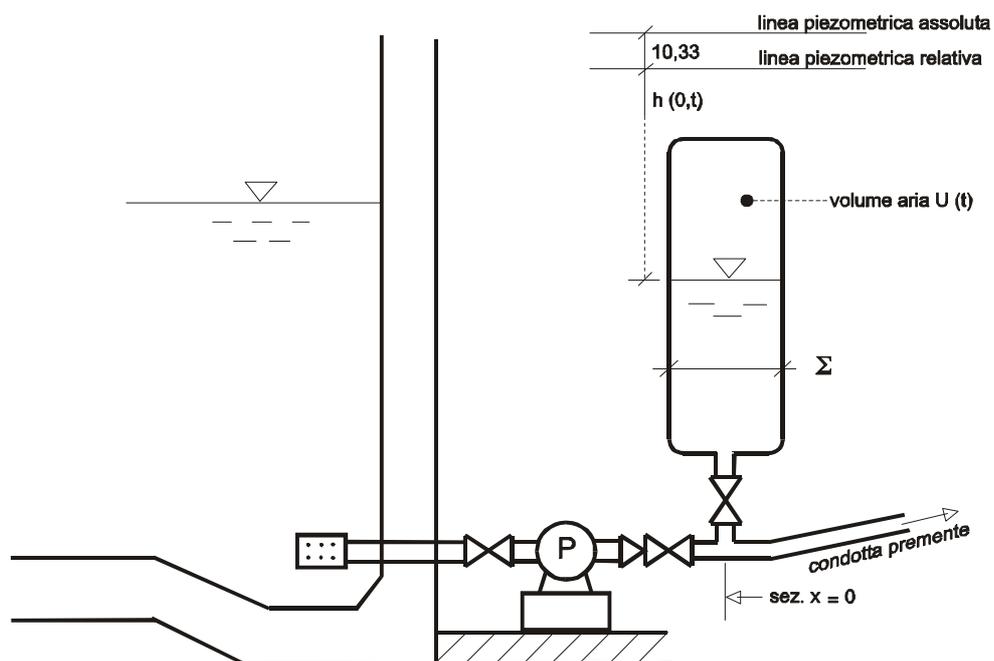
**Figura 10** – Involuppo, a monte della sezione di manovra, della sovrappressione generata da una completa chiusura di tipo “lento”, cioè di durata  $T_m > 2 L/c$ , nel caso di cadente  $J$  trascurabile.



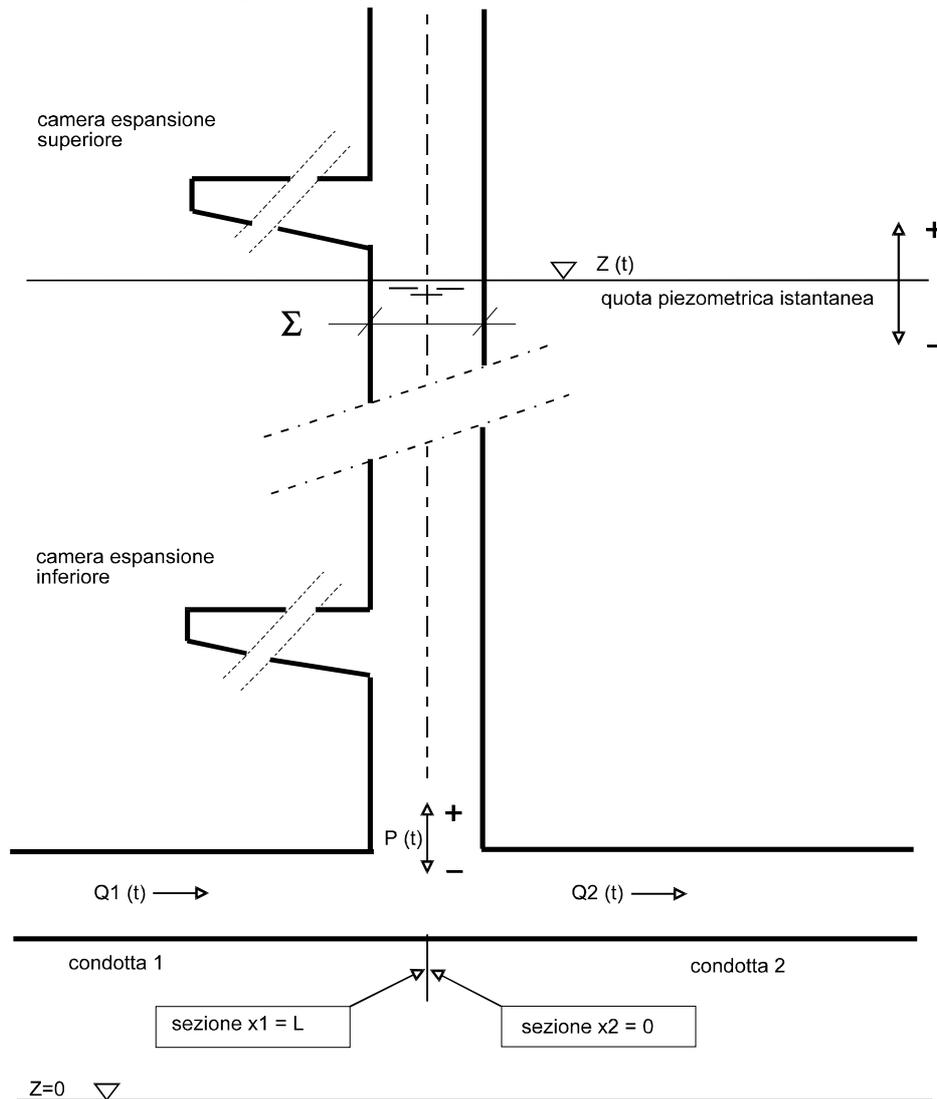
**Figura 4** – Esempio di valvola di regolazione posta nella sezione terminale a valle di una condotta in pressione con sbocco in atmosfera.



**Figura 6** – Schema di cassa d'aria per la protezione di una condotta premente dai colpi d'ariete.



**Figura 5** – Schema di pozzo piezometrico interposto tra due condotte.



Per un pozzo piezometrico interposto tra due condotte 1 e 2 (Figura 5), dette  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  le portate rispettivamente nella sezione di valle della condotta 1 (di ascissa  $x_1 = L_1$ ) e nella sezione di monte della condotta 2 (di ascissa  $x_2 = 0$ ), detta  $p(t)$  la portata entrante od uscente dal pozzo (positiva se entrante) e  $z(t)$  la quota del pelo libero in esso, la condizione al contorno di valle per la condotta 1 e di monte per la condotta 2 è espressa dal sistema:

- continuità nel nodo

$$p(t) = q_1(t) - q_2(t) = A_1 \cdot V_1(A_1, t) - A_2 \cdot V_2(0, t) \quad (16)$$

- continuità nel pozzo ( $\Sigma$  è l'area del pozzo, generalmente variabile con la quota  $z$ )

$$\Sigma(z) \cdot \frac{dz}{dt} = p(t) \quad ; \quad (17)$$

- congruenza dei carichi piezometrici nel nodo, che, qualora la condotta di allacciamento del pozzo non presenti dissipazioni concentrate (pozzo senza strozzatura), si scrive

$$h_1(L_1, t) = z(t) \quad (18)$$

$$h_2(0, t) = z(t) \quad , \quad (19)$$

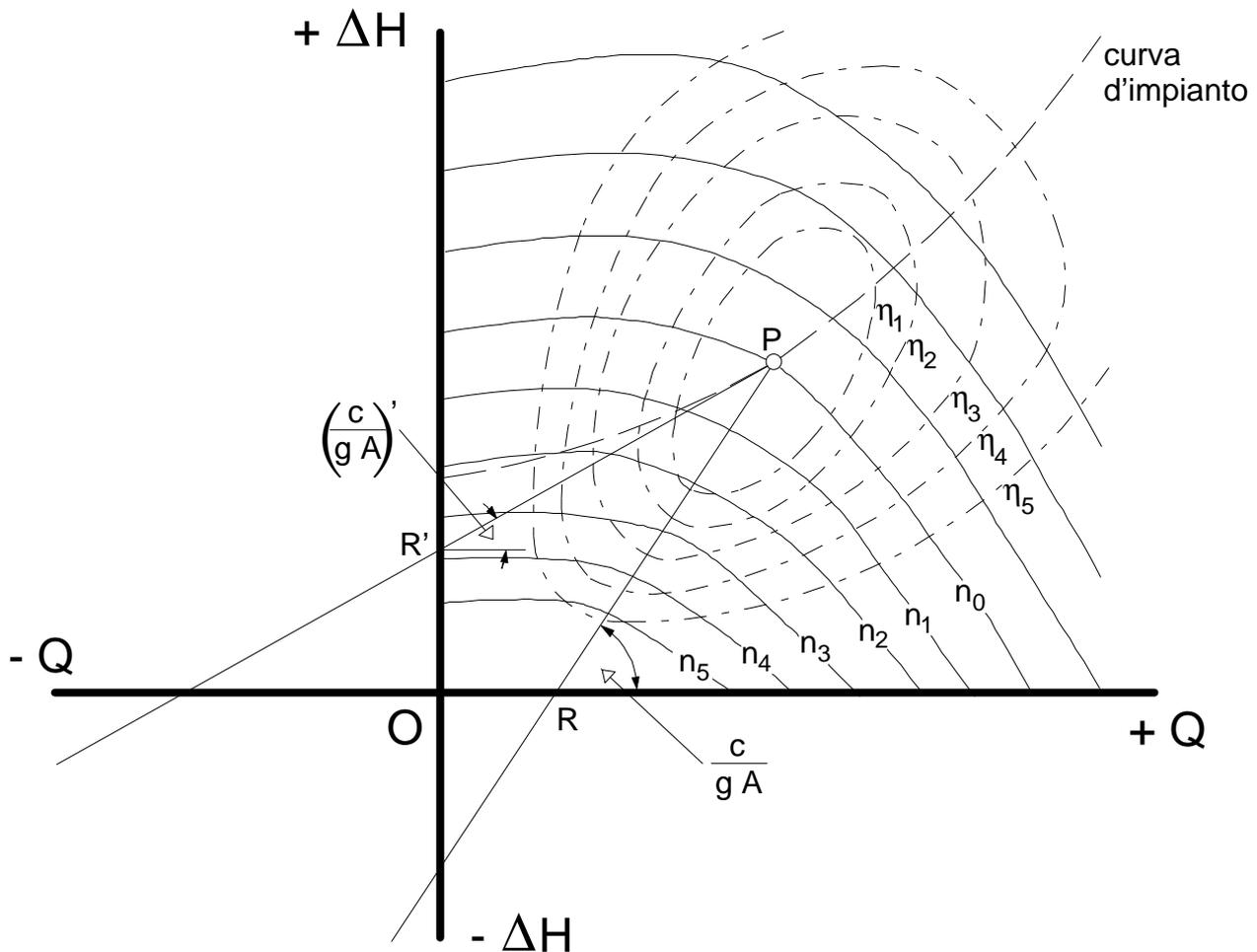
ovvero:

$$h_1(L_1, t) = z(t) + \beta \cdot p(t) \cdot |p(t)| \quad (18')$$

$$h_2(0, t) = z(t) + \beta \cdot p(t) \cdot |p(t)| \quad (19')$$

qualora invece alla base del pozzo sia presente una strozzatura che determini una perdita concentrata  $\beta \cdot p(t)^2$ , essendo il coefficiente  $\beta$  funzione dell'entità della strozzatura stessa e della sua configurazione geometrica.

**Figura 7** – Esempio di curve caratteristiche e di curve di ugual rendimento di una pompa centrifuga al variare del numero di giri  $n$ .



Nel corso del transitorio conseguente ad una brusca interruzione (voluta o accidentale) dell'alimentazione di energia, la pompa rallenta progressivamente con un andamento che può essere calcolato integrando l'equazione che lega la variazione dell'energia cinetica delle masse rotanti del gruppo motore-pompa alla potenza assorbita dalla corrente nell'istante generico:

$$-\frac{d}{dt} \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot \Delta H}{\eta} \quad (22)$$

in cui:

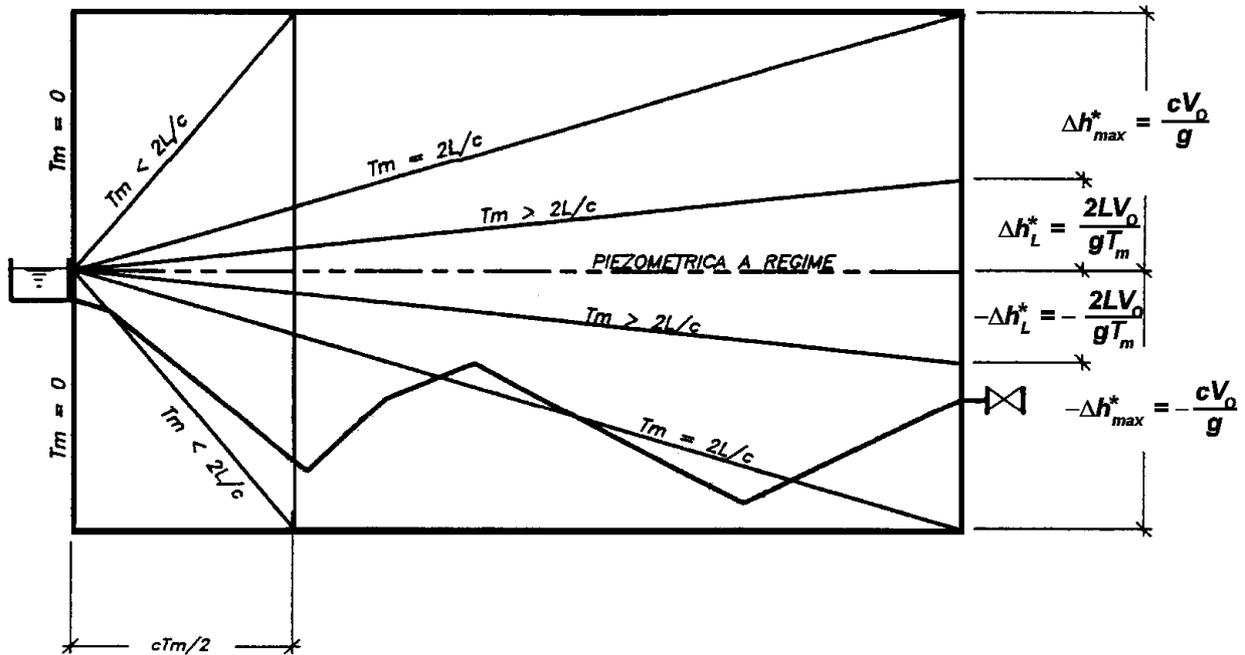
$I$  è il momento d'inerzia delle masse rotanti, pari a:

$$I = \frac{G \cdot D^2}{4 \cdot g} \quad ,$$

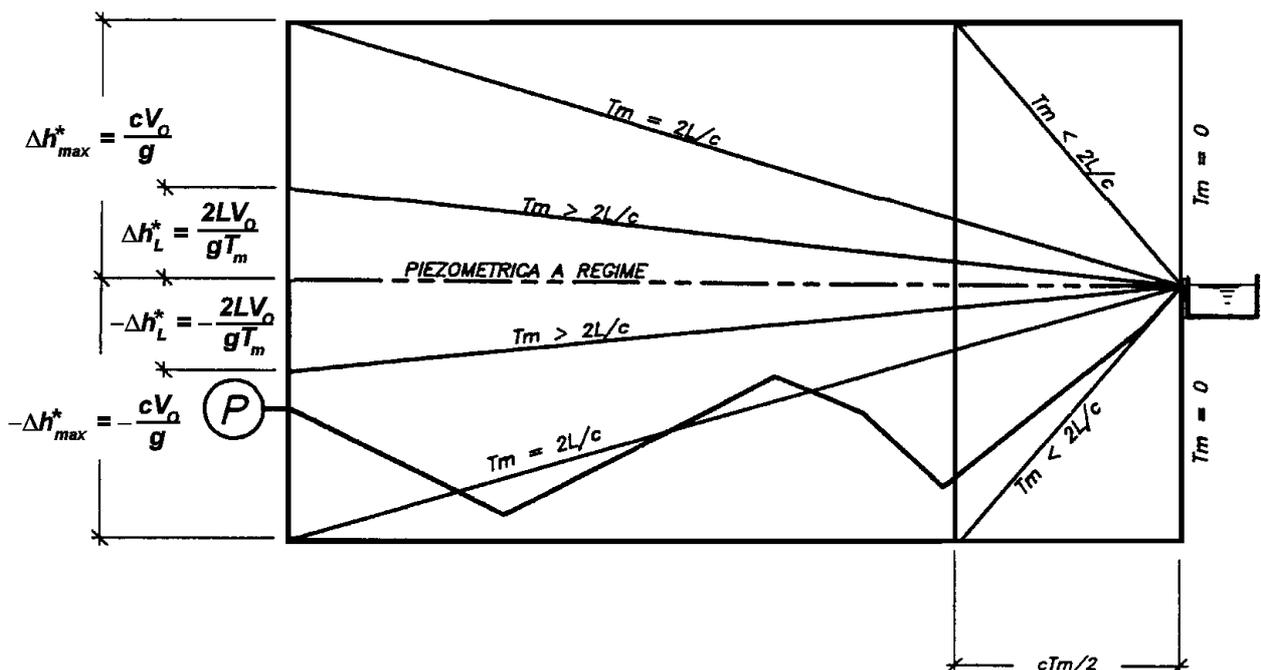
essendo  $G$  il peso dei corpi in rotazione e  $D$  il diametro d'inerzia degli stessi;

$\omega$  è la velocità angolare, pari a  $\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}$ , essendo  $n$  il numero di giri al minuto;

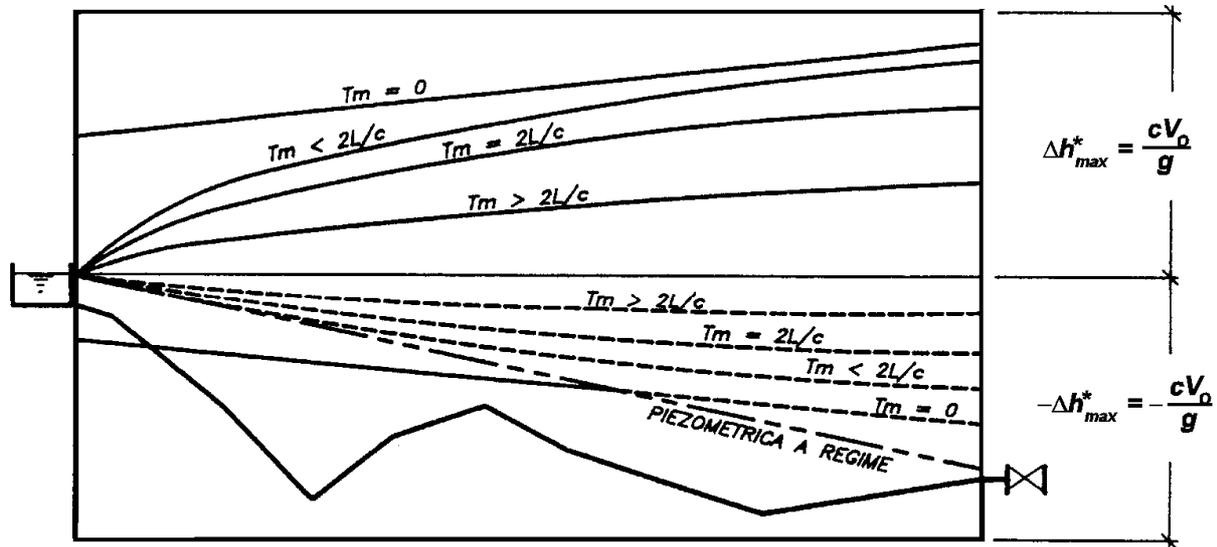
**Figura 11** – Piezometriche di colpo d'ariete massime e minime in una condotta a gravità originate da manovre di chiusura completa (con variazione lineare della velocità), nel caso di cadente  $J$  trascurabile. I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



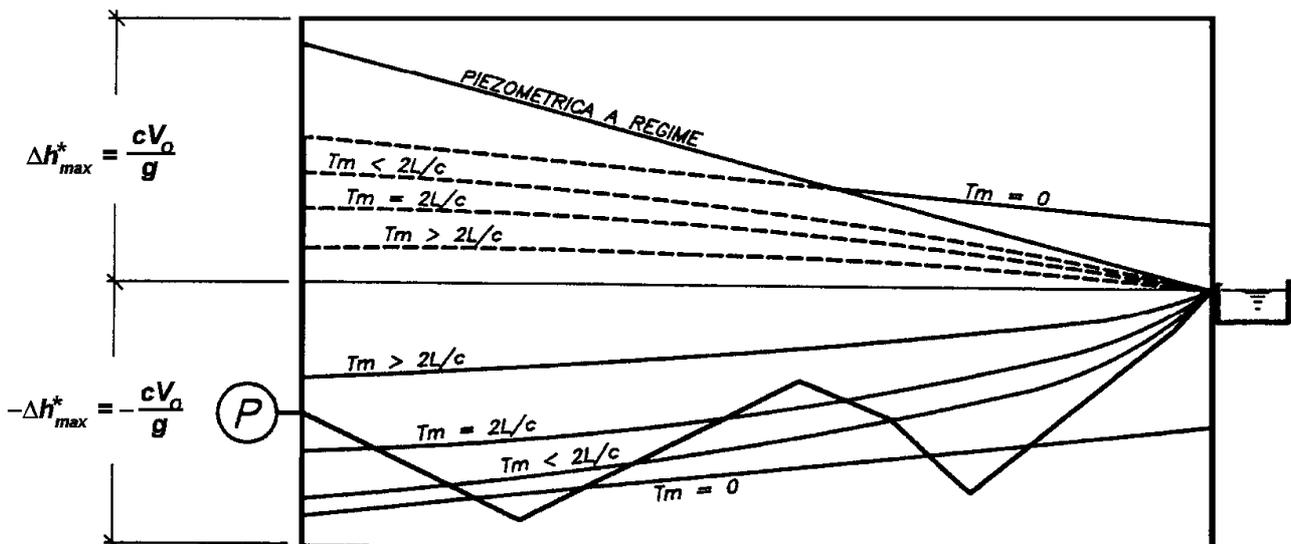
**Figura 12** – Piezometriche di colpo d'ariete massime e minime in una condotta di sollevamento originate da manovre di chiusura completa (con variazione lineare della velocità), nel caso di cadente  $J$  trascurabile. I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



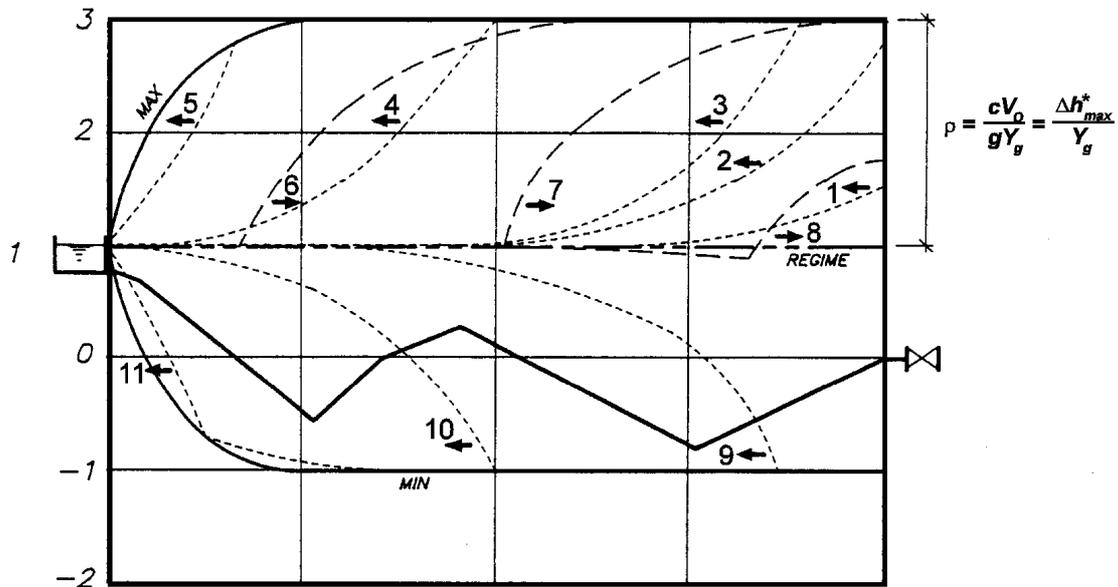
**Figura 13** – Piezometriche di colpo d'ariete massime e minime in una condotta a gravità originate da manovre di chiusura completa (con variazione lineare della velocità), nel caso di cadente  $J$  non trascurabile. I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



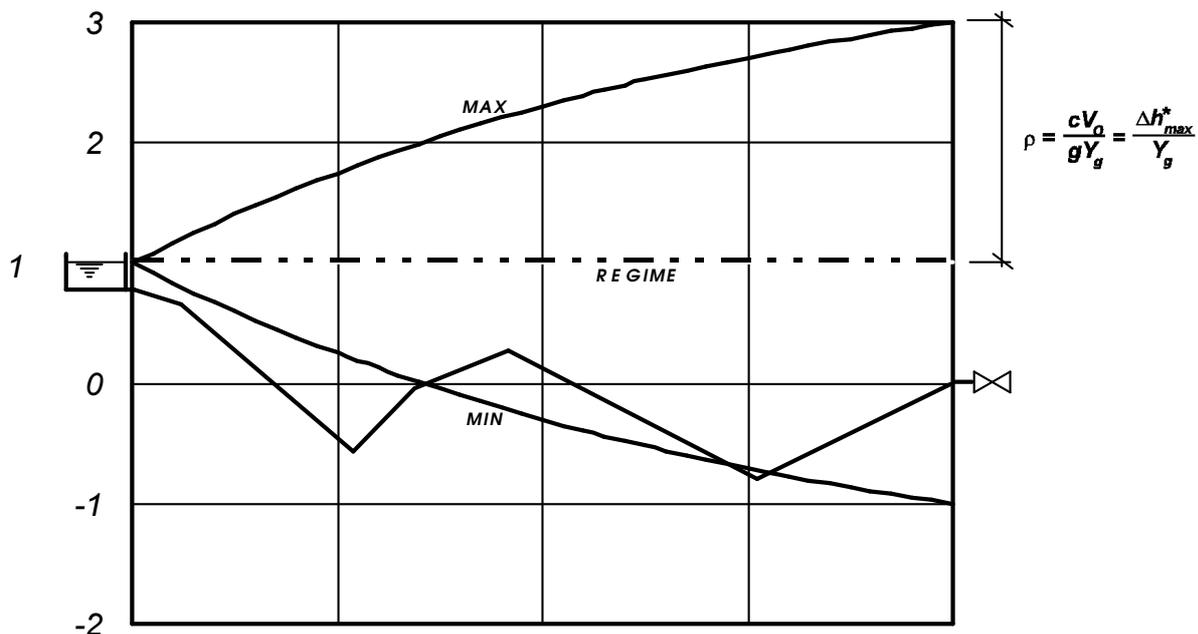
**Figura 14** – Piezometriche di colpo d'ariete massime e minime in una condotta di sollevamento originate da manovre di chiusura completa (con variazione lineare della velocità), nel caso di cadente  $J$  non trascurabile. I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



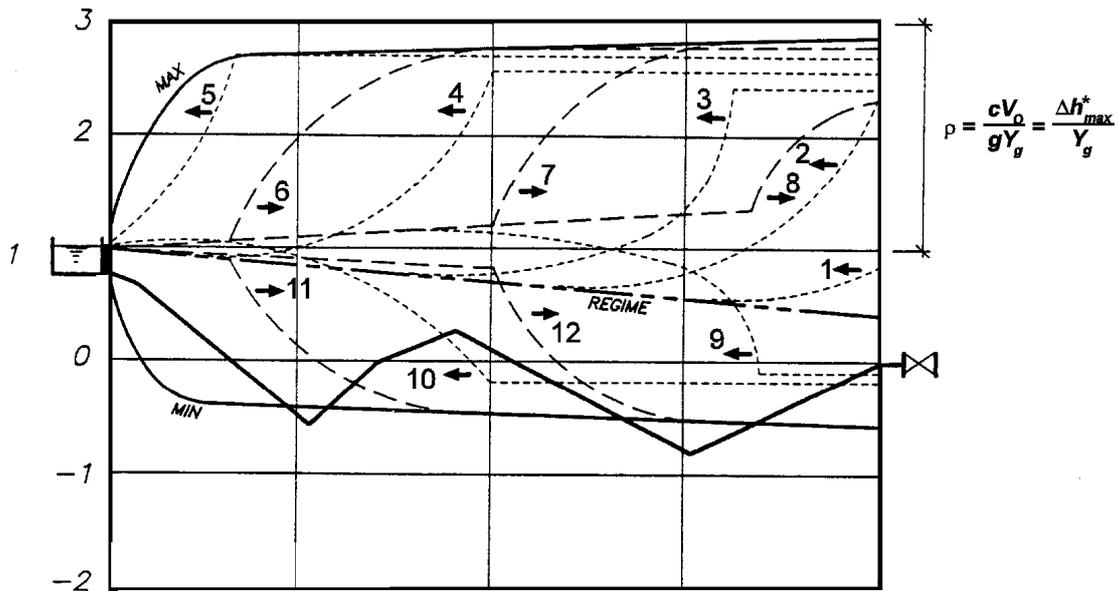
**Figura 16** – Piezometriche istantanee e piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta a gravità per chiusura completa dell'otturatore, con variazione lineare della luce d'efflusso e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0$  e  $\theta = 0.25$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



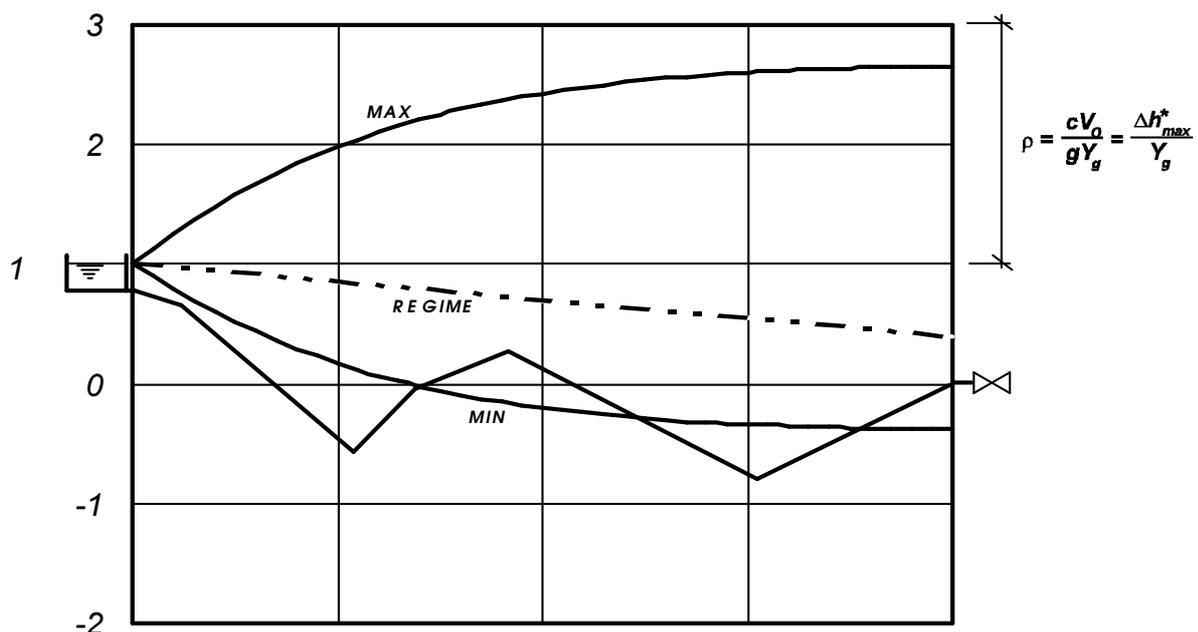
**Figura 17** – Piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta a gravità per chiusura completa dell'otturatore, con variazione lineare della luce d'efflusso e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0$  e  $\theta = 1$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



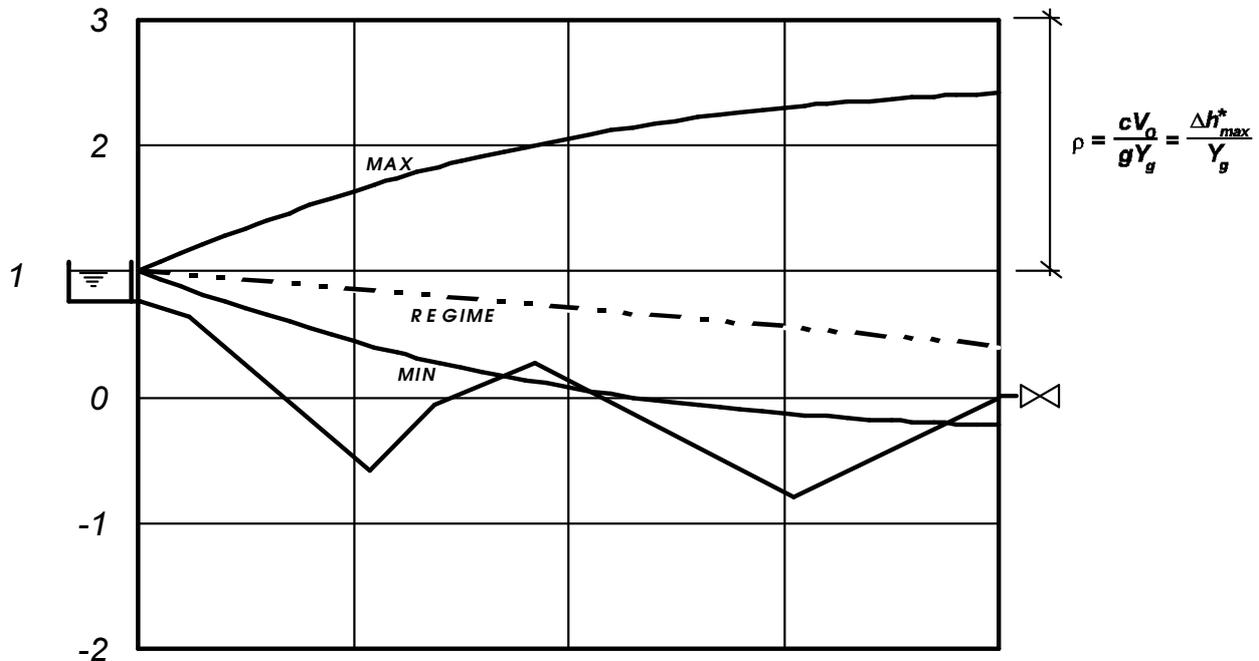
**Figura 18** – Piezometriche istantanee e piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta a gravità per chiusura completa dell'otturatore, con variazione lineare della luce d'efflusso e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0.6$  e  $\theta = 0.25$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



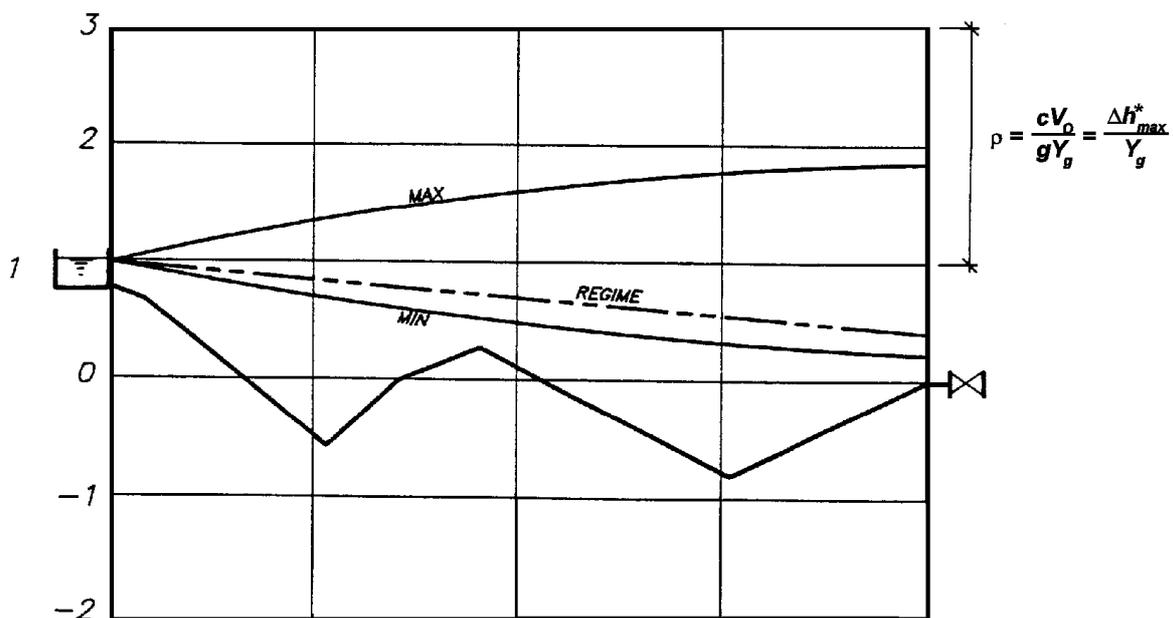
**Figura 19** – Piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta a gravità per chiusura completa dell'otturatore, con variazione lineare della luce d'efflusso e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0.6$  e  $\theta = 1$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



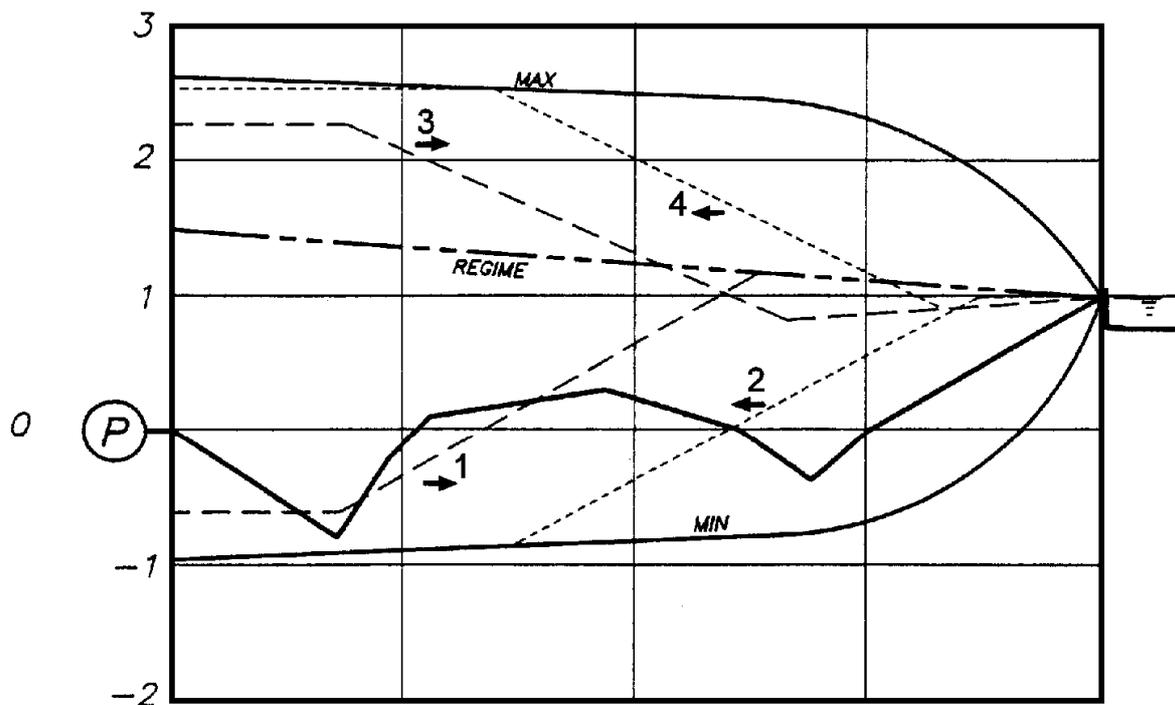
**Figura 20** – Piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta a gravità per chiusura completa dell'otturatore, con variazione lineare della luce d'efflusso e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0.6$  e  $\theta = 1.5$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



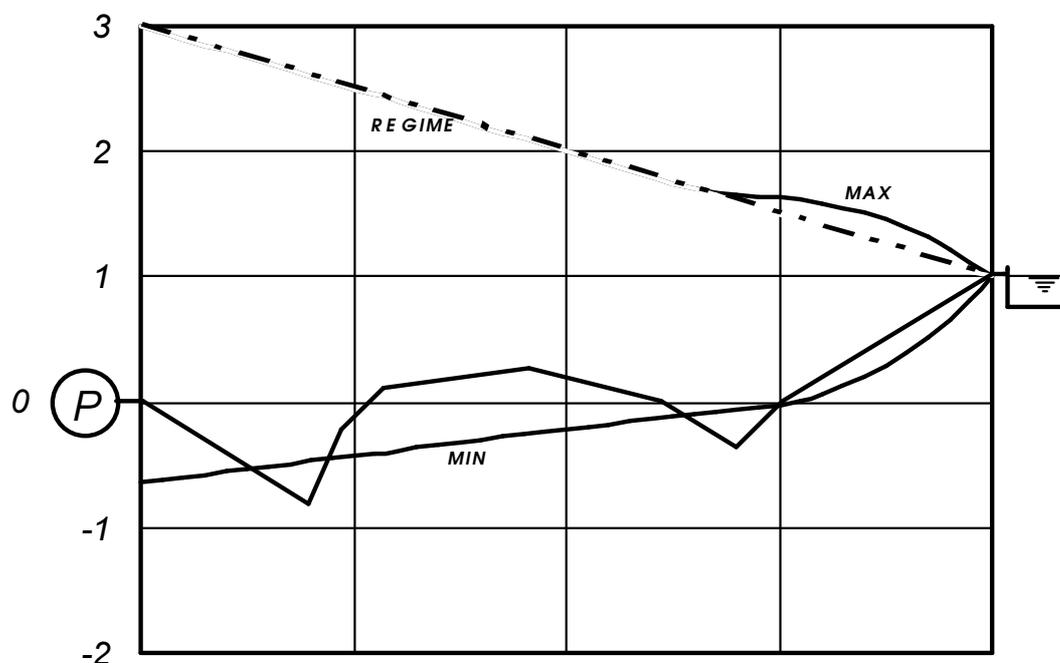
**Figura 21** – Piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta a gravità per chiusura completa dell'otturatore, con variazione lineare della luce d'efflusso e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0.6$  e  $\theta = 2.75$ .



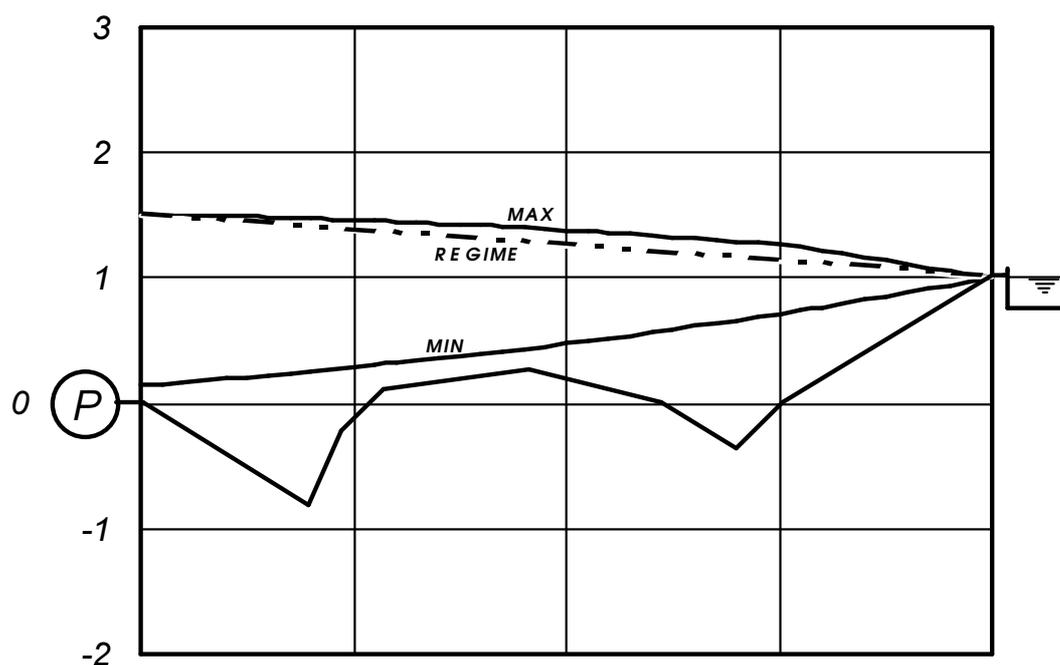
**Figura 22** – Piezometriche istantanee e piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta di sollevamento per arresto completo con variazione ipotizzata lineare della velocità e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0.5$  e  $\theta = 0.25$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



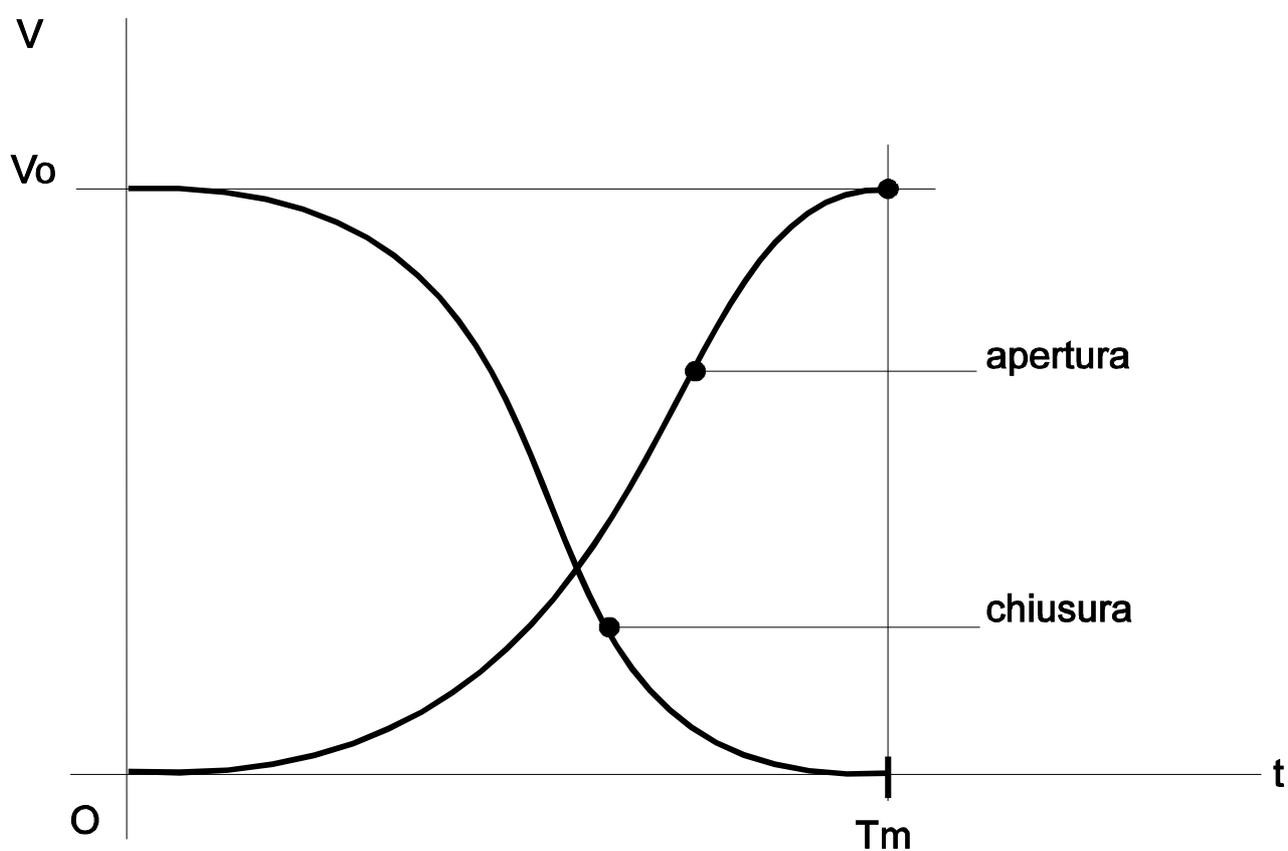
**Figura 23** – Piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta di sollevamento per arresto completo con variazione ipotizzata lineare della velocità e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 2$  e  $\theta = 0.25$ . I tratti di condotta sovrastanti le piezometriche minime sono in depressione o in cavitazione.



**Figura 24** – Piezometriche di colpo d'ariete massima e minima in una condotta di sollevamento per arresto completo con variazione ipotizzata lineare della velocità e parametri caratteristici  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 0.5$  e  $\theta = 1.75$ .



**Figura 15** – Andamenti tipici della velocità media all'otturatore durante manovre rispettivamente di apertura e di chiusura.



**Figura 25** – Andamenti del carico e della portata nella sezione terminale di una condotta a gravità a forte perdita di carico ( $\rho = 4.057$ ,  $\sigma = 0.9$  e  $\theta = 10$ ) per tre diverse leggi di manovra di chiusura.

