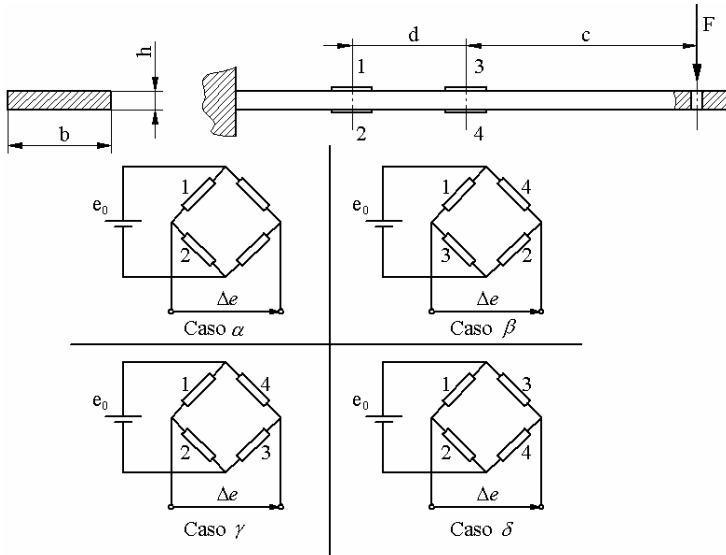


Lezione di Analisi Sperimentale delle Tensioni eseguita in data 18 Maggio 2005

Ing. Giorgio Olmi

giorgio.olmi@mail.ing.unibo.it

ESERCIZIO DI ESTENSIMETRIA: PONTI DI WHEATSTONE.



Una barretta in lega di Alluminio, strumentata con quattro estensimetri è incastrata ad un'estremità e caricata da una forza tagliante F , come mostrato in figura. Conoscendo il valore della forza, la geometria (b e h) e le quote c e d , si determinino le deformazioni e le variazioni di resistenza in corrispondenza di ciascun estensimetro. Facendo riferimento ai quattro collegamenti a ponte di Wheatstone mostrati in figura (casi α , β , γ , δ), si determinino (in valore assoluto) le letture in microepsilon

su una centralina del tipo di quelle usate in laboratorio. Conoscendo i valori del fattore dell'estensimetro k e della tensione di alimentazione, pari a $1,5\text{ V}$, si determinino le entità degli squilibri Δe . In relazione all'ultimo caso di collegamento (δ) si determini lo squilibrio anche in maniera simbolica, commentando brevemente la dipendenza del risultato dal punto di applicazione della forza.

Altri dati: $b = 32\text{ mm}$; $h = 6\text{ mm}$; $c = 120\text{ mm}$; $d = 90\text{ mm}$; $F = 19\text{ N}$; $k = 2,02$; $R = 350\ \Omega$

Vista la semplicità della struttura (trave a mensola), è immediato stimare le deformazioni cui sono soggetti i quattro estensimetri.

Si ha quindi per il primo estensimetro:

$$\varepsilon_1 = \frac{F(c+d)}{EW} = \frac{F(c+d) \cdot 6}{Ebh^2} = \frac{19 \cdot (120+90) \cdot 6}{7 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 6^2} \cdot 10^6 = 297\ \mu\varepsilon$$

Essendo W il momento resistente a flessione, pari a $bh^2/6$

$$\Delta R_1 = k\varepsilon R_1 = 2,02 \cdot 297 \cdot 10^{-6} \cdot 350 \cdot 10^3 = 210\text{ m}\Omega$$

Per il secondo estensimetro:

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = -297\ \mu\varepsilon$$

$$\Delta R_2 = -\Delta R_1 = -210\text{ m}\Omega$$

Per il terzo estensimetro:

$$\varepsilon_3 = \frac{F \cdot c}{EW} = \frac{F \cdot c \cdot 6}{Ebh^2} = \frac{19 \cdot 120 \cdot 6}{7 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 6^2} \cdot 10^6 = 170\ \mu\varepsilon$$

$$\Delta R_3 = k\varepsilon R_3 = 2,02 \cdot 170 \cdot 10^{-6} \cdot 350 \cdot 10^3 = 120\text{ m}\Omega$$

Per il quarto estensimetro:

$$\varepsilon_4 = -\varepsilon_3 = -170\ \mu\varepsilon$$

$$\Delta R_4 = -\Delta R_3 = -120\text{ m}\Omega$$

Primo collegamento a ponte di Wheatstone (Caso α):

Si tratta di un collegamento a mezzo ponte con due estensimetri attivi e due resistenze di completamento interne alla centralina. Questo collegamento è tale da duplicare la risoluzione di lettura in caso di sollecitazioni flessionali ed elidere eventuali contributi dovuti ad azioni assiali. La deformazione di lettura è pertanto pari al doppio di quella ravvisata dall'estensimetro 1.

$$\varepsilon_{lettura1} = 2\varepsilon_1 = 2 \cdot \frac{F(c+d)}{EW} = 594 \mu\varepsilon$$

$$\Delta e_1 = \frac{1}{4} k e_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{4} \cdot 2,02 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot 297 = 450 \mu V$$

Secondo collegamento a ponte di Wheatstone (Caso β):

La lettura di questo ponte è chiaramente nulla, dal momento che estensimetri collocati su rami opposti del ponte di Wheatstone sono soggetti a deformazioni uguali e di segno opposto. Simbolicamente si ha:

$$\varepsilon_{lettura2} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 = \frac{F(c+d)}{EW} - \frac{F \cdot c}{EW} - \frac{F(c+d)}{EW} + \frac{F \cdot c}{EW} = 0 \mu\varepsilon$$

$$\Delta e_2 = 0 \mu V$$

Terzo collegamento a ponte di Wheatstone (Caso γ):

Si tratta del collegamento che consente di sommare tutti i contributi flessionali, ottenendo la massima risoluzione per questo tipo di sollecitazione. Vengono elisi eventuali contributi legati alle forze assiali, dal momento che tutti gli estensimetri sarebbero soggetti alla medesima deformazione.

$$\varepsilon_{lettura3} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 2 \cdot \frac{F(c+d)}{EW} + 2 \cdot \frac{F \cdot c}{EW} = 2 \cdot \frac{F(2c+d)}{EW} = 2 \cdot \frac{19 \cdot (2 \cdot 120 + 90) \cdot 6}{7 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 6^2} = 2 \cdot 297 + 2 \cdot 170 = 934 \mu\varepsilon$$

$$\Delta e_3 = \frac{1}{4} k e_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \frac{1}{4} \cdot 2,02 \cdot 1,5 \cdot (2 \cdot 297 + 2 \cdot 170) = 708 \mu V$$

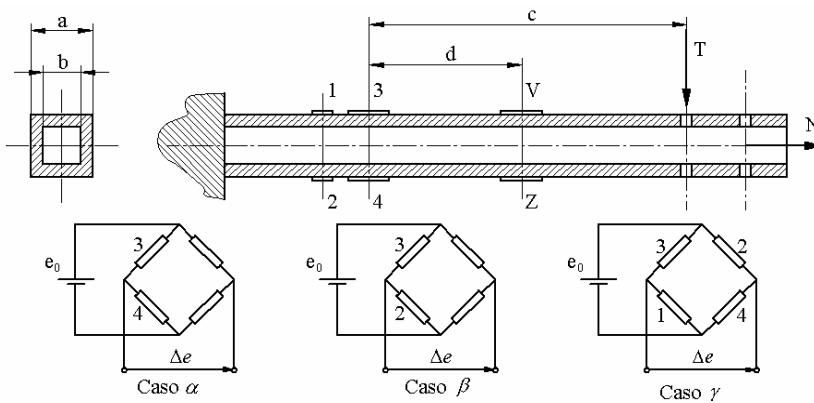
Quarto collegamento a ponte di Wheatstone (Caso δ):

Si tratta di un collegamento che consente di eliminare dalla deformazione di lettura e dall'espressione dello squilibrio del ponte di Wheatstone ogni dipendenza dalla quota c. Si conserva solamente una dipendenza dalla lunghezza d che rappresenta la distanza fra gli assi delle griglie estensimetriche, ossia una costante, una volta operata la strumentazione della barretta. Viene quindi eliminata ogni dipendenza dal punto di applicazione della forza. Oltre a questo, come nel caso precedente, viene eliminato ogni eventuale contributo dovuto ad azioni assiali.

$$\varepsilon_{lettura4} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 = 2 \cdot \frac{F(c+d)}{EW} - 2 \cdot \frac{F \cdot c}{EW} = \frac{F \cdot 2d}{EW} = 2 \cdot \frac{19 \cdot 2 \cdot 90 \cdot 6}{7 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 6^2} = 2 \cdot 297 - 2 \cdot 170 = 254 \mu\varepsilon$$

$$\Delta e_4 = \frac{1}{4} k e_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3) = \frac{1}{4} \cdot 2,02 \cdot 1,5 \cdot (2 \cdot 297 - 2 \cdot 170) = 192 \mu V$$

ESERCIZIO DI ESTENSIMETRIA: PONTI DI WHEATSTONE.



Un tubo in acciaio incastrato ad un'estremità è strumentato con sei estensimetri, dei quali 3, 4, V e Z sono disposti longitudinalmente e 1 e 2 trasversalmente. La sollecitazione è data da una forza tagliante T e da una forza normale di trazione N . Conoscendo il valore delle forze, la geometria e le

dimensioni della sezione quadrata (a e b) e le quote c e d , si determinino le deformazioni in corrispondenza di ciascun estensimetro. Si trascuri la distanza fra gli assi 3 - 4 e 1 - 2. Facendo riferimento ai tre collegamenti a ponte di Wheatstone mostrati in figura (casi α , β , γ), conoscendo i valori del fattore dell'estensimetro k e della tensione di alimentazione del ponte e_0 , pari a 3 V , si determinino le entità degli squilibri $|\Delta e|$. Tenendo conto anche della presenza degli estensimetri V e Z si rappresenti lo schema di un ulteriore collegamento a ponte di Wheatstone con quattro estensimetri attivi che sia tale da elidere il contributo dell'azione normale e che la lettura risulti indipendente dal punto di applicazione della forza T (sia cioè uguale nel caso in cui la forza sia applicata in corrispondenza dell'uno o dell'altro occhiello). Si provi la correttezza della scelta fatta per il collegamento, determinando lo squilibrio anche in maniera simbolica, oltre che numericamente.

$a = 30\text{ mm}$; $b = 22\text{ mm}$; $c = 240\text{ mm}$; $d = 110\text{ mm}$; $T = 1260\text{ N}$; $N = 4800\text{ N}$; $k = 2,05$

Le forze agenti sulla struttura determinano tensioni normali dovute al momento flettente ed alla forza normale. Di queste due distribuzioni, la prima ha andamento a farfalla sulla sezione, mentre la seconda risulta costante sulla sezione stessa. E' quindi immediato calcolare le deformazioni in corrispondenza di ciascun estensimetro, tenendo conto delle sollecitazioni concomitanti.

Estensimetro 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{N}{EA} + \frac{Tc}{EW} = \frac{N}{E(a^2 - b^2)} + \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} = \frac{4800}{2,1 \cdot 10^5 (30^2 - 22^2)} + \frac{6 \cdot 1260 \cdot 240 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 (30^4 - 22^4)} = 505 \mu\varepsilon$$

In tale formula A rappresenta la superficie della sezione ed è pari a $a^2 - b^2$, W rappresenta il momento resistente a flessione e si ha:

$$W = \frac{1}{12} (a^4 - b^4) \cdot \frac{2}{a} = \frac{1}{6} \frac{a^4 - b^4}{a}$$

Si ricordi che i momenti inerziali godono della proprietà dell'additività, mentre tale proprietà non vale per il momento resistente.

Estensimetro 4:

$$\varepsilon_4 = \frac{N}{EA} - \frac{Tc}{EW} = \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} = \frac{4800}{2,1 \cdot 10^5 (30^2 - 22^2)} - \frac{6 \cdot 1260 \cdot 240 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 (30^4 - 22^4)} = -395 \mu\varepsilon$$

Estensimetro 1:

$$\varepsilon_1 = -\nu \varepsilon_3 = -\nu \left(\frac{N}{E(a^2 - b^2)} + \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} \right) = -0,3 \cdot 505 = -152 \mu\varepsilon$$

Estensimetro 2:

$$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_4 = -\nu\left(\frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)}\right) = -0,3 \cdot (-395) = 119\mu\varepsilon$$

Estensimetro V:

$$\varepsilon_V = \frac{N}{EA} + \frac{T(c-d)}{EW} = \frac{N}{E(a^2 - b^2)} + \frac{6T(c-d)a}{E(a^4 - b^4)} = \frac{4800}{2,1 \cdot 10^5 (30^2 - 22^2)} + \frac{6 \cdot 1260 \cdot (240 - 110) \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 (30^4 - 22^4)} = 299\mu\varepsilon$$

Estensimetro Z:

$$\varepsilon_Z = \frac{N}{EA} - \frac{T(c-d)}{EW} = \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \frac{6T(c-d)a}{E(a^4 - b^4)} = \frac{4800}{2,1 \cdot 10^5 (30^2 - 22^2)} - \frac{6 \cdot 1260 \cdot (240 - 110) \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 (30^4 - 22^4)} = -189\mu\varepsilon$$

Primo collegamento a ponte di Wheatstone (Caso α):

Si tratta di un classico collegamento a mezzo ponte che raddoppia la risoluzione nella lettura della deformazione dovuta a flessione e cancella ogni contributo dovuto alla trazione (entrambi gli estensimetri sono soggetti alla medesima deformazione da sforzo normale)

$$\begin{aligned} |\Delta e_1| &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \frac{1}{4} ke_0 \cdot \left(\frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} + \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} - \frac{N}{E(a^2 - b^2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot \frac{12Tca}{E(a^4 - b^4)} = \frac{1}{4} \cdot 2,05 \cdot 3 \cdot \left(\frac{12 \cdot 1240 \cdot 240 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 (30^4 - 22^4)} \right) = 1384\mu V \end{aligned}$$

Secondo collegamento a ponte di Wheatstone (Caso β):

Altro collegamento a mezzo ponte di Wheatstone che combina le letture degli estensimetri 2 e 3.

$$\begin{aligned} |\Delta e_2| &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) = \frac{1}{4} ke_0 \cdot \left(\frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \nu \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \nu \frac{N}{E(a^2 - b^2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot \left[\frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} \cdot (1 - \nu) + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} \cdot (1 + \nu) \right] = \frac{1}{4} \cdot 2,05 \cdot 3 \cdot (505 - 119) = 594\mu V \end{aligned}$$

Terzo collegamento a ponte di Wheatstone (Caso γ):

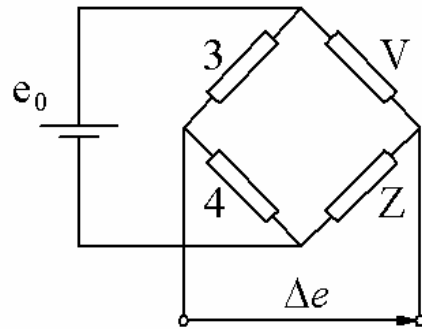
E' un tipico collegamento a ponte intero di Wheatstone che consente di misurare con buona risoluzione la deformazione dovuta a sforzo normale, elidendo i contributi flessionali.

$$\begin{aligned} |\Delta e_3| &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2) = \\ &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot \left(\frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} + \nu \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \nu \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \nu \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \nu \frac{N}{E(a^2 - b^2)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} ke_0 \cdot \left[2(1 + \nu) \cdot \frac{N}{E(a^2 - b^2)} \right] = \frac{1}{4} \cdot 2,05 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,3 \cdot \frac{4800}{2,1 \cdot 10^5 \cdot (30^2 - 22^2)} = 220\mu V \end{aligned}$$

Quarto collegamento a ponte di Wheatstone (Caso δ):

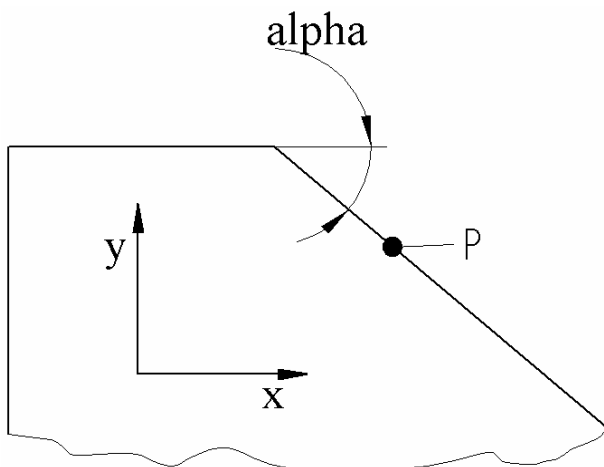
Il collegamento sotto mostrato consente di ottenere il risultato voluto. Il contributo dovuto allo sforzo normale viene ovviamente cancellato visto che tutti gli estensimetri coinvolti sono soggetti alla medesima deformazione da trazione. Come si può notare, gli estensimetri 3 e Z, soggetti a deformazioni da flessione aventi segno opposto, sono posti su rami opposti del ponte. Questo comporta che la lettura del mezzo ponte fra V e Z viene detratta da quella del mezzo ponte fra 3 e 4. Come conseguenza viene cancellato ogni contributo legato alla

quota c , mantenendo dipendenza solamente dalla distanza (costante) fra gli assi delle griglie estensimetriche d .



$$\begin{aligned}
 |\Delta e_4| &= \frac{1}{4} k e_0 \cdot (\varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_Z - \varepsilon_V) = \\
 &= \frac{1}{4} k e_0 \cdot \left(\frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} + \frac{6Tca}{E(a^4 - b^4)} - \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \frac{6T(c-d)a}{E(a^4 - b^4)} + \frac{N}{E(a^2 - b^2)} - \frac{6T(c-d)a}{E(a^4 - b^4)} - \frac{N}{E(a^2 - b^2)} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} k e_0 \cdot \frac{12Tda}{E(a^4 - b^4)} = \frac{1}{4} \cdot 2,05 \cdot 3 \cdot \frac{12 \cdot 1260 \cdot 110 \cdot 30}{2,1 \cdot 10^5 \cdot (30^4 - 22^4)} = 635 \mu V
 \end{aligned}$$

SECONDO ESERCIZIO SULLA FOTOELASTICITA' A TRASMISSIONE.



Un corpo costituito da un materiale fotoelastico è stato analizzato al polariscopio a trasmissione, osservando la presenza di diverse frange di interferenza. Nel punto P, giacente su un bordo libero inclinato dell'angolo α (si veda la figura a fianco), si è potuto rilevare un ordine N di isocromatica. Sapendo che la costante fotoelastica f_σ vale (Resina Epossidica) $10,3 \text{ N}/(\text{mm ord})$ e che lo spessore attraversato dalla radiazione luminosa è pari a d , si risponda ai seguenti quesiti.

- 1) Si dica se è ammissibile o meno l'affermazione "*P è un punto singolare*", giustificandolo brevemente.
- 2) Si determini il valore della differenza delle tensioni principali in corrispondenza del punto P.
- 3) In riferimento al medesimo punto si disegni il circolo di Mohr delle tensioni, valutando i casi di stato di trazione o di compressione.
- 4) Si calcolino infine i valori di $(\sigma_x - \sigma_y)$ e di τ_{xy} nei casi, in cui si abbia trazione oppure compressione sul bordo libero in corrispondenza di P.

$$N = 4; \quad d = 10 \text{ mm}; \quad \alpha = 35^\circ;$$

1) L'affermazione "*P è un punto singolare*" è assolutamente falsa. Condizione necessaria perché un punto sia singolare è che sia isotropo. Nel presente caso P non può tuttavia essere tale, in quanto in esso si è osservato un ordine di isocromatica non nullo (appare una banda colorata in luce bianca, polarizzata circolarmente).

$$2) (\sigma_1 - \sigma_2) = f_\sigma \cdot \frac{N}{d} = 10,3 \cdot \frac{4}{10} = 4,12 \text{MPa}$$

3) 4) Nel caso, in cui si abbia trazione, la situazione è la seguente:

$$\sigma_T \equiv \sigma_1 > 0$$

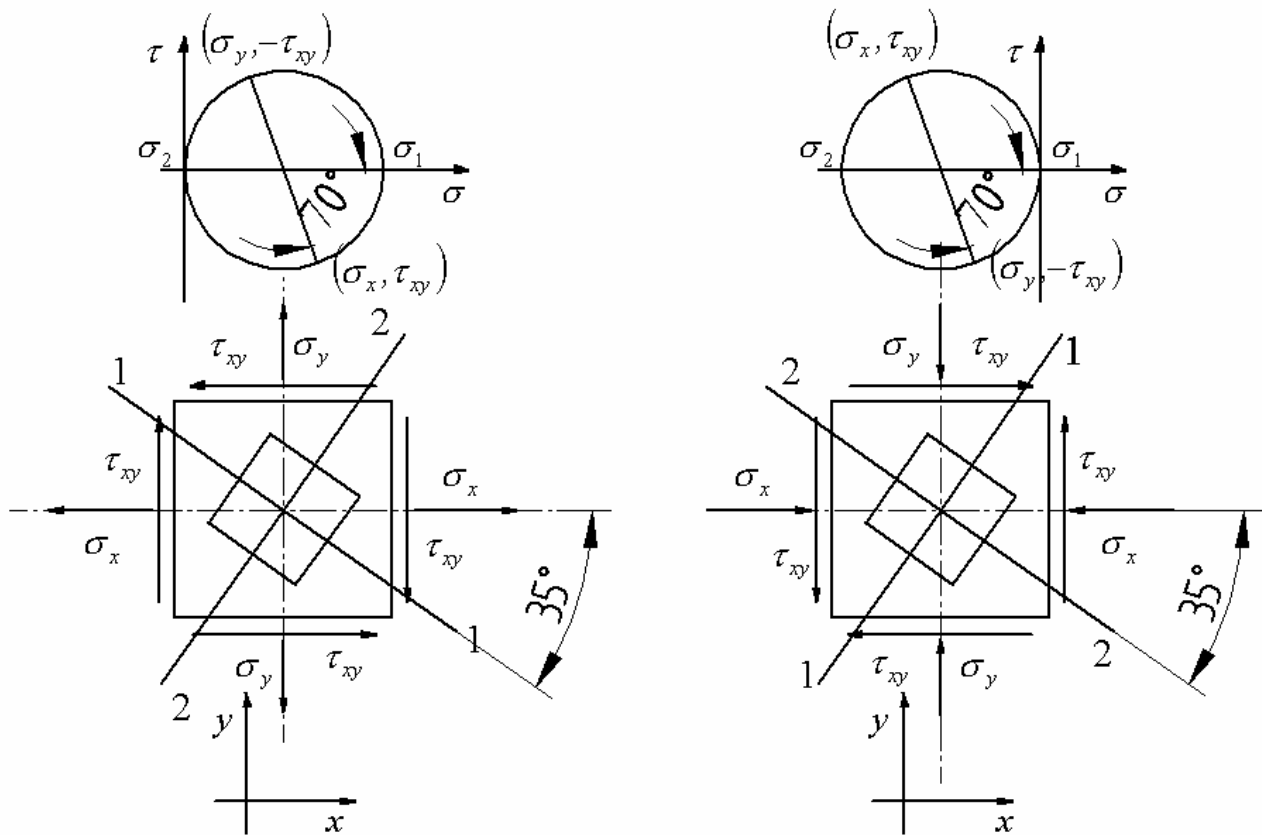
$$\sigma_N \equiv \sigma_2 = 0$$

In quello, in cui si abbia compressione:

$$\sigma_N \equiv \sigma_1 = 0$$

$$\sigma_T \equiv \sigma_2 < 0$$

Il caso di trazione può essere studiato alla luce dell'immagine mostrata nella pagina successiva, osservando che l'angolo fra l'asse x e la direzione 1 è minore di 45° . In questo caso la modalità di deformazione suggerisce un valore negativo per la tensione tangenziale ed un valore positivo per la differenza $(\sigma_x - \sigma_y)$. Si ha pertanto:



$$(\sigma_x - \sigma_y) = + \left| (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos \left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) \right| = + \left| (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos(\pi - 2\alpha) \right| = + \left| (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos(2\alpha) \right| =$$

$$= 4,12 \cdot \cos(70^\circ) = 1,41 \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = - \left| \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cdot \sin \left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) \right| = - \left| \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cdot \sin(\pi - 2\alpha) \right| = - \left| \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right| =$$

$$= - \frac{4,12}{2} \cdot \sin(70^\circ) = -1,94 \text{MPa}$$

Va osservato che a rigore, secondo le convenzioni adottate anche nel corso delle esperienze di laboratorio, l'angolo, che individua l'isocлина passante per P, sarebbe quello di rotazione antioraria, ossia il complementare di α , pari a 55° . Il procedimento sopra mostrato dimostra comunque come, grazie ad elementari proprietà goniometriche, sia indifferente fare riferimento all'angolo di rotazione oraria od a quello di rotazione antioraria, purché in un

secondo tempo si stabilisca il segno in base alle considerazioni di congruenza sopra enunciate.

Nel caso, in cui si abbia compressione l'angolo formato dalla direzione 1 con l'asse x è ora maggiore di 45° . Riflettendo sulle modalità di deformazione, si può concludere che il segno della tensione tangenziale è ora positivo, mentre la tensione normale σ_y risulta maggiore della σ_x . Di conseguenza:

$$(\sigma_x - \sigma_y) = -|(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \cos(2\alpha)| = -4,12 \cdot \cos(70^\circ) = -1,41 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = + \left| \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right| = + \frac{4,12}{2} \cdot \sin(70^\circ) = +1,94 \text{ MPa}$$